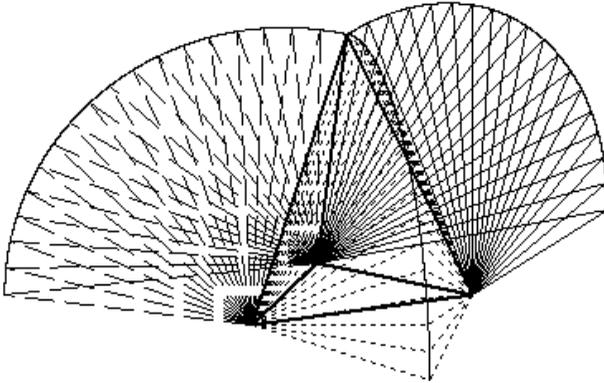


П.И. Совертков



**ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ
ПРОЕКТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ**

Методическое пособие



Издательство
Нижевартовского
государственного
университета
2013

ББК 22.1
С 56

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
Нижевартовского государственного университета

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор Российского государственного
педагогического университета им. А.И.Герцена *А.Л.Вернер*;

доктор педагогических наук,
профессор Омского государственного
педагогического университета *В.А.Далингер*

Совертков П.И.

С 56 **Исследовательские проекты по математике и информатике:**
Методическое пособие. — Нижевартовск: Изд-во Нижеварт.
гос. ун-та, 2013. — 336 с.

ISBN 978-5-00047-031-2

В пособии рассматриваются геометрические модели и их компьютерные аналоги, компьютерное восстановление изображения многогранников из развертки.

Представлены методические рекомендации по темам элективных курсов. Рассматриваются некоторые приемы формирования поисковой деятельности, выделены установки на формирование навыков поисковой деятельности в области математики и информатики (выстраивание аналогий, систематизация и обобщение как метод завершенного изучения данной проблемы, поиск новых тем исследования).

Представленные материалы могут служить основой для элективных курсов по математике и информатике в школах, гимназиях и лицеях; для дисциплин «Элементарная математика», «Компьютерное моделирование» и курсов по выбору в педагогических вузах по специальностям «Математика», «Информатика».

Для старшеклассников, готовящихся к участию в разработке научно-исследовательских проектов по математике и информатике, для учителей математики и информатики, преподавателей, студентов и аспирантов педагогических университетов.

ISBN 978-5-00047-031-2

© Совертков П.И., 2013
© Издательство НВГУ, 2013

Оглавление

Введение.....	5
Глава 1. Геометрические модели и их компьютерные аналоги	7
§ 1. Простейшие задачи на перегибание листа бумаги.....	9
§ 2. Деление листа на равное число частей.....	16
§ 3. Деление отрезка в золотом отношении	22
§ 4. Модели правильных многоугольников	27
§ 5. Модели многогранников.....	30
§ 6. Метрические задачи на развертке тетраэдра	37
Глава 2. Компьютерное моделирование многогранников из развертки.....	47
§ 7. Ортоцентрический тетраэдр.....	49
§ 8. Тетраэдр с равным наклоном граней к основанию	60
§ 9. Тетраэдр с равным наклоном ребер к основанию	66
§ 10. Равногранный тетраэдр.....	73
§ 11. Тетраэдр с тремя равными углами при вершине.....	80
§ 12. Моделирование срезанной треугольной призмы	85
§ 13. Задачи на моделирование пирамид и призм	89
Глава 3. Элективные курсы по математике и информатике	99
§ 14. Элективный курс «Моделирование линий и поверхностей».....	101
§ 15. Элективный курс «Элементы математической картографии».....	107
§ 16. Элективный курс «Геометрия метрических пространств».....	117
§ 17. Элективный курс «Группы и элементы симметрии фигур».....	127
§ 18. Элективный курс «Моделирование многоугольников и многогранников».....	137
§ 19. Элективный курс «Поиск функциональной зависимости».....	146
§ 20. Элективный курс «Модели геометрии Лобачевского»...	171

Глава 4. Методология поисковой деятельности	185
§ 21. Различные модели одного объекта	187
§ 22. Метод включения элемента в систему	200
§ 23. Формирование целей для решения проблемы	208
§ 24. Формирование динамики геометрического образа	216
§ 25. Контрпримеры для развития учебной и поисковой деятельности по математике	229
§ 26. Оценка сложности алгоритма.....	244
§ 27. Моделирование графика функции	256
§ 28. Поиск обратных задач.....	266
§ 29. Разложение в транзитивный ряд и поиск рекурсии — специфика компьютерной математики	275
§ 30. Раскрытие секрета математического фокуса	284
§ 31. Геометрические задачи с игральной костью	296
Справочный материал по элементарной математике	307
Заключение.....	335
Литература	336

ВВЕДЕНИЕ

Модернизация экономики страны предполагает не только использование новых технологий в промышленности, применение новых открытий науки в производстве, но и перестройку подготовки кадров.

Важным направлением модернизации образования является повышения уровня профильного обучения и элективных курсов в системе школьного образования. Задача элективных курсов по математике и информатике — познакомить с новыми и интересными моделями геометрии окружающей среды и создать мотивацию к самостоятельному моделированию при решении задач.

Математическое и компьютерное моделирование в разрабатываемом проекте формируют научный метод познания и включают учащегося в выстраивание индивидуального пути развития.

Одаренные дети нуждаются в развитии самостоятельности, самодисциплины и самоуправления. Большой спектр проектов, представленных в данном пособии, будет способствовать развитию интереса и формированию необходимых качеств поисковой работы.

В третьей части пособия предложен материал для элективного курса по математике и информатике, а также включены методические материалы по формированию поисковой деятельности.

Элективный курс, представленный в главах 1, 2 этого пособия, посвящен трансформации геометрических объектов. Переход от развертки к многограннику и наоборот позволяет исследовать модель в движении, в динамике. Демонстрационные модели можно использовать в элективных курсах в профильной школе, а также для подготовки учителей математики и информатики.

Глава 3 содержит методические рекомендации к проведению элективных курсов. В главе 4 представлены некоторые приемы формирования поисковой деятельности по математике и информатике. Подробно рассматриваются преобразования и трансформации исходной проблемной ситуации, приводящие к решению поставленной задачи. В главах 3—4 наряду с методологией содержится много разнообразных небольших тем с интересным содержанием для исследования. В пособии выделены установки на формирование навыков поисковой деятельности в области математики, информатики и географии (выстраивание аналогий,

систематизация и обобщение как метод завершения изучения данной проблемы, поиск новых тем исследования, инварианты и наследование свойств при различных преобразованиях).

Для всех разработанных моделей предложены программы на языке Visual Basic 6, оформление программ на котором является экономным. Если в тексте пособия или в ответе задачи название программы указано в кавычках, например, «**Косая сетка на кубе**», то эта программа представлена на компакт-диске, прилагаемом к учебному пособию.

Читатель наверняка знаком с серией книг М.Гарднера, вышедших в издательстве «Мир». В них содержится богатый материал по элементарной математике. Но аналитическое изложение сути рассмотренных проблем методом координат осталось за страницами этих книг. После изучения проблемы аналитическим методом появляется возможность компьютерного моделирования, а значит — визуального представления динамики изучаемого объекта.

Автор считает, что в настоящем учебном пособии обоснованы 3 положения:

- метод координат является научным методом для моделирования;

- изучение особенностей моделей открывает путь к их совершенствованию;

- переход от математического моделирования к компьютерному моделированию значительно обогащает модель.

Нумерация задач в пособии — двойная. Первое число указывает номер главы, второе — номер задачи в главе.

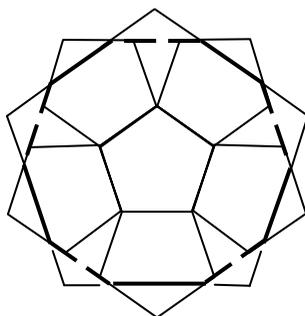
□ — символ, обозначающий окончание решения примера или доказательства теоремы.

В конце пособия приведена литература, справочный материал по элементарной математике. Пособие содержит более 300 рисунков.

Критические замечания и пожелания по наиболее рациональному решению предложенных задач в пособии можно направить автору по e-mail: psovetkov@mail.ru.

Глава 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ КОМПЬЮТЕРНЫЕ АНАЛОГИ



Что нас ожидает в этой главе?

1. Методы деления отрезка на равное количество частей.
2. Методы построения из бумаги правильных многоугольников и правильных многогранников.
3. Методы построения многоугольников и многогранников на экране компьютера в редакторе Word.
4. Новый класс задач для исследования на развертках тетраэдра.

§ 1. Простейшие задачи на перегибание листа бумаги

1.1. Из листа бумаги произвольной формы можно перегибанием легко получить полосу бумаги с двумя параллельными краями. Сгибаем лист по прямой a и разгибаем его (рис. 1). Аналогично сгибаем и разгибаем по прямым b и c (рис. 2).

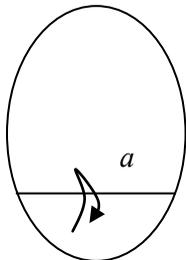


Рис. 1

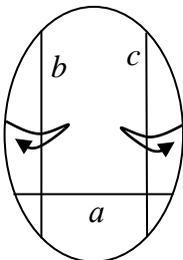


Рис. 2



Рис. 3

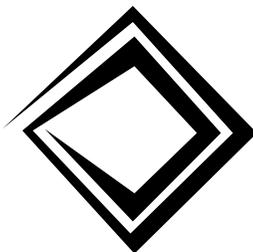


Рис. 4

Следовательно, из листа произвольной формы можно получить прямоугольник. Даже из таких «монстров», какие представлены на рис. 3 и 4, можно получить прямоугольник небольшого размера, но лучше выбирать лист бумаги естественной формы.

1.2. Постройте перегибанием квадрат из прямоугольника.

1.3. Из длинной и узкой полоски бумаги с параллельными краями сложите уголок (рис. 5).

1.4. Из длинной и узкой полоски бумаги с параллельными краями сложите кольцо, изображенное на рис. 6.

1.5. Из длинной и узкой полоски бумаги с параллельными краями сложите кольцо, изображенное на рис. 7.



Рис. 5

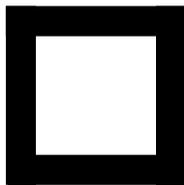


Рис. 6

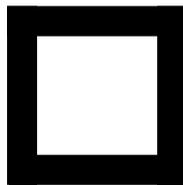


Рис. 7

1.6. Из листа бумаги вырезан угол AOB . Постройте перегибанием биссектрису этого угла.

1.7. Из листа бумаги вырезан треугольник ABC . Постройте медианы этого треугольника. Как построить центр тяжести треугольника?

1.8. Из листа бумаги вырезан треугольник ABC . Постройте биссектрисы этого треугольника. Как построить центр окружности, вписанной в данный треугольник?

1.9. Из листа бумаги вырезан остроугольный треугольник ABC . Постройте высоты этого треугольника. Как построить ортоцентр данного треугольника, т.е. точку пересечения высот треугольника?

1.10. На листе бумаги построена перегибанием прямая и отмечена точка A , не принадлежащая прямой. С помощью перегибаний постройте прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой.

1.11. Из листа бумаги вырезан треугольник ABC . Постройте центр окружности, описанной около данного треугольника, т.е. точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам данного треугольника.

1.12. Как с помощью перегибаний листа бумаги провести прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку?

1.13. На лист бумаги положили крышку для консервирования продуктов и обвели контур, т.е. провели окружность. Как с помощью перегибаний найти центр окружности?

1.14. Из бумажного квадрата двумя сгибаниями получите равнобедренный треугольник. Можно ли одним сгибанием получить равнобедренный треугольник из квадрата?

1.15. Дан отрезок на листе бумаги. Постройте квадрат, для которого этот отрезок является диагональю.

Рассмотрим компьютерные аналоги некоторых задач.

Пример 1. На экране компьютера дан отрезок AB . Разделите его пополам.

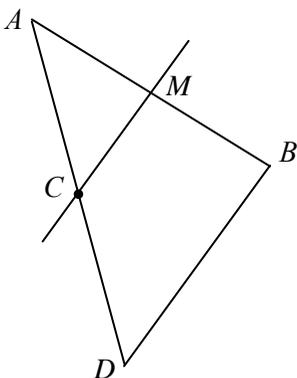


Рис. 8

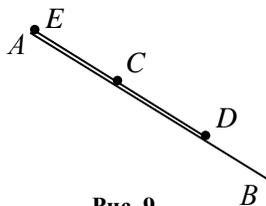


Рис. 9

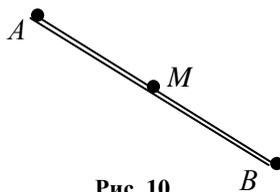


Рис. 10

Решение.

Первый способ. Построим произвольный отрезок AC (рис. 8). Скопируем его и отложим копию от точки C . Чтобы точка C была четко видна на экране компьютера, предварительно на ней разместим маленький круг. Итак, отрезок CD равен отрезку AC . Построим отрезок DB . Копируем его и параллельным переносом размещаем на экране так, чтобы копия прошла через точку C . Прямая CM содержит среднюю линию треугольника ABD , поэтому точка M является серединой отрезка.

Второй способ. На отрезке AB или параллельно ему, но вблизи его строим два равных вспомогательных отрезка EC и CD (рис. 9). Концевые точки можно отметить маленькими кругами или изобразить отрезки линиями разной ширины, чтобы четко различать их концевые точки. Группируем вспомогательные отрезки и растягиваем сгруппированные отрезки таким образом, чтобы отрезок ED оказался равным отрезку AB (рис. 10). Точка C окажется в середине отрезка.

Третий способ. В чем недостаток предыдущих способов? Нужно строить метки, чтобы отделить копию от вспомогательного отрезка. А нельзя ли развести вспомогательные равные отрезки в разные места. На рис. 11 предложен более простой способ, уменьшающий число шагов при построении середины.

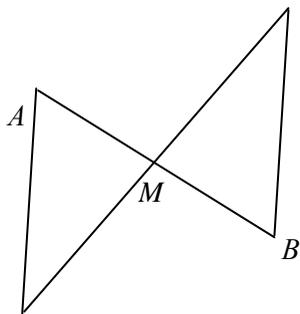


Рис. 11

Через точки пересечения окружностей проводим отрезок, который является серединным перпендикуляром к данному отрезку.

Четвертый способ. Строим окружность с двумя диаметрами, чтобы определить центр окружности. Группируем окружности и диаметры. Радиус окружности должен быть больше половины искомого отрезка AB . Копируем эту конструкцию и переносим окружности так, чтобы центры окружностей оказались в концевых точках отрезка.

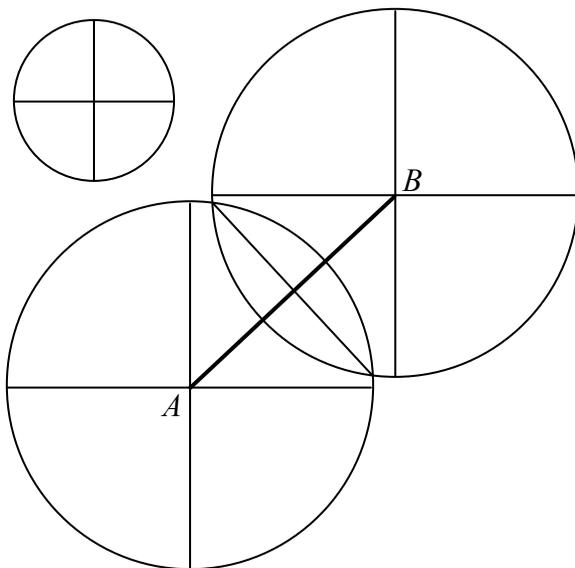


Рис. 12

Все эти способы направлены на построение вспомогательной фигуры, содержащей середину отрезка, а потом некоторого способа переноса середины фигуры на середину отрезка. А разве редактор рисования не содержит шаблонных фигур с серединой отрезка? Пока мы не переформулировали свою задачу на языке

общих операций, мы стремились выстроить конкретную последовательность операций и могли привести еще несколько способов.

А если проанализировать спектр основных фигур, то появляется более простой способ построения середины отрезка с использованием новых фигур.

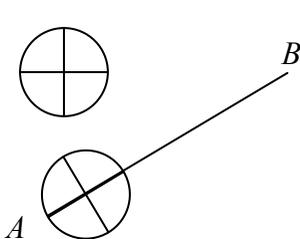


Рис. 13

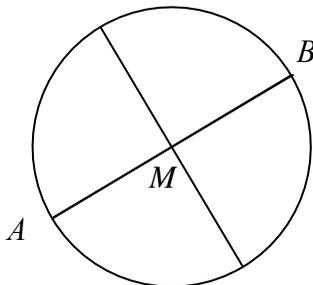


Рис. 14

Пятый способ. В редакторе рисования находим **Автофигуры, Блок-схема, Блок-схема: или** и рисуем окружность с диаметром. Середина диаметра на фигуре отмечена, и это сокращает число необходимых операций по сравнению с четвертым способом. Переносим окружность так, чтобы конец одного диаметра совпал с концевой точкой данного отрезка. Свободным вращением поворачивает окружность, чтобы один из диаметров оказался на прямой AB (рис. 13). Применяем растяжение окружности, чтобы один из диаметров совпал с отрезком AB , тогда центр новой окружности окажется в середине отрезка.

Шестой способ. Найдите в редакторе рисования другие фигуры, содержащие отрезок с его серединой, и опишите новый способ построения середины отрезка.

Седьмой способ. Если отрезок не является горизонтальным или вертикальным (рис. 15), то, используя шаблон, строим прямоугольник, для которого данный отрезок является диагональю (рис. 16). Проводим вторую диагональ прямоугольника (рис. 17). Точка пересечения диагоналей является серединой данного отрезка. Поясните аналогичные построения, если данный отрезок является горизонтальным или вертикальным.

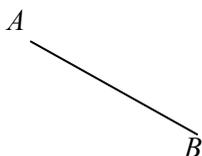


Рис. 15

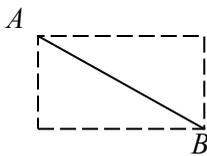


Рис. 16

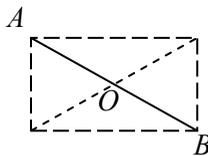


Рис. 17

1.16. На экране компьютера дан треугольник. Укажите наиболее простой способ построения центра тяжести треугольника.

Пример 2. На экране компьютера даны отрезок AB и точка C . Постройте отрезок, проходящий через точку C и перпендикулярный отрезку AB .

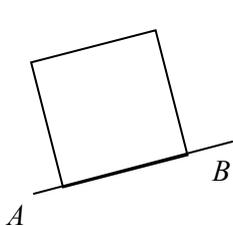


Рис. 18

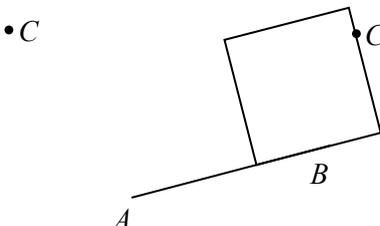


Рис. 19

Решение.

Первый способ. Строим произвольный квадрат, затем свободным вращением переводим его в положение, чтобы одна сторона оказалась на прямой AB (рис. 18). Передвигая по прямой AB , переводим его в положение, чтобы одна сторона оказалась в данной точке (рис. 19). Проводим отрезок по этой стороне квадрата через точку C . Этот способ требует кропотливой работы по установке квадрата одной стороной на данном отрезке.

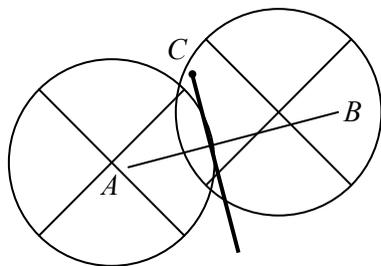


Рис. 20

Второй способ. Используя шаблон, построим две равных окружности с центрами на данном отрезке так, чтобы они проходили через данную точку (рис. 20). Проведем прямую через точки пересечения окружностей.

Третий способ. Копируем данный отрезок, поворачиваем копию на 90° и переносим повернутый отрезок в точку C .

1.17. На экране компьютера дан треугольник ABC . Укажите наиболее простой способ построения точки пересечения высот треугольника.

Пример 3. На экране компьютера дан угол AOB . Постройте биссектрису этого угла.

Первый способ. Построение. Используя шаблон, строим окружность с диаметрами. Свободным вращением устанавливаем радиус окружности на сторону угла так, чтобы центр окружности совпал с вершиной угла (рис. 21). Пусть D — диаметрально противоположная точка к точке A . Проведем отрезок DB , тогда $\triangle ODB$ — равнобедренный. Угол AOB является внешним углом для треугольника ODB , поэтому он равен сумме двух внутренних углов, не смежных с углом AOB . Угол ODB

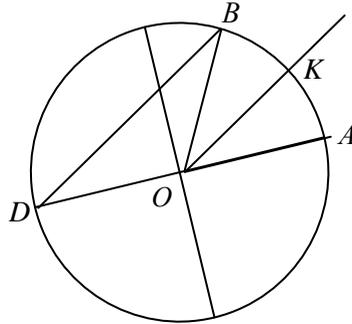


Рис. 21

в два раза меньше, чем угол AOB . Копируем отрезок DB и проводим копию через точку O . Угол AOK — искомый.

Второй способ. Используя шаблон **Блок-схема: сортировка**, строим ромб с диагональю (рис. 22). Сжимая ромб и поворачивая его, устанавливаем так, чтобы вершина ромба совпала с вершиной данного угла, а две смежных стороны ромба находились на сторонах угла. Отрезок вдоль диагонали ромба является биссектрисой угла.

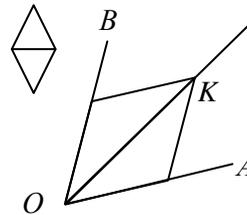


Рис. 22

1.18. На экране компьютера дан треугольник ABC . Укажите наиболее простой способ построения центра окружности, вписанной в треугольник.

§ 2. Деление листа на равное число частей

а) Деление квадратного листа бумаги на 3 части.

Отметим середину M отрезка DC . Перегнем квадрат таким образом по прямой (рис. 1), чтобы точка B перешла в точку M . Отрезок AB примет положение A_1M . Пусть $N = AD \cap A_1M$, тогда точка N делит отрезок AD в отношении 1:2 (рис. 2).

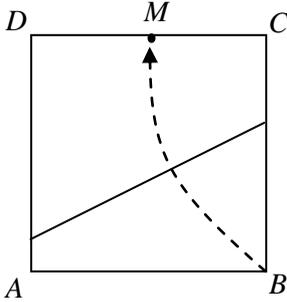


Рис. 1

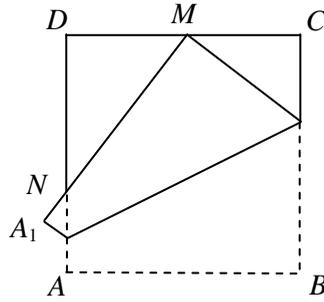


Рис. 2

Доказательство (рис. 3).

$$\angle CBM = \angle BKQ = \angle QKM, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{4}{3},$$

$$\angle BKN = \angle NMD = 2\varphi, \quad ND = DM \operatorname{tg} 2\varphi, \quad ND = \frac{2}{3}, \quad AN : ND = 1 : 2.$$

Далее строим прямую через точку N параллельно стороне AB методом сгибания квадратного листа.

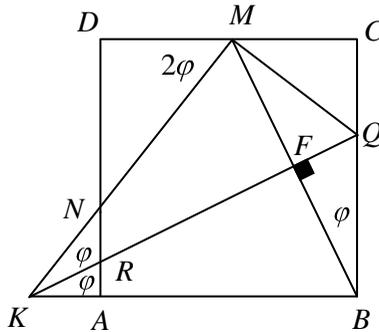


Рис. 3

б) Деление квадратного листа бумаги на 5 частей.

Отметим середину M отрезка BC (рис. 4). При перегибании квадрата по прямой AM точка B перейдет в точку B_1 , проекция которой на отрезок DC разделит этот отрезок в отношении 3:2, а проекция на отрезок BC разделит этот отрезок в отношении 4:1 (рис. 5).

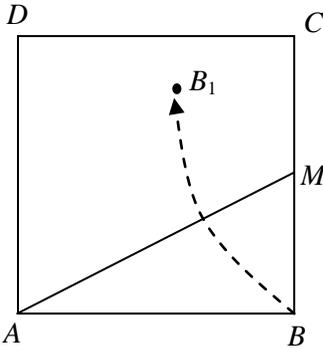


Рис. 4

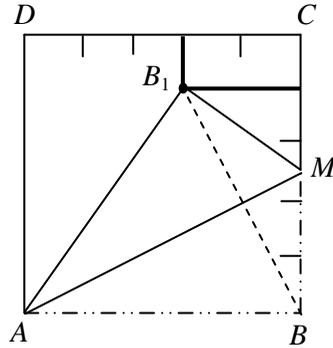


Рис. 5

Доказательство.

Первый способ. Из треугольника ABM (рис. 6) получаем

$$AM = \frac{\sqrt{5}}{2}, \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$BH = BM \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$NH = BH \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5},$$

$$NB = BH \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}.$$

Точка H является серединой отрезка BB_1 , поэтому $B_1 \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right)$. ■

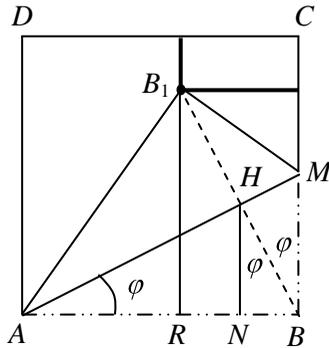


Рис. 6

Второй способ. $\angle BAB_1 = 2\varphi$, $\cos 2\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin 2\varphi = \frac{4}{5}$.

$$AR = AB_1 \cos 2\varphi = AB \cos 2\varphi = \frac{3}{5}. \quad RB_1 = AB_1 \sin 2\varphi = AB \sin 2\varphi = \frac{4}{5}. \blacksquare$$

в) Деление квадратного листа бумаги на 7 частей.

Пусть точка M делит отрезок DC в отношении 3:2 (рис. 7). Перегнем квадрат так, чтобы точка B перешла в точку M , тогда RQ — линия сгиба, а точка A перейдет в точку A_1 (рис. 8). Если $AD \cap A_1M = N$, то точка N делит отрезок AD в отношении 3:4.

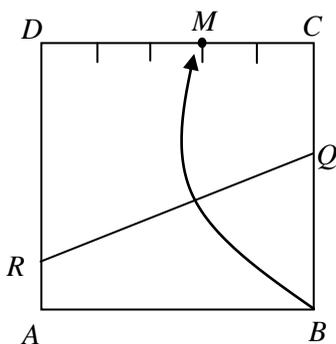


Рис. 7

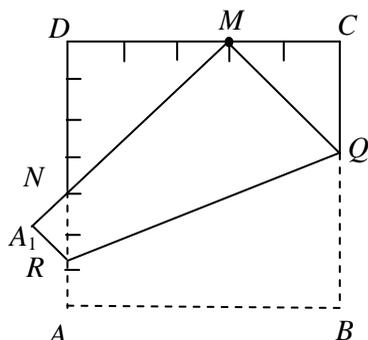


Рис. 8

Доказательство (рис. 9).

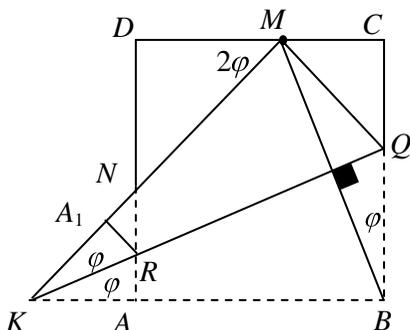


Рис. 9

$$\angle CBM = \angle BKQ = \angle QKM,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{5}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{20}{21},$$

$$\angle BKN = \angle NMD = 2\varphi,$$

$$ND = DM \operatorname{tg} 2\varphi, \quad ND = \frac{4}{7},$$

$$AN : ND = 3 : 4.$$

Аналитический метод. Пусть начало декартовой системы координат совпадает с вершиной A квадрата, а оси координат Ox , Oy направлены, соответственно, по сторонам AB , AD квадрата.

Координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0; y_0)$ на прямую $ax + by + c = 0$:

$$x = x_0 - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}a, \quad y = y_0 - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}b.$$

Проверьте подстановкой, что точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой $ax + by + c = 0$.

Координаты точки, симметричной точке $M_0(x_0; y_0)$ относительно прямой $ax + by + c = 0$:

$$x = x_0 - 2a \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, \quad y = y_0 - 2b \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}. \quad (1)$$

Для рисунка 6 угловой коэффициент прямой AM равен $1/2$, поэтому прямая линия имеет уравнение $x - 2y = 0$.

При симметрии относительно прямой AM точка B отображается в точку B_1 . Подставляя координаты точки B в уравнения (1), получаем $B_1\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Для рис. 3 угловой коэффициент прямой RQ равен $1/2$, поэтому прямая RQ имеет уравнение $x - 2y + c = 0$, где c — неизвестная пока константа. Прямая проходит через середину F отрезка BM .

Для середины отрезка BM получаем координаты $F\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$. Используя координаты точки для определения константы, получаем уравнение прямой

$$RQ: \quad x - 2y + \frac{1}{4} = 0.$$

Точка $N(0; y_0)$ при симметрии относительно прямой RQ отображается в точку на оси ox , поэтому, подставляя в равенство

$$0 = y_0 - 2b \frac{a \cdot 0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

коэффициенты уравнения прямой RQ , определяем значение $y_0 = 1/3$.

г) Деление отрезка на 3 равные части.

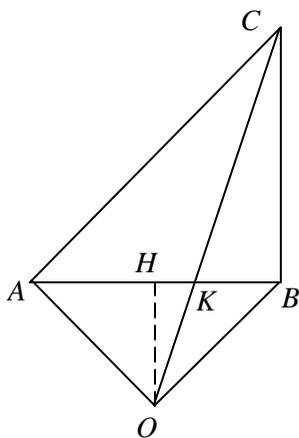


Рис. 10

Первый способ. Идея способа деления отрезка AB на 3 равные части основана на использовании подобных треугольников и следует из рис. 10.

Пусть ABC и AOB — равнобедренные прямоугольные треугольники, тогда $BC = 2HO$, $\frac{BK}{KH} = \frac{BC}{HO} = 2$, $BK = 2KH$, $AK = 2KB$.

Конструктивные построения на листе бумаги.

Перегибая лист бумаги, проводим прямые, перпендикулярные отрезку AB (рис. 11).

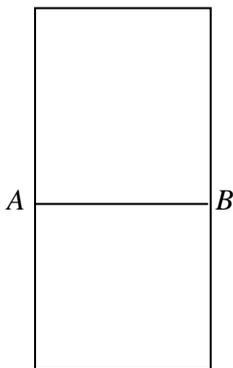


Рис. 11

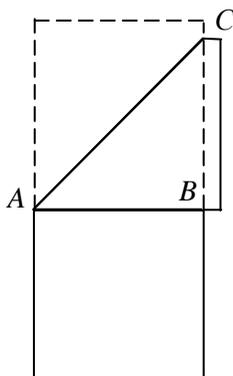


Рис. 12

Перегибая верхнюю часть полосы, получаем точку C (рис. 12). Аналогично перегибая дважды нижнюю часть полосы, получим точку O . Затем необходимо выполнить изгибание по отрезку OC .

Второй способ. Идея способа деления отрезка AB на 3 равные части основана на использовании подобных треугольников и следует из рис. 13.

На отрезке AB перегибанием листа строим квадрат $ABCD$.
Находим середину диагонали AC , т.е. точку O .

Строим середину отрезка AO , т.е. точку K .

Перегибаем квадрат по прямой DK , тогда точка пересечения прямых DK и AB , т.е. точка M , делит отрезок AB в отношении 1:2.

Действительно,

$$\frac{AM}{DC} = \frac{AK}{KC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}.$$

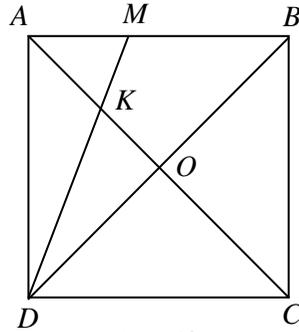


Рис. 13

д) Деление отрезка на 5 равных частей.

Перегибанием листа строим квадрат $ACBD$, для которого отрезок AB является диагональю (рис. 14).

Разделив сторону AD на четыре части, отмечаем точку K .

Перегибаем квадрат по прямой CK , тогда точка пересечения прямых CK и AB , т.е. точка M , делит отрезок AB в отношении 1:5.

Действительно,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AK}{CB} = \frac{1}{4}, \quad AM = \frac{1}{5} AB.$$

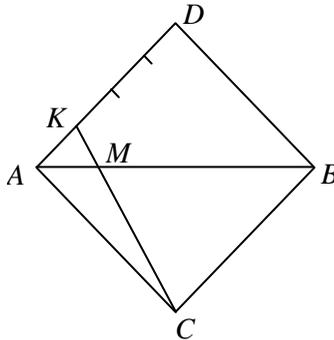


Рис. 14

§ 3. Деление отрезка в золотом отношении

Отрезок называется разделенным в золотом отношении, если он весь так относится к большей части, как большая часть относится к меньшей части (рис. 1).



Рис. 1

Из определения получаем $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Обозначим $\frac{a}{b} = \varphi$, тогда

для золотого отношения φ получаем

$$\text{уравнение } 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi. \text{ Следовательно, } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

У золотого отношения существует много замечательных свойств [19, с. 250].

Пример 1. Разделить сторону квадрата в золотом отношении.

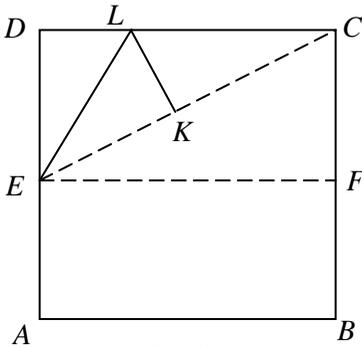


Рис. 2

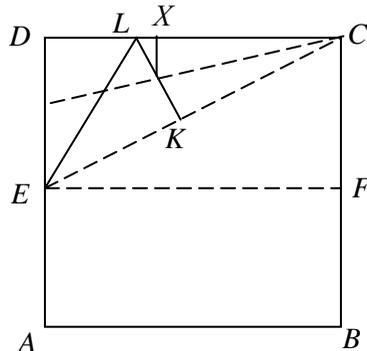


Рис. 3

Построения. После каждого перегибания листа будем возвращать лист в исходное положение.

1. Складывая квадрат $ABCD$ пополам, отметим среднюю линию квадрата EF (рис. 2).

2. Перегнем лист бумаги по линии EC .

3. Перегнем лист бумаги так, чтобы точка D оказалась на отрезке EC , и отметим точку K , удовлетворяющую условию $EK = ED$.

4. Наложим отрезок CD на прямую CE и отметим точку X , удовлетворяющую условию $CX = CK$ (рис. 3).

Точка X делит отрезок CD в золотом отношении.

Доказательство. Пусть $CD = a$, тогда $DE = \frac{a}{2} = EK$, $EC = \frac{\sqrt{5}}{2}a$,
 $CK = CE - EK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = CX$, $\frac{CD}{CX} = a : \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,
 $\frac{CD}{CX} = \varphi = \frac{CX}{XD}$. ■

Прямоугольник называется золотым, если отношение большей стороны к меньшей стороне равно золотому отношению.

1.19. На листе бумаги отмечен отрезок. Разделите его в золотом отношении.

1.20. Дан квадрат. Постройте перегибаниями золотой прямоугольник.

Золотой прямоугольник обладает замечательным свойством: если отрезать от золотого прямоугольника квадрат, сторона которого равна меньшей стороне прямоугольника, то получим снова золотой прямоугольник (проверьте это).

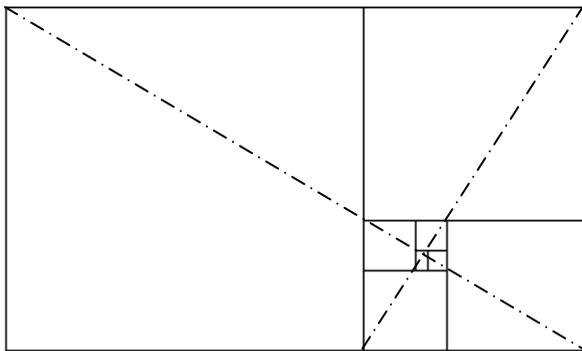


Рис. 4

Продолжая аналогично операцию по отрезанию квадратов, можно получить покрытие исходного золотого прямоугольника последовательностью квадратов и одним золотым прямоугольником, размеры которого уменьшаются после каждого отделения квадрата (рис. 4). Точки деления сторон при разбиении на квадраты расположены на логарифмических спиралях [19, с. 256].

1.21. Дан золотой прямоугольник. Постройте указанную выше последовательность квадратов в нем.

Программа построения разбиения золотого прямоугольника со сторонами a и b на n квадратов, в которой учтена закономерность расположения вершин квадрата на логарифмических спиралях, имеет вид:

```
Private Sub Command1_Click()
xc = 100: yc = 100: a = 10000: fi = (Sqr(5) + 1) / 2
b = a / fi: pi = 4 * Atn(1)
Line (xc, yc)-(xc + a, yc): Line (xc + a, yc)-(xc + a, yc + b)
Line (xc + a, yc + b)-(xc, yc + b): Line (xc, yc + b)-(xc, yc)
r0 = b ^ 2 / Sqr(a ^ 2 + b ^ 2)
r1 = Sqr((a - b) ^ 4 + a ^ 2 * b ^ 2) / (2 * a - b)
x0 = a ^ 2 / (2 * a - b): y0 = b * (a - b) / (2 * a - b)
u0 = Atn(1 / fi): v0 = 3 * pi / 4 - u0
Circle (xc + x0, yc + y0), 10
For n = 0 To 10
xi = xc + x0 + r0 * fi ^ (-(n + 1)) * Cos(-u0 - (n + 1) * pi / 2)
yi = yc + y0 + r0 * fi ^ (-(n + 1)) * Sin(-u0 - (n + 1) * pi / 2)
xj = xc + x0 + r1 * fi ^ (-n) * Cos(v0 - n * pi / 2)
yj = yc + y0 + r1 * fi ^ (-n) * Sin(v0 - n * pi / 2)
Line (xi, yi)-(xj, yj)
Next n
End Sub
```

Если учесть свойство вершин квадрата делить сторону прямоугольника в золотом отношении, то программу можно сформировать совершенно в другом стиле. На каждом шаге в цикле нужно совершить переход от текущего золотого прямоугольника к меньшему золотому прямоугольнику, полученному при отрезании квадрата.

Программа построения разбиения золотого прямоугольника со сторонами a и b на n квадратов, в которой используется переобозначение вершин золотого прямоугольника, имеет вид:

```
Private Sub Command1_Click()
xc = 100: yc = 100: a = 5000: fi = (Sqr(5) + 1) / 2: b = a / fi
x1 = 0: y1 = 0: x2 = 0: y2 = b: x3 = a: y3 = b: x4 = a: y4 = 0
For n = 1 To 8
Line (x1 + xc, y1 + yc)-(x2 + xc, y2 + yc)
Line (x2 + xc, y2 + yc)-(x3 + xc, y3 + yc)
Line (x3 + xc, y3 + yc)-(x4 + xc, y4 + yc)
Line (x4 + xc, y4 + yc)-(X1 + xc, Y1 + yc)
x5 = (x2 + fi * x3) / (1 + fi): y5 = (y2 + fi * y3) / (1 + fi)
```

$$x_6 = (x_1 + f_i * x_4) / (1 + f_i); y_6 = (y_1 + f_i * y_4) / (1 + f_i)$$

$$x_1 = x_5; y_1 = y_5; x_2 = x_3; y_2 = y_3$$

$$x_3 = x_4; y_3 = y_4; x_4 = x_6; y_4 = y_6$$

Next n

End Sub

Равнобедренный треугольник называется золотым, если отношение боковой стороны к основанию равно золотому отношению. Если разрезать правильный десятиугольник на десять частей отрезками, проведенными из центра десятиугольника в его вершины, то получим десять золотых прямоугольников.

Пример 2. Дан квадрат. Постройте перегибаниями золотой треугольник.

Построение. Пусть точка X делит сторону CD в золотом отношении (рис. 5). Построим прямоугольник $DXGA$ и разделим его пополам линией сгиба EF . Рассмотрим сгибание угла квадрата таким образом, чтобы точка C оказалась на прямой EF , т.е. $XK = XC$. Сделаем сгибы CK, KD , тогда CDK — золотой треугольник (рис. 6).

Доказательство. Пусть $\angle DCK = \alpha$. Треугольник CXK — равнобедренный, поэтому $\angle CKX = \alpha$. Угол KXD является внешним углом для треугольника KXD , следовательно, $\angle KXD = 2\alpha$. Треугольник XDK — равнобедренный, поэтому $\angle XDK = 2\alpha$.

Докажем, что $CK = CD$.

Докажем, что $CK = CD$.

$$CK^2 = EK^2 + EC^2 = DK^2 - DE^2 + EC^2 = (EC^2 - DE^2) + XK^2 = (EC + DE) \cdot (EC - DE) + CX^2 = CD \cdot CX + CX^2.$$

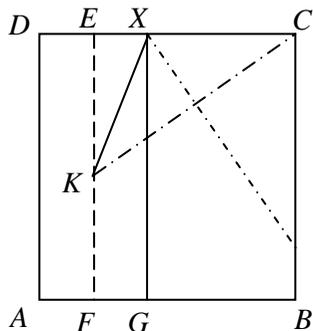


Рис. 5

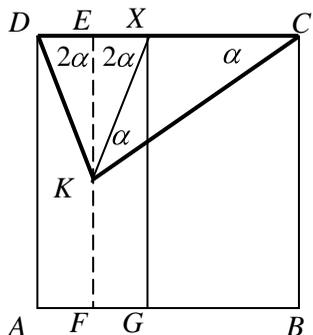


Рис. 6

Точка X делит отрезок CD в золотом отношении, поэтому

$$\frac{CD}{CX} = \frac{CX}{DX} \text{ или } CX^2 = CD \cdot DX.$$

$CK^2 = CD \cdot CX + CD \cdot DX = CD \cdot (CX + XD) = CD^2$, поэтому $CK = CD$. ■

Приведите другое доказательство рассмотренного утверждения, используя длины сторон:

$$CD = a, CX = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a, DX = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a, EX = \frac{3-\sqrt{5}}{4}a.$$

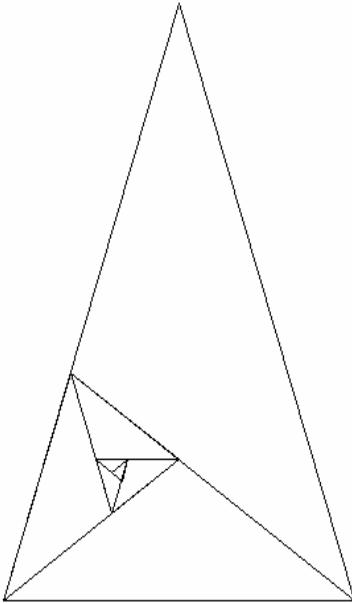


Рис. 7

Отметим, что в золотом треугольнике углы равны $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$. Следовательно, с помощью перегибаний можно построить углы величиной $72^\circ, 36^\circ, 18^\circ, 9^\circ$.

Если от золотого треугольника отрезать равнобедренный треугольник, основание которого равно боковой стороне данного треугольника (или равносильное утверждение — провести биссектрису угла при основании данного треугольника), то получим снова золотой треугольник (рис. 7).

Программа построения разбиения золотого треугольника со сторонами a и b на n золотых треугольничков, в которой проводится переобозначение вершин золотого треугольника:

```
Private Sub Command1_Click()
xc = 100: yc = 100: b = 4000: fi = (Sqr(5) + 1) / 2
a = b * fi: pi = 4 * Atn(1)
X1 = 0: Y1 = 0: X2 = a * Cos(2 * pi / 5): Y2 = a * Sin(2 * pi / 5)
X3 = b: Y3 = 0
For n = 1 To 8
Line (X1 + xc, Y1 + yc)-(X2 + xc, Y2 + yc)
```

```

Line (X2 + xc, Y2 + yc)-(X3 + xc, Y3 + yc)
Line (X3 + xc, Y3 + yc)-(X1 + xc, Y1 + yc)
x4 = (X2 + fi * X1) / (1 + fi); y4 = (Y2 + fi * Y1) / (1 + fi)
X2 = X3; Y2 = Y3; X3 = X1; Y3 = Y1; X1 = x4; Y1 = y4
Next n
End Sub

```

§ 4. Модели правильных многоугольников

а) Построение правильного треугольника.

Из прямоугольника можно построить правильный треугольник следующим образом.

Строим ось симметрии s прямоугольника (рис. 1), совмещая параллельные края полосы и разворачивая половины полосы (рис. 5).

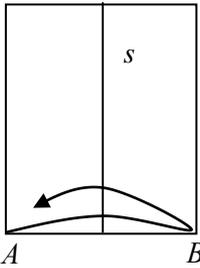


Рис. 1

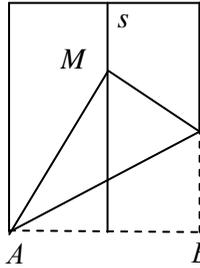


Рис. 2

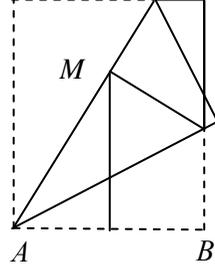


Рис. 3

Согнем прямоугольник так, чтобы точка B оказалась в точке M на оси s (рис. 2).

Согнем прямоугольник по прямой AM , чтобы зафиксировать эту линию (рис. 3).

В завершение согнем по линии BM , чтобы получить равносторонний треугольник ABM .

б) Построение правильного шестиугольника.

Повторяем этапы построения правильного треугольника ABM и пусть $ABCD$ — прямоугольник, описанный около треугольника ABM (рис. 4). Строим перегибанием вдоль оси симметрии s , l прямоугольника.

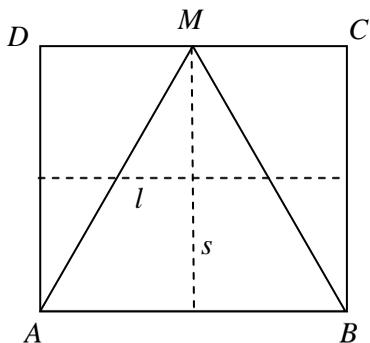


Рис. 4

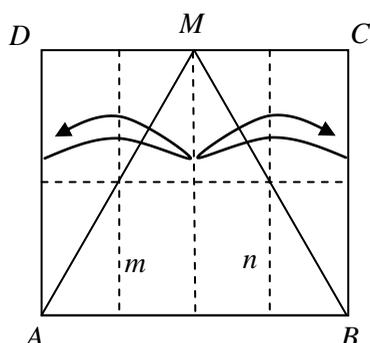


Рис. 5

Строим перегибанием прямые m и n , которые пройдут через середины сторон AM и BM (рис. 5).

По пунктирным линиям перегнем треугольники (рис. 6).

Получим правильный шестиугольник (рис. 7).

В [19, с. 305] приведен другой способ построения шестиугольника — совмещением вершин правильного треугольника с центром этого треугольника.

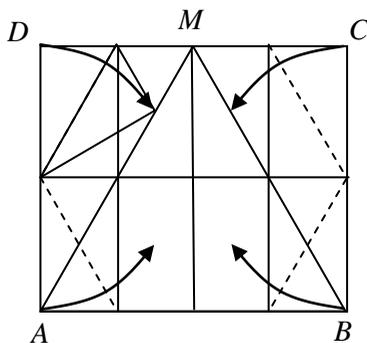


Рис. 6

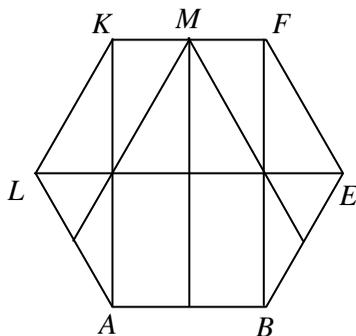


Рис. 7

в) Шестиугольник из одной полосы бумаги.

Пусть полоса имеет параллельные края a и b и ровный торец AB , перпендикулярный прямой a (рис. 8). Проведем срединный перпендикуляр к отрезку AB , сгибая и разгибая полосу пополам. Перегнем полосу по линии AC так, чтоб точка B оказалась

на серединном перпендикуляре t . Треугольник ABD — равносторонний и $\angle BAC = 30^\circ$.

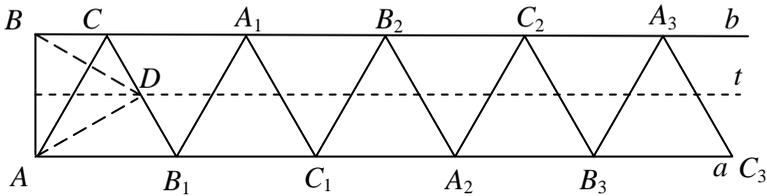


Рис. 8

Перегибая полосу по перпендикуляру к краю a , проходящему через точку C , получим равносторонний треугольник ACB_1 . Действуя аналогично далее, получим точки на краях полосы:

$A_1, C_1, B_2, A_2, C_2, B_3, A_3, C_3$.

Отрежем полосу по линиям AC, A_3C_3 и получим трапецию AC_3A_3C . Сложим трапецию согласно рис. 9 и получим правильный шестиугольник.

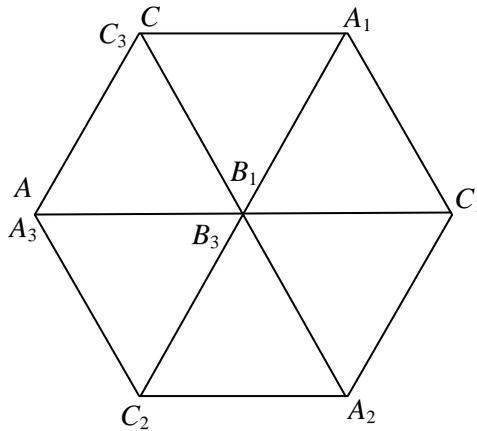


Рис. 9

§ 5. Модели многогранников

а) Куб из трех полос.

Подготовим три полосы разных цветов (белую, красную и синюю), на которых отмечены по 5 равных квадратов. Укажем на каждой полосе нумерацию квадратов в порядке их расположения (рис. 1).



Рис. 1

Сложим из белой полосы цилиндрическую поверхность так, чтобы первый и пятый квадраты совпали (рис. 2). Сверху и снизу получились две дырки в поверхности.

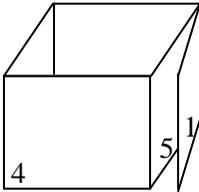


Рис. 2

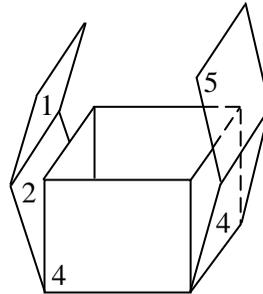


Рис. 3

Первый и пятый квадрат белой полосы нужно прижать следующей полосой.

Обернем полученную поверхность черной полосой так, чтобы дыры белой полосы были закрыты (рис. 2).

Первый и пятый квадрат черной полосы нужно тоже прижать следующей полосой.

Синюю полосу пропустим в щель между белой и черной полосой так, чтобы третий квадрат синей полосы оказался закрытым. Концевые квадраты синей полосы также направим в щели.

Проверьте, все ли цвета на поверхности образовавшегося куба представлены поровну?

б) Тетраэдр из двух полос.

Согните и разогните две полосы бумаги разной окраски по линиям так, чтобы образовались правильные треугольники (рис. 4).



Рис. 4

Наложим одну полосу на другую, чтобы совместились два треугольника (рис. 5).

Из светлой полосы сложим тетраэдр, а закрашенной полосой обернем две грани получившегося тетраэдра, и последний треугольник вставим в образовавшуюся щель между светлыми треугольниками. Все цвета на поверхности тетраэдра представлены поровну.

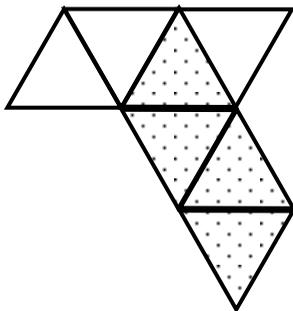


Рис. 5

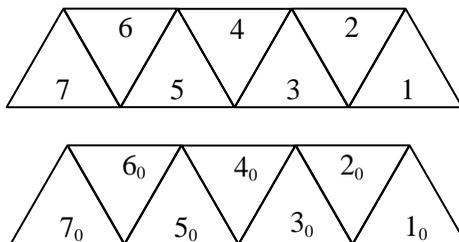


Рис. 6

в) Октаэдр из четырех полос.

Подготовим 4 полосы разных цветов с разбиениями на треугольники.

Согните и разогните полосы бумаги по линиям так, чтобы образовались правильные треугольники (рис. 6).

Начнем плетение двух полос. Работа с другой парой будет потом проводиться аналогично.

Наложим одну полосу на другую, чтобы совместились два треугольника 1 и 1₀, скрепим их с помощью обычной канцелярской скрепки (рис. 7).

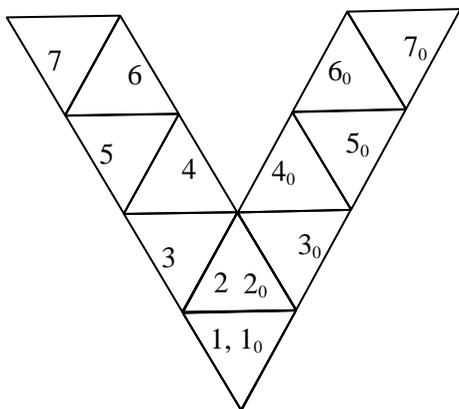


Рис. 7

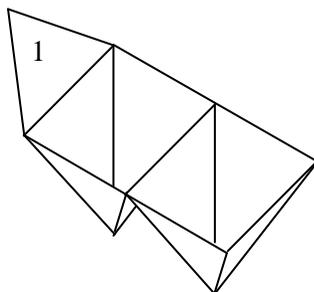


Рис. 8

Совмещая треугольники 4 и 4₀, 7 и 7₀, получим фигуру, похожую на разрезанный октаэдр, когда его половинки откинута в стороны как крышки (рис. 8).

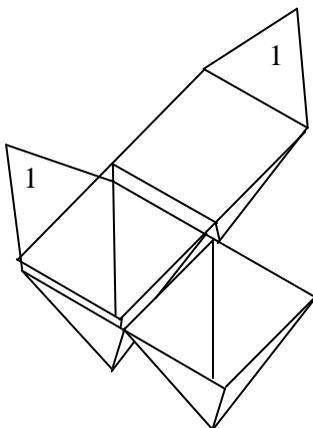


Рис. 9

Вставляя одну заготовку во вторую (рис. 9) и поворачивая крышки, получим модель октаэдра.

Как следует накладывать одну полосу на другую, чтобы получить различные сочетания цветов на гранях?

г) Быстрая модель правильного додекаэдра.

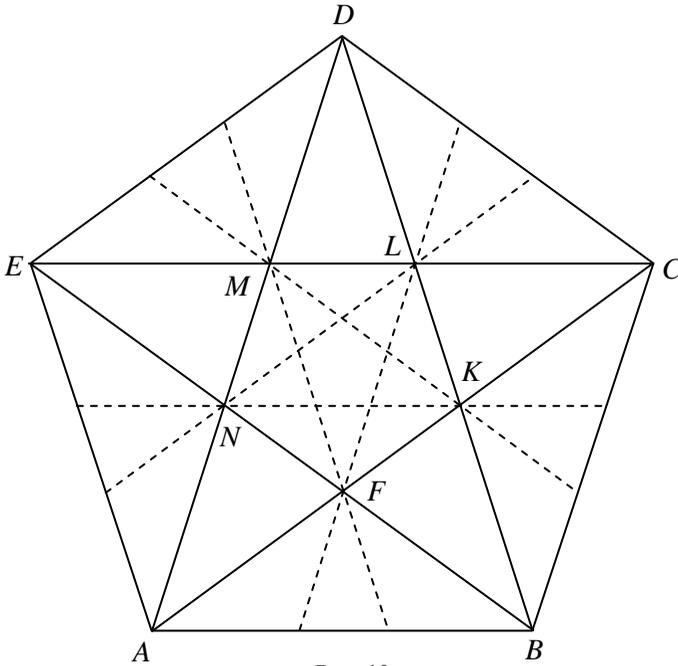


Рис. 10

Построим на картоне модель правильного пятиугольника $ABCDE$. Проведем диагонали пятиугольника AC, BD, CE, DA, EB (рис. 10). При пересечении диагоналей получим правильный пятиугольник $FKLMN$. Построим прямые, содержащие диагонали пятиугольника $FKLMN$ со сторонами первоначального пятиугольника.

Вырежем вначале пятиугольник $ABCDE$, а затем пять маленьких треугольников (рис. 11).

Получим правильный пятиугольник $FKLMN$, на сторонах которого построены пять равных пятиугольников. По сторонам пятиугольника $FKLMN$ сделаем небольшие надрезы на картоне, чтобы развертка легко сгибалась по этим отрезкам.

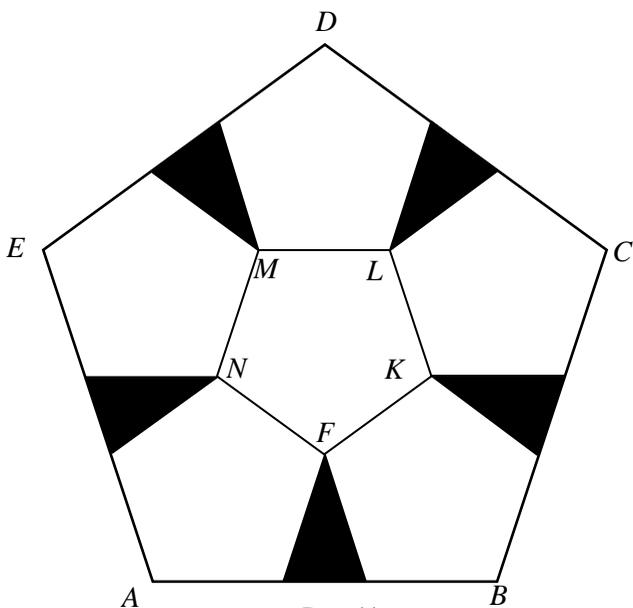


Рис. 11

Изготовим вторую такую же развертку. Наложим вторую развертку на первую так, чтобы их центры совпали, а выступы одной развертки оказались напротив вырезов другой развертки (рис. 12).

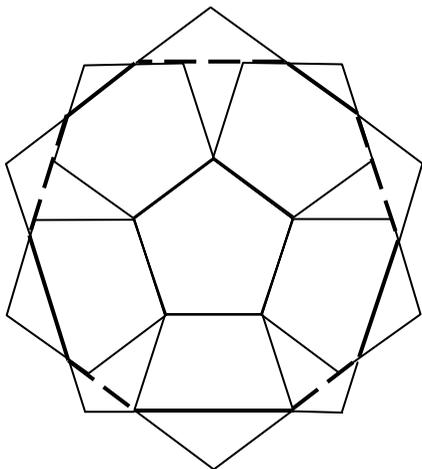


Рис. 12

Придерживая обе развертки, скрепим их круговой резинкой, пропуская ее попеременно то над выступающим концом одной развертки, то под выступающим концом другой. Отпустив руку, мы увидим, как резинка стягивает обе развертки и возникает модель додекаэдра.

Рассмотрим изготовление правильных многогранников из кругов с прорезью.

д) Октаэдр из кругов с прорезью.

Используя циркуль, построим окружность, разделим ее на 6 равных частей. Соединяя точки через одну, получим правильный треугольник ABC . Разделим стороны треугольника пополам точками A_1, B_1, C_1 (рис. 13). Вырежем окружность. Ножницами сделаем прорезы по отрезкам AB_1, CA_1, BC_1 . На непрорезанных отрезках CB_1, AC_1, BA_1 сделаем по лицевой стороне неглубокие надрезы, чтобы по этим отрезкам модель легко сгибалась.

Изготовим семь копий этой заготовки. Для быстрого изготовления таких заготовок можно с помощью иголки переколоть центр окружности, вершины треугольника и середины его сторон на стопку чистых листов, а затем провести окружность и соединить вершины по линейке.

Вставим одну заготовку в прорезь другой заготовки, чтобы лишние части окружности оказались внутри модели (рис. 14). Самое сложное действие — закрепить последнюю грань — и октаэдр готов.

По аналогичному принципу можно получить правильный додекаэдр, построив двенадцать заготовок, состоящих из окружности, правильного вписанного пятиугольника и прорезей вдоль каждой из сторон на величину, равную половине стороны.

е) Модель тетраэдра без клея.

Перегните модель (рис. 15) вдоль всех ребер в одну сторону и сложите тетраэдр [8, с. 39]. Последний треугольник введите в щель, образованную другими треугольниками.

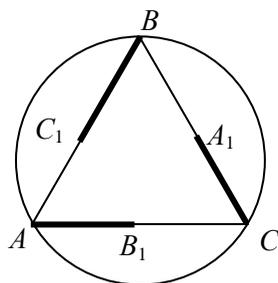


Рис. 13

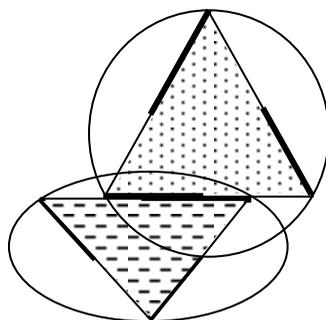


Рис. 14

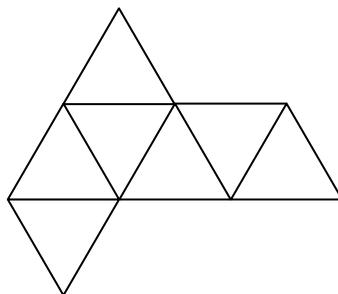


Рис. 15

ж) Вращающееся кольцо тетраэдров.

На листе плотного картона разметим фигуру, состоящую из 40 правильных треугольников и клапанов для соединения (рис. 16).

Вырежем фигуру и сделаем сгибы по внутренним линиям: по штриховым линиям вниз, а по линиям, изображенным пунктир-точками, вверх. Приклеим клапаны в соответствии с обозначениями. Получим кольцо из десяти тетраэдров, причем внутри можно наблюдать отверстие в виде звезды. Это кольцо тетраэдров может выворачиваться как кольцо дыма, когда оно поднимается вверх.

Изготовьте аналогично кольца из n тетраэдров, где $n = 6, 8, 22$. При $n \geq 22$ на кольца могут образоваться узлы [5, с. 168].

Обращаем внимание на то, что вращающееся кольцо тетраэдров не является многогранником, т.к. любые две внутренние точки из различных тетраэдров нельзя соединить ломаной, целиком состоящей из внутренних точек.

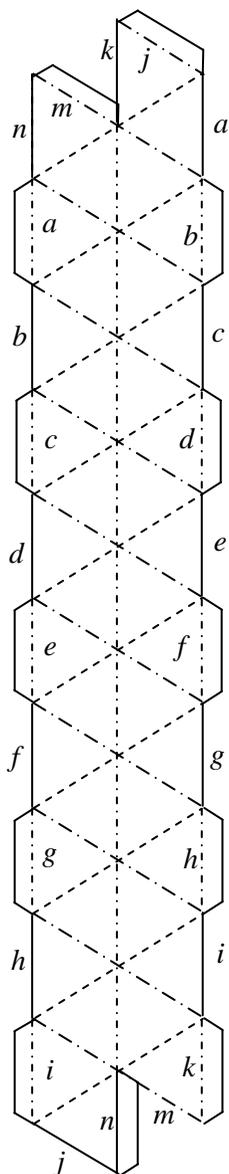


Рис. 16

§ 6. Метрические задачи на развертке тетраэдра

а) Построение развертки тетраэдра.

Из любого тетраэдра $ABCD$ (рис. 1) разворотом боковых граней в плоскость основания ABC можно получить развертку $AD_3BD_1CD_2$, состоящую из четырех треугольников и удовлетворяющую условию склейки: $AD_3 = AD_2$, $BD_3 = BD_1$, $CD_1 = CD_2$ (рис. 1).

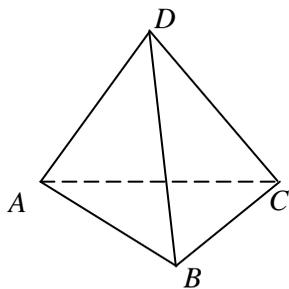


Рис. 1

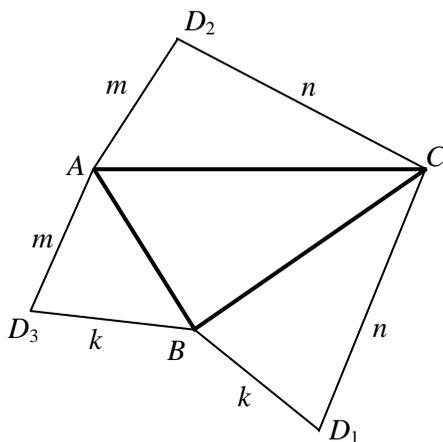


Рис. 2

Из полученной развертки $AD_3BD_1CD_2$ в обратном порядке можно восстановить тетраэдр.

Если в произвольном остроугольном треугольнике провести средние линии (рис. 3), то можно быстро получить развертку тетраэдра. Тетраэдр называется равногранным, т.к. все его четыре грани равны между собой.

Однако существуют фигуры (рис. 4), состоящие из четырех треугольников и удовлетворяющие условию склейки, из которых невозможно образовать тетраэдр. При повороте

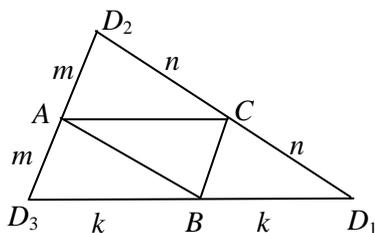


Рис. 3

треугольника ACD_2 вокруг прямой AC точка D_2 движется по окружности в плоскости, перпендикулярной прямой AC . Построим треугольник ACN , симметричный треугольнику ACD_2 относительно прямой AC .

Проекция точки D_2 на плоскость ABC движется по отрезку D_2N , перпендикулярному прямой AC . На рис. 4 проекции этой точки изображены жирным пунктирным отрезком D_2N .

При повороте трех треугольников ACD_2 , ABD_3 , BCD_1 и образовании тетраэдра необходимо, чтобы три точки D_2, D_3, D_1 заняли положение вершины D тетраэдра, поэтому три отрезка, выходящие из точек D_2, D_3, D_1 и перпендикулярные, соответственно, сторонам AC, AB, BC , должны пересекаться. Точка пересечения этих отрезков является проекцией вершины D на плоскость основания ABC .

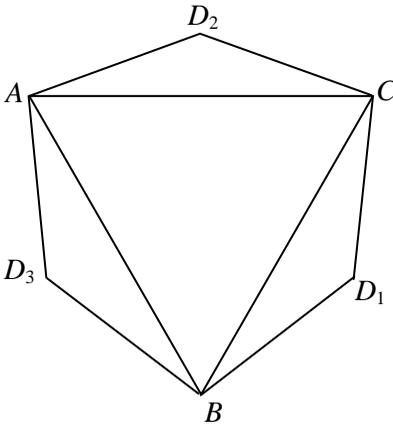


Рис. 4

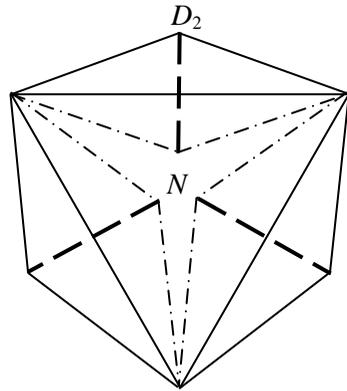


Рис. 5

Из рис. 6 становится понятным, что, проведя средние линии в тупоугольном треугольнике, невозможно построить тетраэдр, хотя в этой фигуре выполняется условие склейки.

Проведя средние линии в прямоугольном треугольнике, получим развертку, из которой получается дважды накрытый прямоугольник вместо тетраэдра.

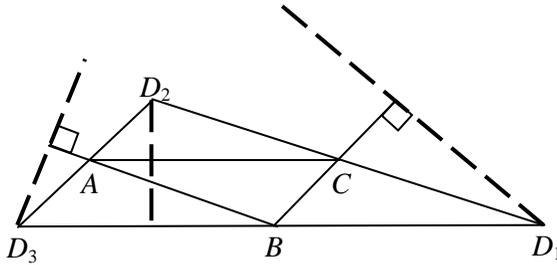


Рис. 6

Рассмотрим геометрические построения, которые гарантируют построение развертки, из которой действительно можно сконструировать тетраэдр.

1. Построим произвольный треугольник ABC (рис. 7).

2. Отметим произвольную точку H на плоскости ABC .

3. Из точки H проведем лучи l_C, l_A, l_B , перпендикулярные, соответственно, прямым AB, BC, CA .

4. На луче l_B в полуплоскости с границей AC , которая не содержит точку B , отметим точку D_2 , чтобы выполнялось условие $AD_2 > AH$. Строим отрезки AD_2 и CD_2 . Для отрезка выполняется условие $CD_2 > CH$.

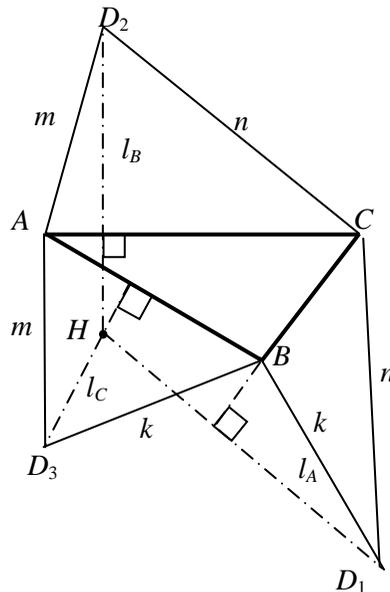


Рис. 7

5. На луче l_C в полуплоскости с границей AB , которая не содержит точку C , отметим точку D_3 , чтобы выполнялось условие $AD_3 = AD_2$. Такая точка всегда существует, т.к. окружность $\omega(A, AD_2)$ пересекает любую прямую, проходящую через точку H в силу ранее наложенного условия $AD_2 > AH$.

6. Построим отрезок BD_3 .

7. На луче l_A в полуплоскости с границей BC , которая не содержит точку A , отметим точку D_1 , чтобы выполнялось условие $CD_1 = CD_2$. Такая точка всегда существует, т.к. окружность $\omega(C, CD_2)$ пересекает любую прямую, проходящую через точку H в силу условия $CD_2 > CH$.

8. Построим отрезок BD_1 .

9. Получили развертку $AD_3BD_1CD_2$.

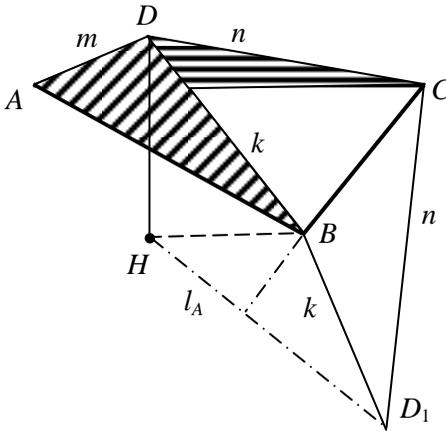


Рис. 8

Получим тетраэдр без грани $B CD$, причем вершина D фигуры проектируется в точку H (рис. 8). Существует два поворота вокруг прямой BC , переводящих плоскость $B CD$ в плоскость $A BC$. Выберем тот поворот, при котором образ точки D и точка A расположены по разные стороны относительно

Для доказательства того, что построена развертка, достаточно проверить только одно равенство $BD_1 = BD_3$, т.к. выполнение равенств $AD_3 = AD_2$ и $CD_1 = CD_2$ обеспечено построением.

Пусть выполнены семь первых шагов указанного построения развертки. Из трех треугольников $A BC$, $A CD_2$, $A BD_3$ начинаем конструировать тетраэдр.

прямой BC . Образ точки D расположен на луче l_A , следовательно, точка D отображается в точку D_1 , поэтому $BD_1 = BD = BD_3$.

1.22. Проверьте, что из модели, представленной на рис. 9, можно построить тетраэдр. Какое максимальное число прямоугольных треугольников может содержать тетраэдр?

б) Построение медианы тетраэдра на развертке тетраэдра.

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центром тяжести противолежащей грани, называется медианой тетраэдра, выходящей из этой вершины. Медиана тетраэдра соединяет вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани (рис. 10).

Пример 1. Дана развертка $BD_1CD_2AD_3$ тетраэдра $ABCD$ с основанием ABC . Требуется построить отрезок, равный медиане тетраэдра, проведенной из вершины A .

Решение задачи на построение иногда проводят по двухэтапной схеме, выделяя анализ задачи и построение.

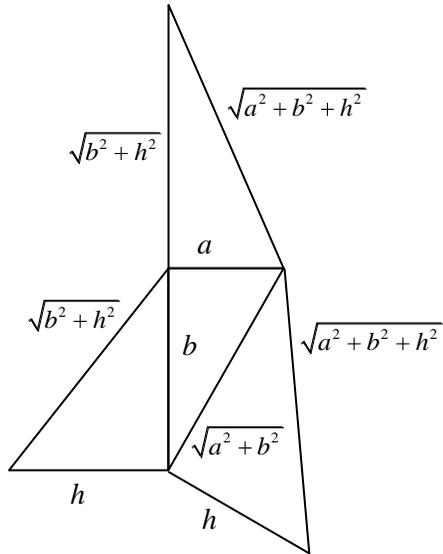


Рис. 9

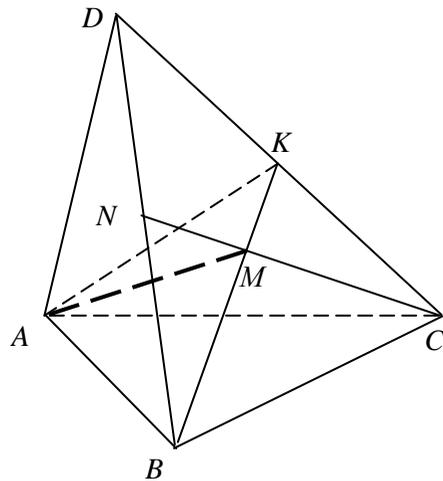


Рис. 10

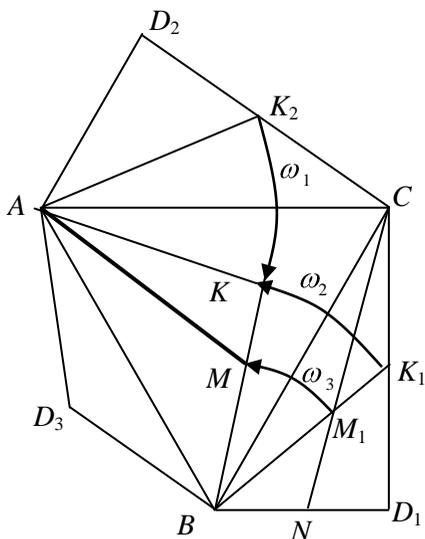


Рис. 11

- 4) $\omega_2(B, BK_1)$;
- 5) $K \in \omega_1 \cap \omega_2$;
- 6) $BN = ND_1$;
- 7) $M_1 = BK_1 \cap CN$;
- 8) $\omega_3(B, BM_1)$;
- 9) $M \in BK \cap \omega_3$;
- 10) AM — искомый отрезок.

Медианы тетраэдра из вершин B, C строятся аналогично. Как на данной развертке построить отрезок, равный медиане, выходящей из вершины D тетраэдра?

в) Построение бимедианы тетраэдра на развертке тетраэдра.

Бимедианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер тетраэдра (рис. 12).

I. Анализ. Пусть задача решена. Проведем краткий анализ задачи на тетраэдре. Если AM — медиана тетраэдра, то BK — медиана треугольника BCD , AK — медиана треугольника ACD . Можно построить треугольник, равный треугольнику ABK по трем элементам, а значит, можно построить и отрезок AM .

II. Построение (рис. 11).

- 1) $D_2K_2 = K_2C$;
- 2) $\omega_1(A, AK_2)$ — окружность с центром A и радиусом AK_2 ;
- 3) $D_1K_1 = K_1C$;

Пример 2. Дана развертка $BD_1CD_2AD_3$ тетраэдра $ABCD$. Требуется построить отрезок, равный медиане тетраэдра, соединяющей середины противоположных ребер AB и CD .

I. Анализ. Можно построить треугольник, равный треугольнику ABK по трем элементам, а значит, можно построить и медиану MK , являющуюся бимедианой тетраэдра.

II. Построение (рис. 13).

- 1) $D_2K_2 = K_2C$;
- 2) $\omega_1(A, AK_2)$;
- 3) $D_1K_1 = K_1C$;
- 4) $\omega_2(B, BK_1)$;
- 5) $K \in \omega_1 \cap \omega_2$;
- 6) $AM = MB$;
- 7) MK — искомый отрезок.

г) **Построение высоты тетраэдра на развертке тетраэдра.**

Пример 3. Дана развертка $BD_1CD_2AD_3$ тетраэдра $ABCD$. Требуется построить отрезок, равный высоте тетраэдра.

Отрезки AD_2 , CD_2 , CD_1 изображают в натуральную величину боковые ребра тетраэдра (рис. 14).

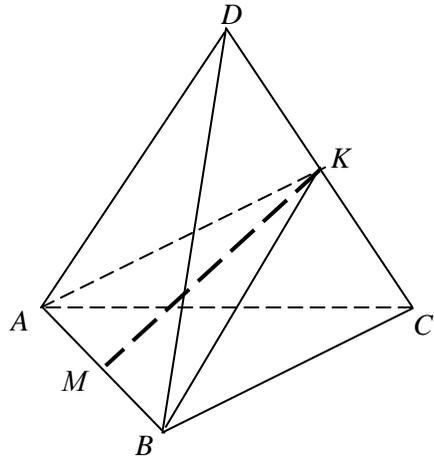


Рис. 12

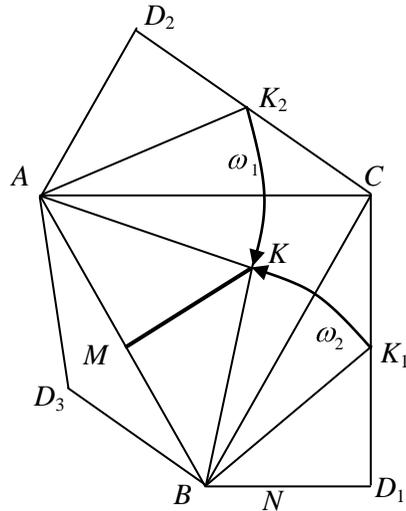


Рис. 13

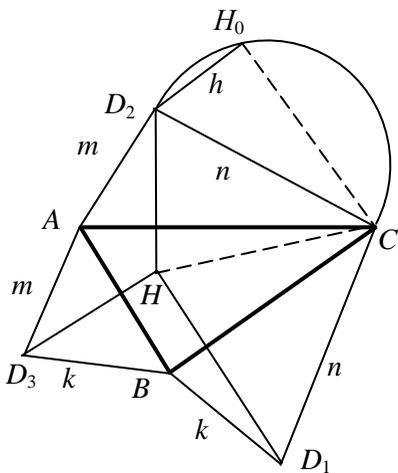


Рис. 14

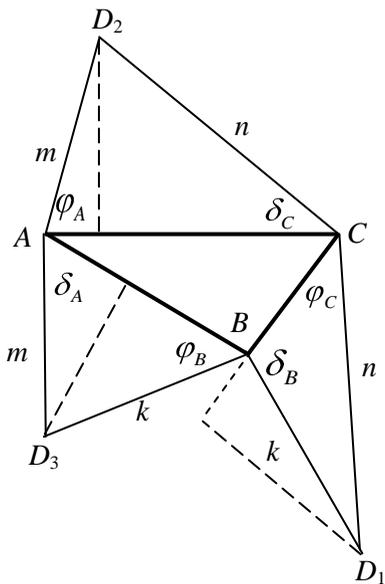


Рис. 15

ных треугольников (рис. 15) выполняются равенства $m \sin \varphi_A = n \sin \delta_C$, $n \sin \varphi_C = k \sin \delta_B$, $k \sin \varphi_B = m \sin \delta_A$.

Из точек D_1, D_2, D_3 опускаем перпендикуляры на стороны треугольника ABC и пусть H — точка их пересечения.

Отрезки AH, CH, BH в натуральную величину определяют проекции боковых ребер на плоскость основания.

Построим полуокружность с диаметром CD_2 .

Построим отрезок CH_0 , равный отрезку CH , тогда отрезок D_2H_0 равен высоте тетраэдра.

раэдра.

Рассмотрим свойство развертки тетраэдра.

Обозначим $\angle ACD_2 = \delta_C$, $\angle CBD_1 = \delta_B$, $\angle BAD_3 = \delta_A$, $\angle CAD_2 = \varphi_A$, $\angle BCD_1 = \varphi_C$, $\angle ABD_3 = \varphi_B$.

Теорема 1. Для любой развертки тетраэдра выполняется равенство

$$\begin{aligned} \sin \varphi_A \sin \varphi_B \sin \varphi_C &= \\ &= \sin \delta_A \sin \delta_B \sin \delta_C \end{aligned}$$

Доказательство. Опустим из вершин D_1, D_2, D_3 перпендикуляры на стороны треугольника ABC , тогда для образовавшихся прямоуголь-

Перемножая эти равенства, получаем

$$\sin \varphi_A \sin \varphi_B \sin \varphi_C = \sin \delta_A \sin \delta_B \sin \delta_C. \blacksquare$$

Кривизна вершины многогранника равна разности между числом 2π и суммой величин всех плоских углов в этой вершине.

Кривизна трех вершин тетраэдра просто интерпретируется на развертке тетраэдра.

Для вершин A, B, C на рис. 16 соответствующие кривизны K_A, K_B, K_C этих вершин равны величинам внешних углов развертки.

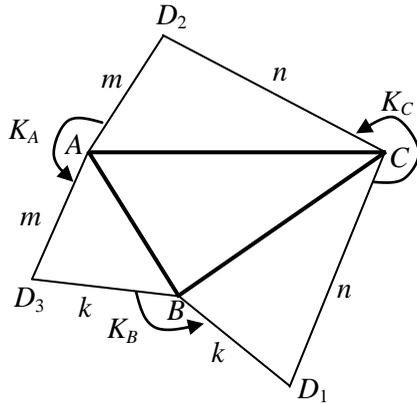


Рис. 16

Для равногранного тетраэдра кривизны всех вершин тетраэдра равны π .

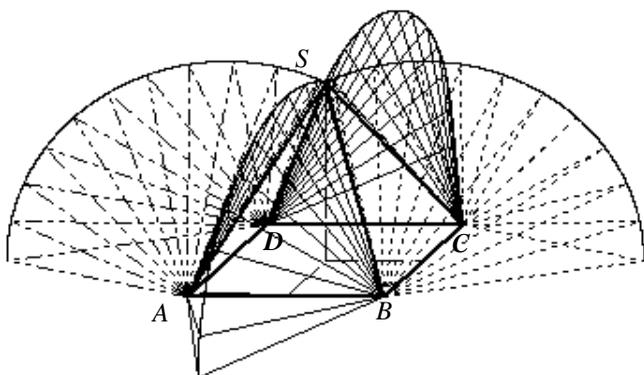
Справедливо и обратное утверждение о существовании тетраэдра с данными кривизнами.

Теорема 2. Пусть ABC — произвольный остроугольный треугольник в пространстве, тогда существуют два тетраэдра с гранью ABC (один получается из другого симметрией относительно плоскости ABC), кривизны всех вершин которых равны π .

Доказательство. Пусть $AD_3BD_1CD_2$ — развертка тетраэдра. Из условия $K_A = \pi, K_B = \pi, K_C = \pi$ получаем, что в точках A, B, C соответствующие пары соседних отрезков AD_3 и AD_2 , CD_2 и CD_1 , BD_1 и BD_3 являются коллинеарными. Из условия склейки развертки следует, что отрезки в каждой паре равны. Следовательно, точки A, B, C являются серединами сторон треугольника $D_1D_2D_3$. Треугольник $D_1D_2D_3$ единственным образом восстанавливается по данным точкам A, B, C , т.е. по серединам своих сторон. Из данной развертки можно образовать два тетраэдра, построив один из них в одном полупространстве с границей ABC , а другой тетраэдр — в другом полупространстве. \blacksquare

Глава 2

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ ИЗ РАЗВЕРТКИ



Что нас ожидает в этой главе?

1. Методы моделирования поворота грани тетраэдра вокруг ребра.
2. Синхронизация поворотов граней тетраэдра.
3. Расширение класса моделируемых фигур переходом от тетраэдров к призме и антипризме.

§ 7. Ортоцентрический тетраэдр

В учебниках по геометрии для классов с углубленным изучением математики представлены развертки многогранников. Этот материал предназначен для развития пространственного представления учащихся. Представляет интерес показать на экране компьютера трансформацию тетраэдра в развертку и, наоборот, переход от развертки к тетраэдру. Визуализация этого преобразования позволит соединить две статические фигуры: тетраэдр и развертку. Моделирование этого преобразования и написание программы для компьютера является интегративным действием, требующим соединения математического и компьютерного моделирования. Переход от одной фигуры к другой создает основу нового направления применения компьютера для демонстрации трансформации фигур.

В любом треугольнике три медианы пересекаются в одной точке, три биссектрисы также пересекаются в одной точке, но три высоты уже не пересекутся, если треугольник является тупоугольным. Получившуюся ситуацию можно исправить, если вместо высот рассмотреть прямые, содержащие высоты. Они пересекаются в одной точке для любого треугольника.

Для аналогичной фигуры в пространстве, т.е. тетраэдра, прямые, содержащие высоты тетраэдра, не всегда пересекаются. На рис. 1 изображен прямоугольный треугольник ABC и отрезок AD , перпендикулярный плоскости ABC . В тетраэдре $ABCD$ высота DA к плоскости основания и высота BC к боковой грани ACD расположены на скрещивающихся прямых, которые не пересекаются.

Среди тетраэдров можно выделить класс тетраэдров, высоты которых пересекаются в одной точке. Такие тетраэдры называются ортоцентрическими.

Для того, чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимы и достаточны следующие условия:

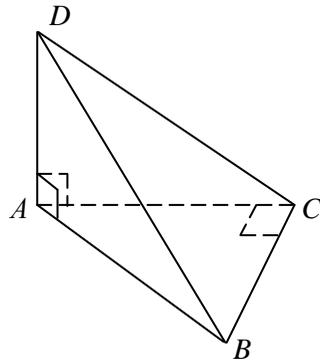


Рис. 1

- а) противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны;
- б) одна из высот тетраэдра проходит через точку пересечения высот основания [14. с. 80—82].

Разработаем математическое и компьютерное моделирование процесса восстановления ортоцентрического тетраэдра из развертки.

Вначале развернем грани тетраэдра в плоскость основания. Получим четыре треугольника, три из которых прилегают к сторонам основания.

Поставленная цель о восстановлении тетраэдра распадается на две большие задачи:

- А) Разработать математическую модель развертки ортоцентрического тетраэдра;
- Б) Разработать математическую и компьютерную модели трансформации развертки в пространственную фигуру — ортоцентрический тетраэдр.

Вид развертки ортоцентрического тетраэдра известен [19, с. 317]. Далее будем рассматривать построения для остроугольного треугольника ABC (рис. 2).

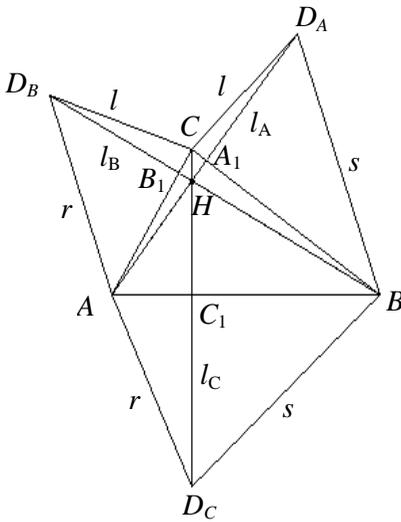


Рис. 2

В произвольном треугольнике ABC проводим высоты треугольника AA_1 , BB_1 , CC_1 , отмечаем ортоцентр H . На продолжении одной из высот, например AA_1 , отмечаем произвольную точку D_A , удовлетворяющую условию $A_1D_A > A_1H$.

На продолжении высоты BB_1 отмечаем точку D_B , удовлетворяющую условию $CD_B = CD_A$.

На продолжении высоты CC_1 отмечаем точку D_C , удовлетворяющую условию $AD_C = AD_B$. Построенная точка D_C удовлетворяет условию $BD_C = BD_A$.

Все эти факты известны в элементарной математике. Нашей задачей является моделирование этой фигуры в зависимости от минимального количества введенных параметров.

Отметим, что вид развертки зависит от выбора треугольника ABC и от выбора точки D_A .

Треугольник определяется геометрически тремя параметрами, а для определения положения точки D_A на прямой AA_1 можно указать один параметр — длину отрезка CD_A или длину отрезка A_1D_A .

Поставленную задачу о моделировании развертки можно разбить на три более простых подзадачи:

А₁) Разработать математическую модель произвольного треугольника ABC с высотами.

А₂) Разработать математическую модель развертки для выбранного треугольника ABC в основании.

А₃) Разработать компьютерную модель построения развертки ортоцентрического тетраэдра на плоскости.

Задача Б) о моделировании динамики модели предполагает использование пространственной системы координат. Эта задача в свою очередь разбивается на две подзадачи.

Б₁) Разработать математическую модель процесса вращения трех треугольников до положения боковых граней тетраэдра, т.е. необходимо $\triangle ABD_C$ повернуть вокруг прямой AB , $\triangle BCD_A$ повернуть вокруг прямой BC , $\triangle ACD_B$ повернуть вокруг прямой AC .

Б₂) Разработать компьютерную программу процесса восстановления ортоцентрического тетраэдра.

Построение пространственной модели на экране компьютера осуществляется с определенными искажениями длин отрезков и углов. Чтобы быть уверенными в том, что данный тип тетраэдра правильно смоделирован с учетом наложенных ограничений и изображен в пространстве, необходимо решить задачи А₁, А₂, А₃ и протестировать компьютерную программу для различных значений параметров.

Рассмотрим различные способы математического и компьютерного моделирования треугольника и его высот.

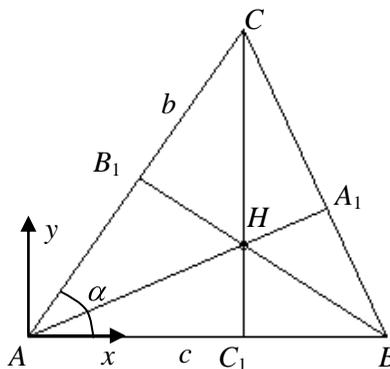


Рис. 3

Первый способ (аналитический).

Пусть начало системы координат находится в вершине A , а ось x направлена вдоль луча $[AB]$ (рис. 3). Пусть в треугольнике заданы длины стороны $AB = c$, $AC = b$ и угол между ними $\angle BAC = \alpha$. Покажем, что все высоты треугольника и ортоцентр определяются относительно выбранных параметров b, c, α .

$$A(0;0), C(b\cos\alpha; b\sin\alpha), C_1(b\cos\alpha; 0), B(c;0), AC: y = \operatorname{tg} \alpha x.$$

Прямая BH перпендикулярна прямой AC , поэтому угловой коэффициент прямой BH равен $-\operatorname{ctg} \alpha$. Используя уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$ с угловым коэффициентом, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, получаем

$$BB_1: y = -\operatorname{ctg} \alpha (x - c).$$

Из уравнений прямых BH и AC находим координаты основания высоты треугольника, проведенной из вершины B , т.е.

$$B_1 \quad c \cos^2 \alpha; c \cos \alpha \sin \alpha.$$

Используя уравнение прямой $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, получаем

$$BC: y = \frac{b \sin \alpha}{b \cos \alpha - c} (x - c).$$

Прямая AH перпендикулярна прямой BC , поэтому

$$AH: y = \frac{c - b \cos \alpha}{b \sin \alpha} x.$$

Ортоцентр H и вершина C треугольника имеют одинаковые абсциссы. Подставляя значение абсциссы в уравнение прямой AH , получим ординату ортоцентра, поэтому

$$H(b \cos \alpha; (c - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha).$$

Из уравнений прямых AH и BC находим координаты основания высоты треугольника, проведенной из вершины A , т.е.

$$A_1 \left(\frac{cb^2 \sin^2 \alpha}{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}; \frac{cb(c - b \cos \alpha) \sin \alpha}{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} \right).$$

Программа «**Ортоцентр в треугольнике с углом**» построения треугольника, ортоцентра треугольника и высот треугольника по заданным параметрам b, c, a треугольника с высотами имеет вид:

```
Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
x0 = 2000: y0 = 2000: b = 3000: c = 4000: al = 20: al = al * 4 * Atn(1) / 180
xa = 0: ya = 0: xb = c: yb = 0: xc = b * Cos(al): yc = b * Sin(al)
xh = b * Cos(al): yh = (c - b * Cos(al)) * Cos(al) / Sin(al)
a0 = b ^ 2 + c ^ 2 - 2 * b * c * Cos(al)
xa1 = c * b ^ 2 * (Sin(al)) ^ 2 / a0: ya1 = c * b * (c - b * Cos(al)) * Sin(al) / a0:
xb1 = c * (Cos(al)) ^ 2: yb1 = c * Cos(al) * Sin(al): xc1 = b * Cos(al): yc1 = 0
Line (xa + x0, ya + y0)-(xa1 + x0, ya1 + y0)
Line (xb + x0, yb + y0)-(xb1 + x0, yb1 + y0)
Line (xc + x0, yc + y0)-(xc1 + x0, yc1 + y0)
Line (xa + x0, ya + y0)-(xh + x0, yh + y0)
Line (xb + x0, yb + y0)-(xh + x0, yh + y0)
Line (xc + x0, yc + y0)-(xh + x0, yh + y0)
Circle (xh + x0, yh + y0), 30
DrawWidth = 2
Line (xa + x0, ya + y0)-(xb + x0, yb + y0): Line (xb + x0, yb + y0)-(xc + x0, yc + y0)
Line (xc + x0, yc + y0)-(xa + x0, ya + y0)
End Sub
```

Второй способ (решение средствами элементарной геометрии).

$$AB_1 = AB \cos \alpha, x_{B_1} = AB_1 \cos \alpha, y_{B_1} = AB_1 \sin \alpha,$$

$$x_{B_1} = c \cos^2 \alpha, y_{B_1} = c \cos \alpha \sin \alpha.$$

Обозначим $\angle ABC = \beta$, тогда $BA_1 = AB \cos \beta$,

$$\overline{BA_1} = (-BA_1 \cos \beta; BA_1 \sin \beta), \overline{BA_1} = (-c \cos^2 \beta; c \cos \beta \sin \beta),$$

$$\overline{BA_1} = (c \sin^2 \beta - c; c \cos \beta \sin \beta),$$

$$\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{BA_1}, A_1(c \sin^2 \beta; c \cos \beta \sin \beta),$$

$$\sin \beta = \frac{CC_1}{CB} = \frac{AC \sin \alpha}{a} = \frac{b \sin \alpha}{a}, \cos \beta = \frac{BC}{BC} = \frac{c - b \cos \alpha}{a}.$$

Следовательно, $A_1 \left(\frac{cb^2 \sin^2 \alpha}{a^2}; \frac{cb(c - b \cos \alpha) \sin \alpha}{a^2} \right)$.

$\angle ABB_1 = 90^\circ - \alpha$, $CH = CB \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$, $CH = (c - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$,
 $H(b \cos \alpha; (c - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha)$.

Компьютерная программа остается прежней.

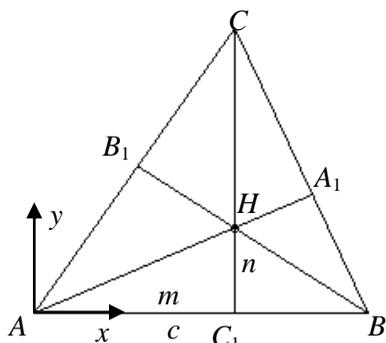


Рис. 4

Рассмотрим третий способ моделирования, в котором основное внимание сосредоточено на ортоцентре треугольника.

Пусть начало системы координат находится в вершине A , а ось x направлена вдоль луча $[AB)$. Пусть длина стороны AB равна c , и известны координаты ортоцентра в выбранной системе координат, т.е. $H(m; n)$ (рис. 4).

Покажем, что все остальные

элементы треугольника определяются относительно выбранных параметров c, m, n .

$$A(0;0), \quad C_1(m;0), \quad B(c;0), \quad AH : y = \frac{n}{m}x.$$

Прямая BC перпендикулярна прямой AH , поэтому угловой коэффициент BC равен $-m/n$. Используя уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$ с угловым коэффициентом, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, получаем

$$BC : y = -\frac{m}{n}(x - c).$$

Используя уравнение прямой $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, получаем

$$BH : y = \frac{n}{m - c}(x - c).$$

Прямая AC перпендикулярна прямой BH , поэтому

$$AC: y = \frac{c-m}{n}x.$$

Используя уравнения прямых AC и BC , найдем координаты третьей вершины

$$C\left(m; \frac{c-m}{n}m\right).$$

Из уравнений прямых AH и BC находим координаты основания высоты треугольника, проведенной из вершины A , т.е.

$$A_1\left(\frac{m^2c}{m^2+n^2}; \frac{mnc}{m^2+n^2}\right).$$

Из уравнений прямых BH и AC находим координаты основания высоты треугольника, проведенной из вершины B , т.е.

$$B_1\left(\frac{n^2c}{(c-m)^2+n^2}; \frac{(c-m)nc}{(c-m)^2+n^2}\right).$$

Программа «**Ортоцентр треугольника**» построения треугольника и высот треугольника по заданным параметрам c, m, n имеет вид:

```
Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
x0 = 2000: y0 = 2000: c = 3000: m = 800: n = 600
xa = 0: ya = 0: xb = c: yb = 0: xh = m: yh = n: xc = m: yc = m * (c - m) / n
xa1 = m ^ 2 * c / (m ^ 2 + n ^ 2): ya1 = m * n * c / (m ^ 2 + n ^ 2)
xb1 = n ^ 2 * c / (n ^ 2 + (c - m) ^ 2)
yb1 = n * c * (c - m) / (n ^ 2 + (c - m) ^ 2)
xc1 = m: yc1 = 0
Line (xa + x0, ya + y0)-(xb + x0, yb + y0): Line (xb + x0, yb + y0)-(xc + x0, yc + y0)
Line (xc + x0, yc + y0)-(xa + x0, ya + y0)
Line (xa + x0, ya + y0)-(xa1 + x0, ya1 + y0)
Line (xb + x0, yb + y0)-(xb1 + x0, yb1 + y0)
Line (xc + x0, yc + y0)-(xc1 + x0, yc1 + y0)
Circle (xh + x0, yh + y0), 30
End Sub
```

Отметим, что компьютерная программа построения треугольника, его ортоцентра и высот треугольника занимает значительно меньше места, чем математическое моделирование задачи.

Для компьютерного моделирования поворота треугольников до положения боковых граней необходимо выбрать наиболее удобное расположение системы координат. Пусть начало координат расположено в ортоцентре основания H . Пусть ось x параллельна лучу $[AB)$. Можно воспользоваться координатами вершин треугольника, ортоцентра и оснований высот, определенными в первом способе, и осуществить поправки координат, учитывая перенос системы координат на плоскости в точку H .

Рассмотрим новый, четвертый способ моделирования.

Пусть для развертки заданы следующие параметры: $AB = c$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $CD_A = l = CD_B$.

$$AC_1 = b \cos \alpha, C_1B = c - b \cos \alpha.$$

$$C_1H = AC_1 \operatorname{tg} \angle BAH = AC_1 \operatorname{ctg} \angle ABA_1 = AC_1 \frac{C_1B}{CC_1} = (c - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$A(-b \cos \alpha; (b \cos \alpha - c) \operatorname{ctg} \alpha), B(c - b \cos \alpha; (b \cos \alpha - c) \operatorname{ctg} \alpha),$$

$$H(0; 0), C_1(0, (b \cos \alpha - c) \operatorname{ctg} \alpha), AB_1 = c \cos \alpha, CB_1 = b - c \cos \alpha,$$

$$CH = \frac{CB_1}{\cos \angle HCB_1} = \frac{b - c \cos \alpha}{\sin \alpha}, C\left(0; \frac{b - c \cos \alpha}{\sin \alpha}\right).$$

Используя вывод координат точек A_1 и H и учитывая параллельный перенос системы в точку H , получаем

$$A_1\left(\frac{cb^2 \sin^2 \alpha}{a^2} - b \cos \alpha; \frac{cb(c - b \cos \alpha) \sin \alpha}{a^2} - (c - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha\right).$$

Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим $\angle ACB = \gamma$, тогда для компьютерного вычисления получаем

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{BB_1}{CB_1} = \operatorname{arctg} \frac{c \sin \alpha}{b - c \cos \alpha},$$

$$A_1\left(\frac{b^2 \sin^2 \gamma}{c} - b \cos \alpha; (c - b \cos \alpha) \left(\frac{b \sin \gamma}{a} - \operatorname{ctg} \alpha\right)\right),$$

$$B_1 \quad c \cos^2 \alpha - b \cos \alpha; c \cos \alpha \sin \alpha - (c - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha .$$

Определим координаты точки D_B .

Обозначим $B_1 D_B = l_B$, тогда

$$l_B = \sqrt{CD_B^2 - CB_1^2} = \sqrt{l^2 - a^2 \cos^2 \gamma},$$

$$D_B(x_{B_1} + l_B \cos(\alpha + 90^\circ); y_{B_1} + l_B \sin(\alpha + 90^\circ)),$$

$$D_B(x_{B_1} - l_B \sin \alpha; y_{B_1} + l_B \cos \alpha).$$

Определим координаты точки D_A .

$$BB_1 = c \cos \alpha, CA_1 = b \cos \gamma, BA_1 = a - b \cos \gamma, AA_1 = b \sin \gamma.$$

Обозначим $A_1 D_A = l_A$, тогда

$$l_A = \sqrt{CD_A^2 - CA_1^2} = \sqrt{l^2 - b^2 \cos^2 \gamma},$$

$$D_A \left(x_{A_1} + l_A \frac{AA_1}{AB}; y_{A_1} + l_A \frac{BA_1}{AB} \right),$$

$$D_A \left(x_{A_1} + l_A \frac{b \sin \gamma}{c}; y_{A_1} + l_A \frac{a - b \cos \gamma}{c} \right).$$

Определим координаты точки D_C .

$$\text{Обозначим } AD_B = r, \text{ тогда } AD_C = r = \sqrt{B_1 D_B^2 + B_1 A^2},$$

$$AD_C = r = \sqrt{l_B^2 + c^2 \cos^2 \alpha},$$

$$C_1 D_A = \sqrt{AD_C^2 - AC_1^2}, C_1 D_A = \sqrt{r^2 - b^2 \cos^2 \alpha},$$

$$D_A \quad 0; y_{C_1} - \sqrt{r^2 - b^2 \cos^2 \alpha} \quad \sqrt{r^2 - b^2 \cos^2 \alpha} .$$

Программа «Статическая развертка ортотетраэдра» осуществляет построение основания тетраэдра и боковых граней ортоцентрического тетраэдра, развернутых в плоскость основания.

Начнем моделировать процесс трансформации развертки в пространственную фигуру — ортоцентрический тетраэдр.

Пусть начало координат расположено в ортоцентре основания H , ось x параллельна лучу $[AB)$, а ось z перпендикулярна плоскости основания ABC (рис. 5).

Рассмотрим моделирование вращения ΔBCD_A вокруг прямой BC .

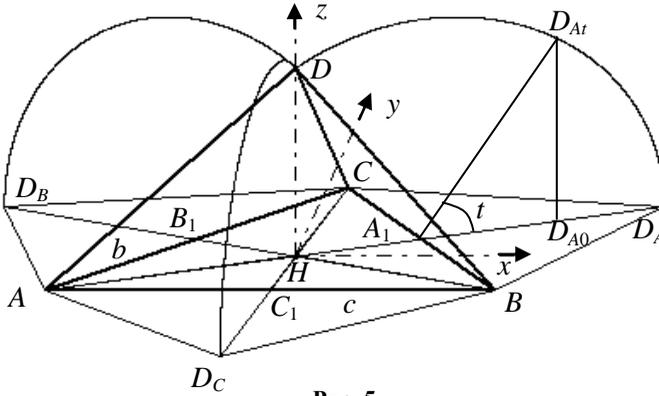


Рис. 5

Пусть отрезок A_1D_A повернулся вокруг точки A_1 на угол t и точка D_A заняла положение D_{Ar} . Обозначим проекцию точки D_{Ar} на плоскость ABC через D_{A0} , тогда $A_1D_{A0} = A_1D_{Ar} \cos t = l_A \cos t$, $D_{Ar}D_{A0} = A_1D_{Ar} \sin t = l_A \sin t$,

$$D_{Ar} \left(x_{A_1} + l_A \cos t \frac{AA_1}{c}; y_{A_1} + l_A \cos t \frac{BA_1}{c}; l_A \sin t \right).$$

Апофема DA_1 боковой грани BCD тетраэдра образует с плоскостью основания $\angle DA_1H$, причем $\operatorname{tg} \angle DA_1H = \frac{DH}{HA_1}$.

Для высоты h тетраэдра получаем $h = \sqrt{l_B^2 - HB_1^2}$.

Длины отрезков HA_1, HB_1 вычисляются в программе через координаты.

Угол поворота грани удовлетворяет условию

$$t \in \left[0; \pi - \operatorname{arctg} \frac{h}{HA_1} \right].$$

Аналогично при повороте ΔACD_B вокруг прямой AC точка D_B перейдет в положение D_{Bt} , причем

$$D_{Bt} \quad x_{Bt} - l_B \cos t \sin \alpha; y_{Bt} + l_B \cos t \cos \alpha; l_B \sin t \quad .$$

Апофема DB_1 боковой грани ACD тетраэдра образует с плоскостью основания $\angle DB_1H$, причем $\operatorname{tg} \angle DB_1H = \frac{h}{HB_1}$.

Угол поворота грани удовлетворяет условию

$$t \in \left[0; \pi - \operatorname{arctg} \frac{h}{HB_1} \right].$$

При повороте ΔABD_C вокруг прямой AB аналогично получаем

$$D_{Bt} \quad x_{Bt} - l_B \cos t \sin \alpha; y_{Bt} + l_B \cos t \cos \alpha; l_B \sin t \quad .$$

Апофема DC_1 боковой грани ABD тетраэдра образует с плоскостью основания $\angle DC_1H$, причем $\operatorname{tg} \angle DC_1H = \frac{h}{HC_1}$.

Угол поворота грани удовлетворяет условию

$$t \in \left[0; \pi - \operatorname{arctg} \frac{h}{HC_1} \right].$$

Компьютерная программа «Развертка ортоцентрического тетраэдра» выполняет восстановление тетраэдра из развертки (рис. 6).

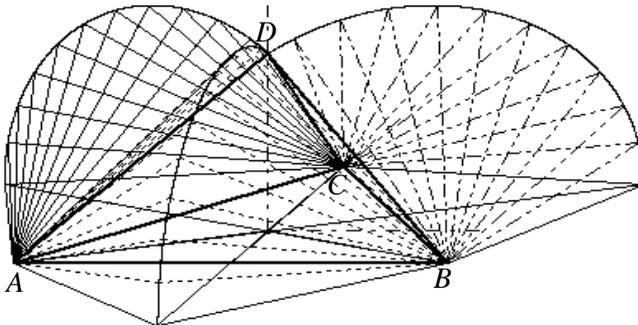


Рис. 6

§ 8. Тетраэдр с равным наклоном граней к основанию

Пусть тетраэдр $ABCD$ имеет равные наклоны боковых граней к основанию (рис. 1), тогда основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на основание ABC , т.е. I — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, $IC_1 \perp AB$, $IA_2 \perp BC$, $IB_3 \perp AC$, $IA_1 = IB_1 = IC_1 = r$.

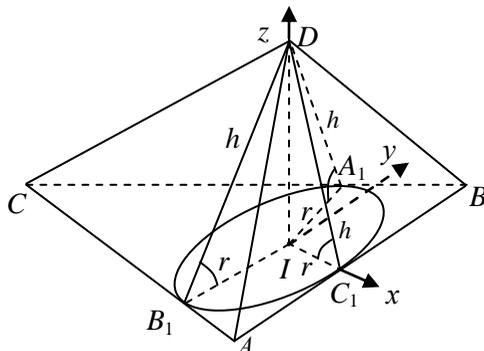


Рис. 1

Обозначим длину апофем боковых граней через h , т.е. $C_1D_1 = A_1D_2 = B_1D_3 = h$.

Для одного и того же тетраэдра можно различными способами изобразить развертки, которые не будут существенно отличаться, т.к. на каждой из них будет один тот же набор треугольников. Развертки могут отличаться способом расположения треугольников.

Рассмотрим развертку (рис. 2), для которой выбран произвольный треугольник ABC . Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены перпендикулярные прямые со сторонами треугольника и на них от точек касания окружности и сторон треугольника отложены отрезки длиной h , причем $h > r$.

Если треугольник ABC правильный, то получаем развертку правильной пирамиды.

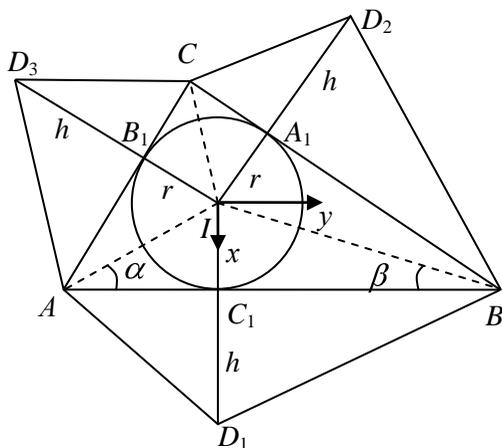


Рис. 2

Для моделирования развертки тетраэдра удобно ввести следующую параметризацию треугольника ABC :

r — радиус вписанной окружности,

$\alpha = \angle BAI$, $\beta = \angle ABI$ — величины углов, образованные биссектрисами треугольника со стороной AB .

Биссектриса IC образует со сторонами CA , CB углы, которые вычисляются по формуле $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$.

Пусть начало прямоугольной декартовой системы координат в пространстве совпадает с центром вписанной окружности (рис. 1), а ось Ox направлена вдоль луча $[ID_1)$, тогда для отрезков и координат точек получаем:

$$AC_1 = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad BC_1 = \frac{r}{\operatorname{tg} \beta}, \quad A\left(r; -\frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}; 0\right), \quad B\left(r; \frac{r}{\operatorname{tg} \beta}; 0\right),$$

$$AC = AB_1 + B_1C = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{r}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma},$$

$$\overline{AC} = -AC \sin 2\alpha; AC \cos 2\alpha; 0, \quad \overline{IC} = \overline{IC_1} + \overline{C_1A} + \overline{AC},$$

$$C\left(-\frac{r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma} \sin 2\alpha + r; \frac{r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma} \cos 2\alpha - \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}; 0\right).$$

Для конструирования тетраэдра из развертки необходимо $\triangle ABD_1$ повернуть вокруг прямой AB , $\triangle BCD_2$ повернуть вокруг прямой BC , $\triangle ACD_3$ повернуть вокруг прямой AC .

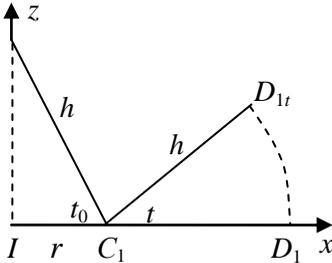


Рис. 3

Пусть апофема тетраэдра образует с плоскостью основания угол

$$t_0, \text{ для которого } \operatorname{tg} t_0 = \frac{\sqrt{h^2 - r^2}}{r}$$

(рис. 3). По заданным значениям r, h величина угла наклона вычисляется по формуле

$$t_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{h^2 - r^2}}{r}.$$

Рассмотрим моделирование вращения $\triangle ABD_1$ вокруг прямой AB .

Пусть отрезок C_1D_1 повернулся на угол t (рис. 3) вокруг точки C_1 и точка D_1 перешла в положение D_{1t} , тогда для точки D_{1t} получаем координаты

$$D_{1t} \quad r + h \cos t; 0; h \sin t, \quad t \in [0; \pi - t_0].$$

Аналогичным образом рассмотрим вращение $\triangle BCD_2$ вокруг прямой BC .

Пусть отрезок A_1D_2 повернулся на угол t вокруг точки A_1 и занял положение A_1D_{2t} . Отрезок ID_2 можно получить поворотом из отрезка ID_2 вокруг точки I на угол $\angle C_1IA_1 = \pi - 2\beta$, поэтому и точку D_{2t} можно получить из точки D_{1t} поворотом вокруг оси Oz на угол $\pi - 2\beta$.

Пусть произвольная точка $M(x; y)$ плоскости отображается в точку $M'(x'; y')$ при повороте R_φ^O вокруг начала координат O на угол φ (рис. 4), тогда

$$x' = r \cos(\alpha + \varphi) = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi,$$

$$y' = r \sin(\alpha + \varphi) = r \cos \alpha \sin \varphi + r \sin \alpha \cos \varphi.$$

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

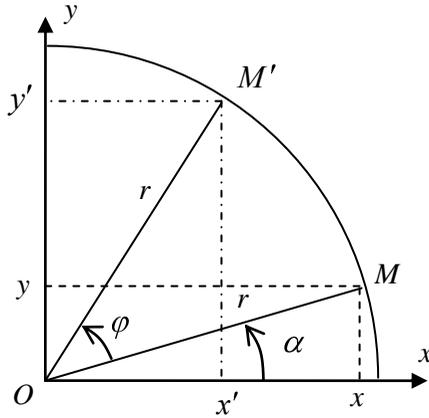


Рис. 4

Подставляя координаты точки D_{1t} в формулы поворота $R_{oz}^{\pi-2\beta}$: $x' = -x \cos 2\beta - y \sin 2\beta, y' = x \sin 2\beta - y \cos 2\beta, z' = z$, получаем координаты искомой точки

$$D_{2t} \quad -(r + h \cos t) \cos 2\beta; (r + h \cos t) \sin 2\beta; h \sin t .$$

Аналогично, рассматривая поворот вокруг точки I на угол $\angle C_1IB_1 = \pi - 2\alpha$, но в отрицательном направлении, получим координаты точки

$$D_{3t} \quad -(r + h \cos t) \cos 2\alpha; -(r + h \cos t) \sin 2\alpha; h \sin t .$$

При $\alpha = \beta = 30^\circ$ получаем развертку правильного тетраэдра.

Следующая программа «Тетраэдр Равный наклон граней», написанная на языке Visual Basic, осуществляет демонстрацию поэтапного подъема трех треугольников до положения боковых граней тетраэдра $ABCD$ (рис. 5).

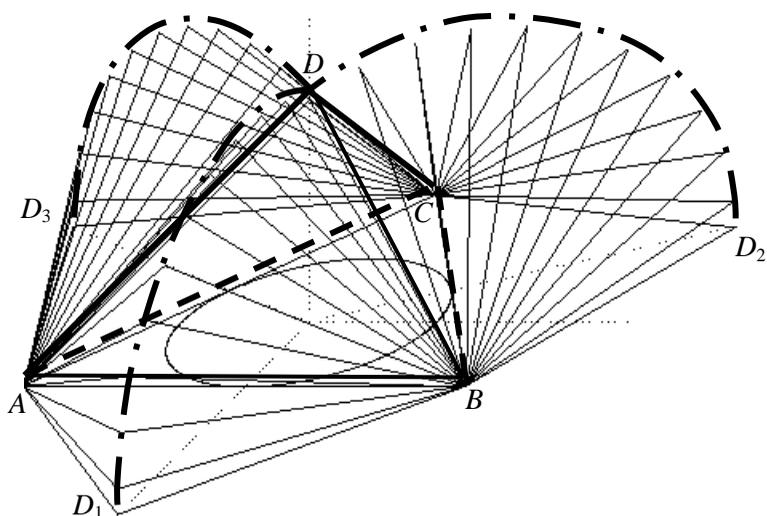


Рис. 5

После подъема граней вершины D_{1t}, D_{2t}, D_{3t} склеиваются в вершину D тетраэдра. Штрихпунктирные линии показывают траектории движения точек. Вершина D тетраэдра проектируется в центр окружности, вписанной в основание тетраэдра.

Существует несколько типов тетраэдров. Анализируя различные типы тетраэдров, можно сформулировать программу действий для конструирования тетраэдра каждого типа.

1. Определить развертку для исследуемого типа тетраэдра. Для нескольких типов тетраэдров развертки представлены в пособии [19].

2. Выбрать рациональным способом параметры в развертке, чтобы упростить процесс определения координат всех вершин развертки.

3. Определить механизм конструирования тетраэдра из развертки.

При любом конструировании необходимо осуществить повороты трех треугольников вокруг сторон основания тетраэдра. Наиболее естественно рассмотреть одновременное вращение трех треугольников, т.е. начало трех поворотов и окончание этих

поворотов должны осуществляться одновременно. Повороты нужно синхронизировать во времени за один и тот же промежуток времени. Программно это должно осуществляться на основе одного цикла.

Будем считать, что вычисление координат вершин трех треугольников и построение сторон вращаемых треугольников при заданном значении переменной цикла осуществляется достаточно быстро по сравнению со временем задержки, которая устанавливается между двумя соседними значениями переменной цикла для наглядности изображения.

Реализация синхронизации трех поворотов будет зависеть от типа тетраэдра.

Если тетраэдр имеет равные наклоны боковых граней к основанию, то в качестве переменной цикла естественно выбрать угол наклона вращаемого треугольника с основанием (или некоторую тригонометрическую функцию этого угла). Для всех трех треугольников эта переменная одинаковая, и движение можно синхронизировать в одном цикле.

В остальных циклах эти углы, в основном, различные. Можно вычислить величины этих углов и, поделив на количество шагов, определить величину шага изменения параметра для каждого треугольника. Но для конкретного типа тетраэдра наиболее естественно указать свой способ синхронизации поворотов треугольников.

Если шаг цикла взять достаточно малый, то большое количество промежуточных положений треугольников заполнит весь чертеж. На нем будет сложно проследить процесс подъема определенного треугольника. Поэтому число шагов при конструировании тетраэдра должно быть небольшим.

Для наглядности на чертеже необходимо выделить траектории движения трех вершин. Траекторию каждой вершины можно построить вручную при окончательном оформлении чертежа (приближенный способ приведен на рис. 5). Для этого, используя команды: Автофигуры → Линии → Кривая, можно построить линию, соединив промежуточные положения вершин вращаемого треугольника на построенном чертеже. Достоинство этого способа в том, что эти линии можно изобразить различным способом (сплошной, пунктирной или другими типами линий) и выделить

различную толщину линии. Второй способ более точного построения — добавить в программу цикл для построения вершин, но с малым шагом в цикле. На чертеже эта линия будет изображена непрерывной линией. Если необходимо изобразить штрихованной линией или штрихпунктирной линией, то необходимо предусмотреть условные операторы и циклы задержки.

4. Разработать математическое моделирование динамики геометрического образа.
5. Написать программу для компьютерного моделирования.
6. Вставить рисунок, построенный программой, с экранного окна в текстовый документ и добавить необходимые обозначения.

Задание для самостоятельного исследования.

2.1. Добавьте в программу цикл для построения трех траекторий движения вершин треугольников.

2.2. Как реализовать построение небольшого количества треугольников для промежуточных положений и большого количества точек траекторий движения вершин с помощью одного цикла?

2.3. Усовершенствуйте программу, добавив ввод параметров развертки: r, α, β, h .

§ 9. Тетраэдр с равным наклоном ребер к основанию

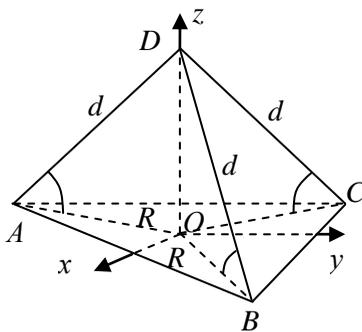


Рис. 1

Пусть тетраэдр $ABCD$ имеет равные наклоны боковых ребер к основанию (рис. 1), т.е.

$\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO$, тогда $OA = OB = OC$ и $DA = DB = DC$.

Боковые ребра тетраэдра равны и их проекции на плоскость основания также равны. Вершина D тетраэдра проектируется на плоскость основания в центр описанной окружности.

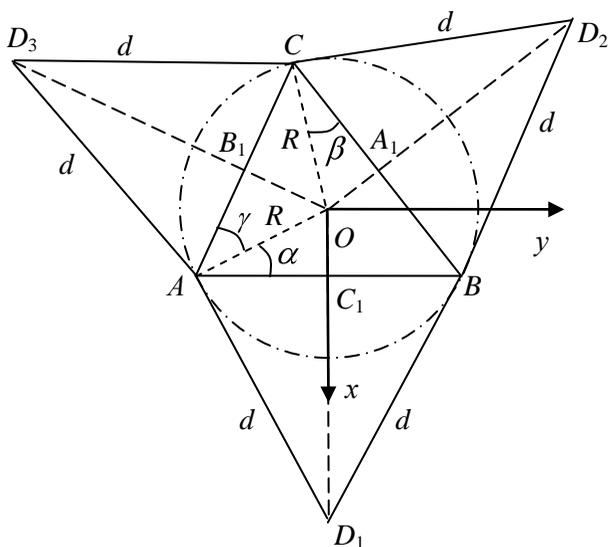


Рис. 2

Пусть тетраэдр $ABCD$ с равными наклонами боковых граней к основанию [19, с. 313] имеет следующую развертку (рис. 2), где ABC — произвольный треугольник в основании тетраэдра, O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, $OD_1 \perp AB$, $OD_2 \perp BC$, $OD_3 \perp AC$, $AD_1 = BD_1 = BD_2 = CD_2 = CD_3 = AC_3 = d$.

Если треугольник ABC правильный, то получаем развертку правильной пирамиды.

Для конструирования тетраэдра из развертки необходимо $\triangle ABD_1$ повернуть вокруг прямой AB , $\triangle BCD_2$ повернуть вокруг прямой BC , $\triangle ACD_3$ повернуть вокруг прямой AC .

Для моделирования развертки тетраэдра удобно ввести следующую параметризацию треугольника ABC :

R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC ,

$\alpha = \angle OAB$, $\beta = \angle OCB$, $\gamma = \angle OAC$ — величины углов, образованных радиусами окружности со сторонами треугольника, причем $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$, d — длина бокового ребра тетраэдра.

Пусть начало прямоугольной декартовой системы координат в пространстве совпадает с центром описанной окружности (рис. 1, 2), а ось ox направлена вдоль луча $[OD_1)$, тогда для длин отрезков и координат точек получаем:

$$AC_1 = R \cos \alpha, \quad OC_1 = R \sin \alpha, \quad A \quad R \sin \alpha; -R \cos \alpha, 0, \quad ,$$

$$B \quad R \sin \alpha; R \cos \alpha, 0, \quad C_1 D_1 = \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \alpha},$$

$$D_1 (R \sin \alpha + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \alpha}; 0; 0).$$

Возвращаясь к рис. 2, получаем $\angle BOC = \pi - 2\beta$. При повороте вокруг начала координат на угол $\pi - 2\beta$ вершина B треугольника отображается в вершину C . Подставляя координаты точки B в формулы (1) и полагая $\varphi = \pi - 2\beta$, получим координаты точки C :

$$C(-R \sin(\alpha + 2\beta); -R \cos(\alpha + 2\beta); 0).$$

При конструировании тетраэдра треугольник ABD_1 нужно повернуть вокруг прямой AB до положения грани ABD тетраэдра $ABCD$ (рис. 3).

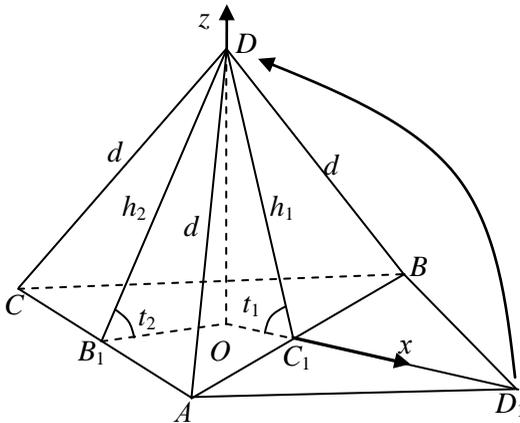


Рис. 3

Отрезок D_1C_1 перейдет в положение апофемы DC_1 , поэтому длина апофемы в грани ABD равна

$$DC_1 = h_1 = \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \alpha}.$$

Для двугранного угла между плоскостью основания ABC и гранью ABD получаем

$$\operatorname{tg} t_1 = \frac{OD}{OC_1} = \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{R \sin \alpha}.$$

По заданным значениям R, d, α величина угла наклона вычисляется по формуле

$$t_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{R \sin \alpha}.$$

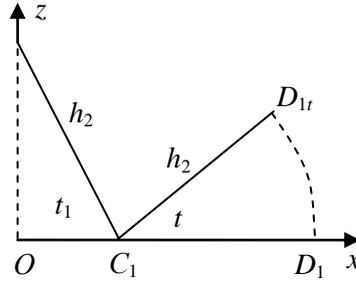


Рис. 4

Рассмотрим моделирование вращения $\triangle ABD_1$ вокруг прямой AB .

Пусть отрезок C_1D_1 повернулся на угол t (рис. 4) вокруг точки C_1 и точка D_1 перешла в положение D_{1t} , тогда для точки D_{1t} получаем координаты

$$D_{1t} \quad OC_1 + h_1 \cos t; 0; h_1 \sin t, \quad t \in [0; \pi - t_1] \text{ или}$$

$$D_{1t} \quad R \sin \alpha + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \alpha} \cos t; 0; \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \alpha} \sin t.$$

Аналогичным образом рассмотрим вращение $\triangle BCD_2$ вокруг прямой BC .

$$\text{Апофема грани } BCD \text{ равна } DA_1 = h_2 = \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \beta}.$$

Для двугранного угла между плоскостью основания ABC и гранью BCD получаем

$$\operatorname{tg} t_2 = \frac{OD}{OA_1} = \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{R \sin \beta}.$$

По заданным значениям R, d, β величина угла наклона вычисляется по формуле $t_2 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{R \sin \beta}$.

Пусть отрезок A_1D_2 повернулся на угол t вокруг точки A_1 и занял положение A_1D_{2t} .

Задавать аналитически поворот в пространстве вокруг прямой BC сложно, поэтому мы предварительно повернем четырехугольник OCD_2B на угол D_2OD_1 в направлении вращения часовой стрелки до положения $OC_0D_{20}B_0$ (рис. 5).

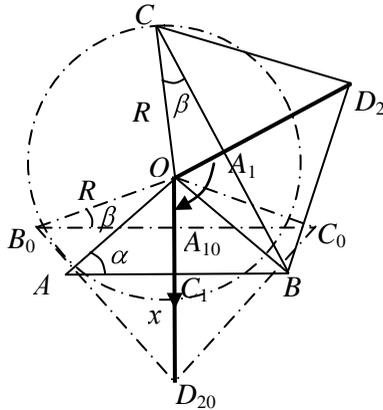


Рис. 5

Аналогично получаем длины отрезков и координаты точек

$$B_0A_{10} = R \cos \beta, \quad OA_{10} = R \sin \beta, \quad B_0 \quad R \sin \beta; -R \cos \beta; 0, \quad ,$$

$$D_{20}(r \sin \beta + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \beta}; 0; 0),$$

$$D_{20t} \quad OA_{10} + h_2 \cos t; 0; h_2 \sin t, \quad t \in [0; \pi - t_2],$$

$$D_{20t} \quad R \sin \beta + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \beta} \cos t; 0; \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \beta} \sin t.$$

Далее применяем поворот вокруг начала координат на угол $D_1OD_2 = \pi - (\alpha + \beta)$ и для движущейся точки D_{2t} получаем координаты:

$$x_{2t} = -R \sin \beta + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \beta} \cos t \cos(\alpha + \beta),$$

$$y_{2t} = R \sin \beta + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \beta} \cos t \sin(\alpha + \beta),$$

$$z_{2t} = \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \beta} \sin t.$$

Аналогичным образом рассмотрим вращение ΔACD_3 вокруг прямой AC .

Апофема грани ACD равна $DB_1 = h_3 = \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \gamma}$.

Для двугранного угла между плоскостью основания ABC и гранью ACD получаем

$$\operatorname{tg} t_3 = \frac{OD}{OB_1} = \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{R \sin \gamma}.$$

По заданным значениям R, d, γ величина угла наклона вычисляется по формуле $t_3 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{R \sin \gamma}$.

Пусть отрезок B_1D_3 повернулся на угол t вокруг точки B_1 и занял положение B_1D_{3t} .

Задавать аналитически поворот в пространстве вокруг прямой AC сложно, поэтому мы предварительно повернем четырехугольник OCD_3A на угол D_3OD_1 в направлении против вращения часовой стрелки до положения $OC'D_3'A'$ (рис. 6).

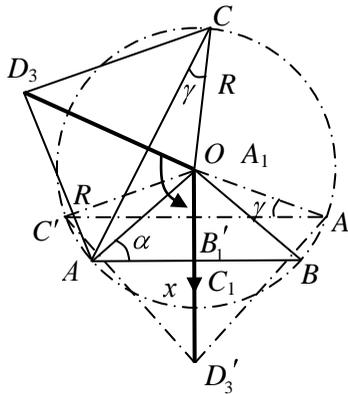


Рис. 6

Аналогично получаем длины отрезков и координаты точек $C'B_1' = R \cos \gamma$, $OB_1' = R \sin \gamma$, $C' R \sin \gamma; -R \cos \gamma; 0$,

$$D_3' (r \sin \gamma + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \gamma}; 0; 0) ,$$

$$D_{3t}' OB_1' + h_3 \cos t; 0; h_3 \sin t , \quad t \in [0; \pi - t_3] ,$$

$$D_{3t}' R \sin \gamma + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \gamma} \cos t; 0; \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \gamma} \sin t .$$

Далее применяем поворот вокруг начала координат на угол $D_1OD_3 = -(\pi - (\alpha + \beta)) = (\alpha + \beta) - \pi$ и для движущейся точки D_{3t} получаем координаты:

$$x_{3t} = - R \sin \gamma + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \gamma} \cos t \cos(\alpha + \gamma) ,$$

$$y_{3t} = - R \sin \gamma + \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \gamma} \cos t \sin(\alpha + \gamma) ,$$

$$z_{3t} = \sqrt{d^2 - R^2 \cos^2 \gamma} \sin t .$$

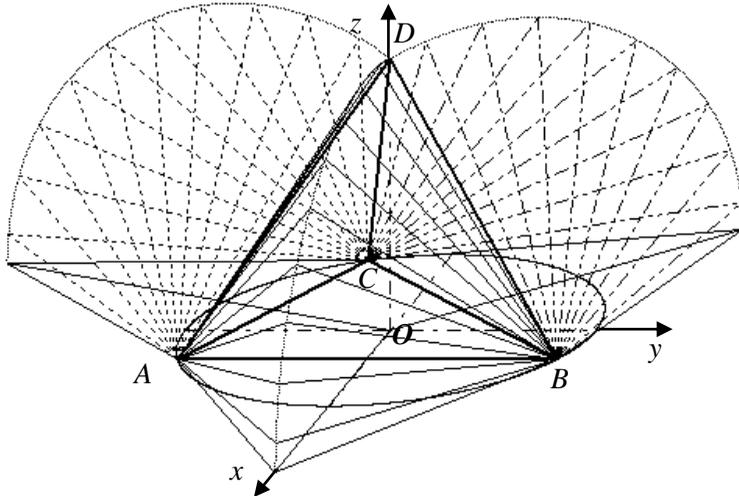


Рис. 7

Программа «Тетраэдр Равный наклон ребер» осуществляет демонстрацию поэтапного подъема трех треугольников до положения боковых граней тетраэдра $ABCD$ (рис. 7).

§ 10. Равногранный тетраэдр

Тетраэдр называется равногранным, если все его грани равны. В равногранном тетраэдре противоположные ребра равны (рис. 1).

Разверткой равногранного тетраэдра $ABCD$ является фигура, состоящая из четырех равных треугольников с правилом склейки, указанным на рис. 2.

Треугольник $D_A D_B D_C$ получается из треугольника ABC гомотетией H_M^{-2} , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

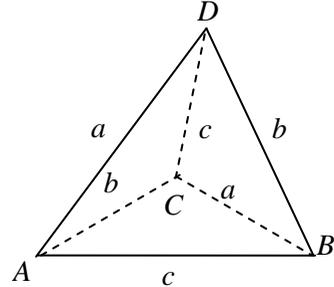


Рис. 1

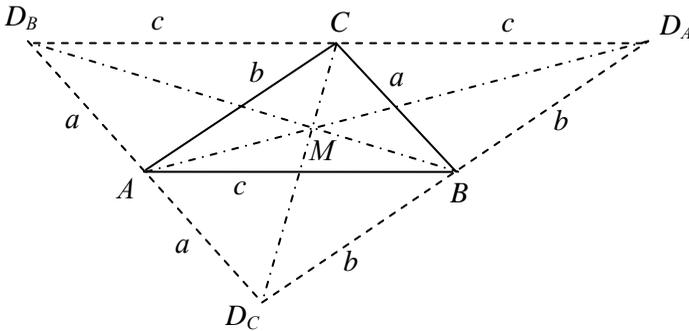


Рис. 2

Рассмотрим моделирование процесса конструирования равногранного тетраэдра из развертки $AD_C BD_A CD_B A$. Для этого необходимо осуществить математическое моделирование процесса поворота треугольника $AD_C B$ вокруг прямой AB , поворота треугольника $BD_A C$ вокруг прямой BC , поворота треугольника $CD_B A$ вокруг прямой CA до тех положений, когда вершины D_C, D_A, D_B склеятся в одну вершину D тетраэдра.

При повороте треугольника $AD_C B$ вокруг прямой AB вершина D_C будет двигаться в плоскости, перпендикулярной прямой AB (рис. 3), а проекция этой точки на плоскости основания будет двигаться по перпендикуляру к AB , проходящему через точку D_C . Аналогично проведем перпендикуляр к BC через точку D_A и перпендикуляр к CA через точку D_B .

После образования тетраэдра из развертки его вершина D должна проектироваться в точку D_0 , которая является пересечением построенных перпендикуляров. Перпендикуляры к сторонам треугольника ABC являются перпендикулярами к сторонам треугольника $D_A D_B D_C$, а поэтому точка D_0 является точкой пересечения высот треугольника $D_A D_B D_C$, т.е. его ортоцентром.

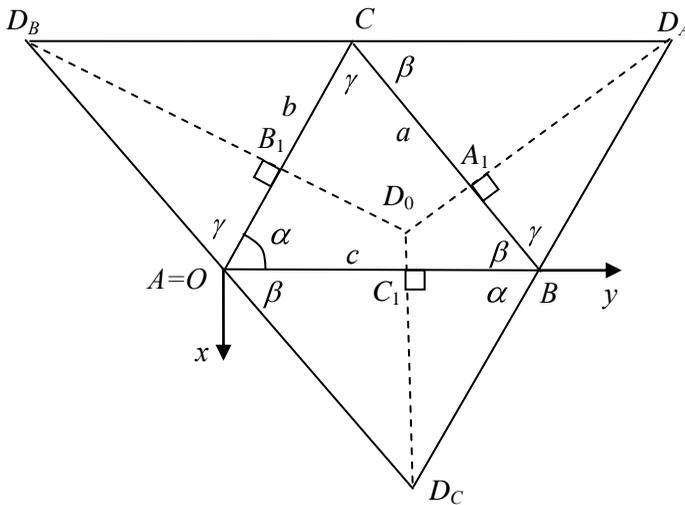


Рис. 3

Будем использовать стандартное обозначение углов и сторон в треугольнике ABC — $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$.

Для развертки тетраэдра выберем параметры: c, b — длины сторон треугольника ABC , α — угол между сторонами. Определим остальные элементы развертки.

Рассмотрим вначале вспомогательную прямоугольную декартову систему координат Axy на плоскости согласно рисунку 2, для которой полюсь y совпадает с лучом $[AB)$, тогда

$$A(0;0), B(0;c), C(-b\sin\alpha;b\cos\alpha).$$

Из параллелограмма $ABCD_B$, пользуясь условием

$$\overline{AD_B} = \overline{BC}(-b\sin\alpha;b\cos\alpha - c), \text{ найдем координаты вершины}$$

$$D_B \quad -b\sin\alpha;b\cos\alpha - c .$$

Аналогично для других параллелограммов

$$\overline{AD_C} = -\overline{AD_B}, \quad D_C \quad b\sin\alpha;c - b\cos\alpha ,$$

$$\overline{AD_A} = \overline{AB} + \overline{AC}, \quad D_A \quad -b\sin\alpha;c + b\cos\alpha .$$

$$C_1(0;a\cos\beta), \quad \overline{OB_1} = a\cos\gamma, \quad B_1(-a\cos\gamma\sin\alpha;a\cos\gamma\cos\alpha),$$

$$\overline{BA_1} = b\cos\gamma, \quad \overline{BA_1}(-b\cos\gamma\sin\beta;-b\cos\gamma\cos\beta),$$

$$\overline{OA_1} = \overline{OB} + \overline{BA_1}, \quad A_1(-b\cos\gamma\sin\beta;c - b\cos\gamma\cos\beta) .$$

Уравнение перпендикуляра к прямой AB , т.е. вертикальной прямой $D_C D_0$:

$$y = c - b\cos\alpha .$$

Вектор $\overline{BC}(-b\sin\alpha;b\cos\alpha - c)$ является нормальным вектором к перпендикуляру $D_A D_0$, поэтому получаем уравнение прямой $D_A D_0$:

$$-b\sin\alpha(x + b\sin\alpha) + (b\cos\alpha - c)(y - c - b\cos\alpha) = 0$$

или

$$b\sin\alpha \quad x - (b\cos\alpha - c)y + b^2 - c^2 = 0 .$$

Координаты точки D_0 найдем из системы

$$\begin{cases} y = c - b\cos\alpha, \\ b\sin\alpha \quad x - (b\cos\alpha - c)y + b^2 - c^2 = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$D_0 \left(\frac{2c\cos\alpha - b - b\cos^2\alpha}{\sin\alpha}; c - b\cos\alpha \right).$$

При повороте треугольника $AD_C B$ вокруг прямой AB проекция вершины D_C пробегает отрезок $D_C D_0$. Найдем его длину, используя координаты конечных точек

$$D_C D_0 = \frac{2(b - c \cos \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Используя равенства

$$b = c \cos \alpha + a \cos \gamma, \quad c = b \cos \alpha + a \cos \beta,$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

уменьшим число параметров в выражении длины отрезка $D_C D_0$, тогда

$$D_C D_0 = 2c \operatorname{ctg} \gamma. \quad (1)$$

Аналогично

$$D_A D_0 = 2a \operatorname{ctg} \alpha, \quad (2)$$

$$D_B D_0 = 2b \operatorname{ctg} \beta, \quad (3)$$

где вспомогательные параметры a, β, γ вычисляются по формулам: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$,

$$\cos \beta = \frac{c - b \cos \alpha}{a}, \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}, \cos \gamma = \frac{b - c \cos \alpha}{a}, \sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a}.$$

Для вычисления углов треугольника в компьютерной программе будем использовать формулы

$$\beta = \arctg \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha}, \quad \gamma = \arctg \frac{c \sin \alpha}{b - c \cos \alpha}.$$

При конструировании тетраэдра треугольник ABD_C нужно повернуть вокруг прямой AB до положения грани ABD тетраэдра $ABCD$ (рис. 2).

Отрезок $D_C C_1$ перейдет в положение апофемы DC_1 , поэтому длина апофемы в грани ABD равна $DC_1 = h_1 = b \sin \alpha$.

Проекция апофемы тетраэдра на плоскость основания равна

$$D_0 C_1 = D_0 D_C - C_1 D_C = 2c \operatorname{ctg} \gamma - b \sin \alpha.$$

Высота тетраэдра равна

$$h = \sqrt{DC_1^2 - D_0C_1^2} = \sqrt{(b \sin \alpha)^2 - (2c \operatorname{ctg} \gamma - b \sin \alpha)^2}$$

или

$$h = \frac{2c}{\sin \gamma} \sqrt{\cos \gamma (\sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma)} .$$

Для двугранного угла между плоскостью основания ABC и гранью ABD получаем

$$\operatorname{tg} t_1 = \frac{h}{D_0C_1} .$$

Угол наклона t_1 вычисляется по заданным значениям параметров развертки b, c, α .

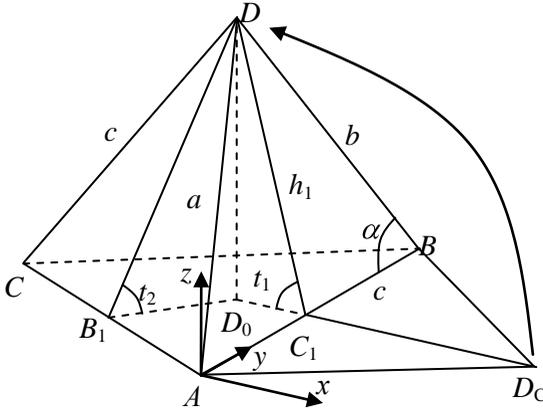


Рис. 4

Рассмотрим моделирование вращения $\triangle ABD_C$ вокруг прямой AB .

Пусть отрезок C_1D_C повернулся на угол t (рис. 5) вокруг точки C_1 и точка D_C перешла в положение D_{Ct} , тогда для точки D_{Ct} получаем координаты

$$D_{Ct} \quad OC_1 + h_1 \cos t; 0; h_1 \sin t ,$$

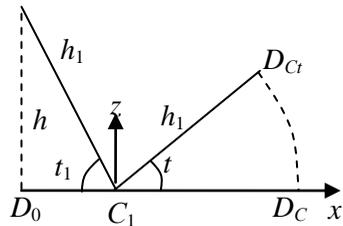


Рис. 5

$$t \in [0; \pi - t_1],$$

$$D_{At} \quad b \sin \alpha \cos t; a \cos \beta; b \sin \alpha \sin t \quad .$$

Моделирование поворотов двух других граней тетраэдра можно выполнить аналогично ранее рассмотренным тетраэдрам, но мы применим другой способ для упрощения вычислений.

При повороте $\triangle BCD_A$ вокруг прямой BC образ точки D_A , т.е. точка D_{At} , вращается в плоскости, перпендикулярной прямой BC . Прямая A_1D_A , перпендикулярная прямой BC , образует с осью Oy угол $90^\circ - \beta$. Проекция точки D_{At} движется по прямой A_1D_A .

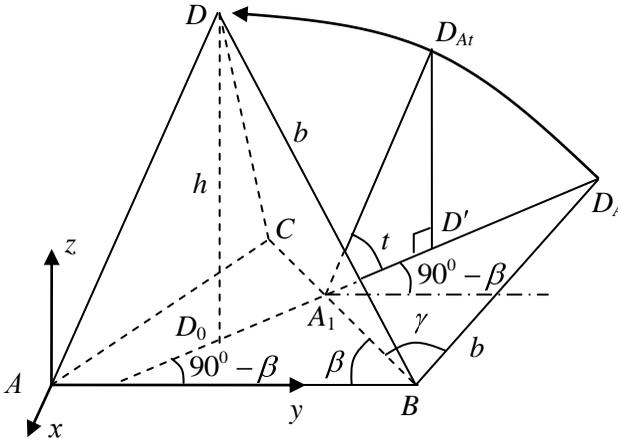


Рис. 6

Пусть точка D_{At} имеет проекцию D' на прямую A_1D_A (рис. 6), тогда

$$A_1D' = A_1D_{At} \cos t = A_1D_A \cos t = b \sin \gamma \cos t,$$

$$D'D_{At} = A_1D_{At} \sin t = A_1D_A \sin t = b \sin \gamma \sin t,$$

$$\overline{A_1D_{At}} = (-b \sin \gamma \cos t \cos \beta; b \sin \gamma \cos t \sin \beta; b \sin \gamma \sin t),$$

$$\overline{AD_{At}} = \overline{AA_1} + \overline{A_1D_{At}}.$$

Для точки D_{A_t} получаем координаты

$$x_{D_{A_t}} = -(b \cos \gamma \sin \beta + b \sin \gamma \cos t \cos \beta),$$

$$y_{D_{A_t}} = c - b \cos \gamma \cos \beta + b \sin \gamma \cos t \sin \beta,$$

$$z_{D_{A_t}} = b \sin \gamma \sin t.$$

При повороте $\triangle ACD_B$ вокруг прямой AC образ точки D_B , т.е. точка D_{B_t} , вращается в плоскости, перпендикулярной прямой AC . Прямая B_1D_B , перпендикулярная прямой AC , образует с прямой AB угол $90^\circ - \alpha$. Проекция точки D_{B_t} движется по прямой B_1D_B .

Для точки D_{B_t} аналогично получаем координаты

$$x_{D_{B_t}} = -(a \cos \gamma \sin \alpha + a \sin \gamma \cos t \cos \alpha),$$

$$y_{D_{B_t}} = a \cos \gamma \cos \alpha - a \sin \gamma \cos t \sin \alpha,$$

$$z_{D_{B_t}} = a \sin \gamma \sin t.$$

Следующая программа «Развертка равногранного тетраэдра», написанная на языке Visual Basic, осуществляет демонстрацию поэтапного подъема трех треугольников до положения боковых граней равногранного тетраэдра $ABCD$ (рис. 7).

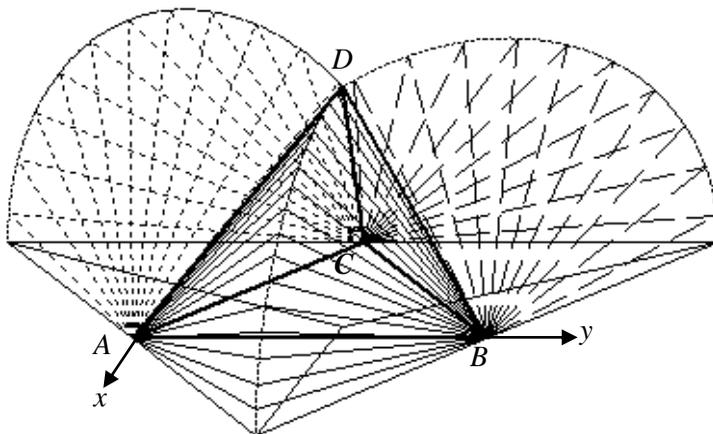


Рис. 7

§ 11. Тетраэдр с тремя равными углами при вершине

Начнем решение задачи с частного случая, когда основанием пирамиды является правильный треугольник ABC , в вершине S пирамиды даны три равных угла φ .

На рис. 1 предпринята попытка построения развертки пирамиды $ABCS$, в основании которой расположен равносторонний треугольник ABC и тремя равными углами при вершине S . В основу построения развертки были выбраны параметры — три равных угла и три равных стороны в основании пирамиды.

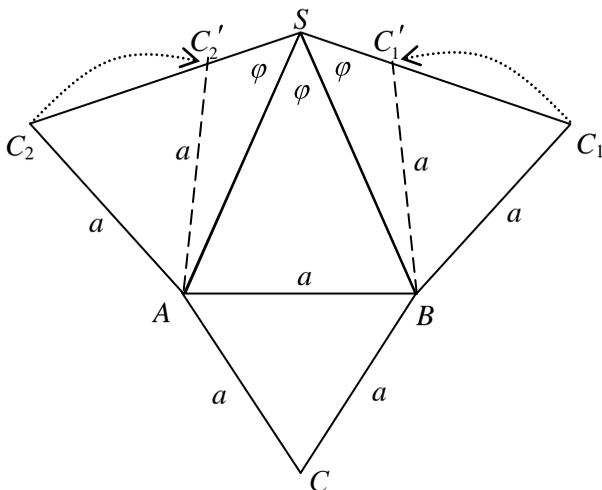


Рис. 1

Из рис. 1 видно, что существуют две развертки, удовлетворяющие условию задачи. Одной развертке $ACBC_1SC_2$ соответствует правильная пирамида, а другой развертке $ACBC'_1SC'_2$ — наклонная пирамида.

2.4. а) Разработайте математическое моделирование восстановления пирамиды из каждой указанной развертки и напишите соответствующие компьютерные программы.

б) При каком значении величины угла одна развертка вырождается, т.е. точки C'_1 и C'_2 совпадут с вершиной S ?

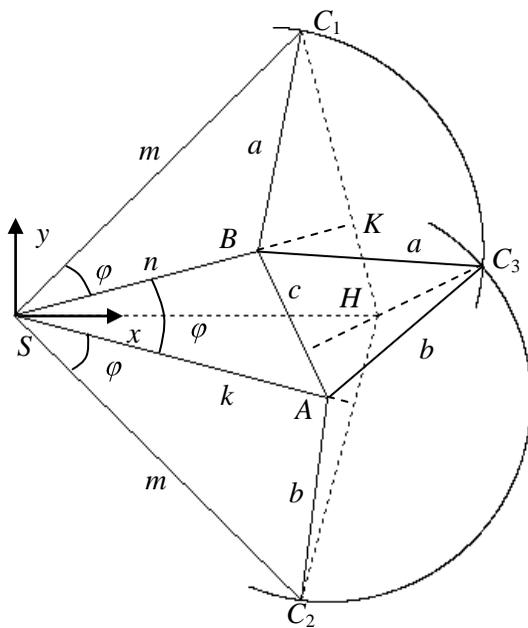


Рис. 2

Рассмотрим обобщение данной задачи, заменив равносторонний треугольник в основании произвольным треугольником.

Если строить развертку, начиная с основания ABC , то смоделировать три точки, из которых стороны этого треугольника видны под данным углом φ , будет сложно, поэтому аналогично частному случаю развернем все грани в плоскость какой-нибудь боковой грани (рис. 2). Получим развертку $SC_2AC_3BC_1$.

Выберем параметры тетраэдра:

$\varphi, m = SC_1 = SC_2, n = SB, k = SA$, тогда

$$BC_1 = a = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \varphi}, \quad AC_2 = b = \sqrt{m^2 + k^2 - 2mk \cos \varphi},$$

$$AB = c = \sqrt{k^2 + n^2 - 2kn \cos \varphi}.$$

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла при вершине S тетраэдра меньше 2π , поэтому угол φ должен удовлетворять условию $0^\circ < \varphi < 120^\circ$.

Для параметризации, в которой заданы три равных угла и три данных отрезка m, n, k , развертка строится однозначно.

Линейные углы при вершине S пирамиды равны, следовательно, и двугранные углы при каждом ребре также равны. Ортогональной проекцией ребра SC на плоскость SAB является биссектриса угла ASB .

При повороте грани SBC_1 вокруг прямой SB вершина C_1 движется в плоскости, перпендикулярной прямой SB , а проекция вершины C_1 движется по прямой, перпендикулярной SB .

Аналогично, при повороте грани SAC_2 вокруг прямой SA вершина C_2 движется в плоскости, перпендикулярной прямой SA , а проекция вершины C_2 движется по прямой, перпендикулярной SA . Рассмотренные прямые, перпендикулярные, соответственно, SB и SA , пересекаются в точке H . Точка H расположена на биссектрисе угла ASB и является основанием высоты пирамиды, опущенной из точки C на плоскость грани SAB .

Прямая C_3H является перпендикулярной прямой AB , т.к. при повороте треугольника ABC вокруг прямой AB точка C_3 движется в плоскости, перпендикулярной прямой AB .

Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на прямую SB , тогда из прямоугольного треугольника SKC_1 получаем $SK = m \cos \varphi$.

Из прямоугольного треугольника SKH получаем $SH = \frac{SK}{\cos \frac{\varphi}{2}}$ или $SH = \frac{m \cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}$.

Для системы координат, изображенной на рис. 2, получаем

$$S(0;0), A\left(k \cos \frac{\varphi}{2}; -k \sin \frac{\varphi}{2}\right), B\left(n \cos \frac{\varphi}{2}; n \sin \frac{\varphi}{2}\right), \\ C_1\left(m \cos \frac{3\varphi}{2}; m \sin \frac{3\varphi}{2}\right), C_2\left(m \cos \frac{3\varphi}{2}; -m \sin \frac{3\varphi}{2}\right), H\left(\frac{m \cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}; 0\right).$$

Программа построения развертки тетраэдра с тремя равными углами при вершине имеет вид:

```

Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
pi = 4 * Atn(1): x0 = 4000: y0 = 4000: k = 3200: n = 2500: m = 4000
p = 0.3: q = 0.4
fi = pi / 6:
xb = n * Cos(fi / 2): yb = n * Sin(fi / 2)
Line (x0, y0)-(xb + x0, yb + y0)
xa = k * Cos(fi / 2): ya = -k * Sin(fi / 2)
Line (x0, y0)-(xa + x0, ya + y0)
xc1 = m * Cos(3 * fi / 2): yc1 = m * Sin(3 * fi / 2)
Line (x0, y0)-(xc1 + x0, yc1 + y0)
xc2 = m * Cos(3 * fi / 2): yc2 = -m * Sin(3 * fi / 2)
Line (x0, y0)-(xc2 + x0, yc2 + y0)
Line (xb + x0, yb + y0)-(xc1 + x0, yc1 + y0)
Line (xb + x0, yb + y0)-(xa + x0, ya + y0)
Line (xa + x0, ya + y0)-(xc2 + x0, yc2 + y0)
a = Sqr(m ^ 2 + n ^ 2 - 2 * m * n * Cos(fi))
For t = -pi / 12 To pi / 2 Step 0.001
x = xb + a * Cos(t): y = yb + a * Sin(t): PSet (x + x0, y + y0)
Next t
b = Sqr(m ^ 2 + k ^ 2 - 2 * m * k * Cos(fi))
For t = -5 * pi / 8 To pi / 3 Step 0.001
x = xa + b * Cos(t): y = ya + b * Sin(t): PSet (x + x0, y + y0)
Next t
DrawStyle = 2
xh = m * Cos(fi) / Cos(fi / 2)
Line (x0, y0)-(xh + x0, y0)
Line (xc1 + x0, yc1 + y0)-(xh + x0, y0)
Line (xc2 + x0, yc2 + y0)-(xh + x0, y0)
End Sub

```

При конструировании тетраэдра из развертки с помощью отрезков $AB = c$, $AC_2 = b$, $BC_1 = a$ должен получиться треугольник. Однако, не из всяких трех отрезков можно построить треугольник. Например, треугольник можно построить из трех отрезков, если сумма каждых двух отрезков больше третьего отрезка. Проверим вначале выполнение этого условия для $\varphi < 90^\circ$.

Докажем, например, что $c + a > b$.

Для ломаной линии ABC_1 выполняется условие $AB + BC_1 > AC_1$ или

$$c + a > AC_1. \quad (1)$$

Сравним AC_1 и AC_2 .

$$AC_1^2 = m^2 + k^2 - 2mk \cos 2\varphi,$$

$$AC_2^2 = m^2 + k^2 - 2mk \cos \varphi.$$

Функция $y = \cos x$ является монотонно убывающей на отрезке $[0; \pi]$, $0 < 2\varphi < \pi$, поэтому из условия $2\varphi > \varphi$ следует, что $\cos 2\varphi < \cos \varphi$ и $-\cos 2\varphi > -\cos \varphi$, поэтому $AC_1^2 > AC_2^2$,

$$AC_1 > AC_2. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем

$$c + a > b.$$

Аналогично доказывается, что $c + b > a$.

Чтобы проверить неравенство $a + b > c$, необходимо приложить два отрезка a и b так, чтобы они имели общую точку. Отрезком от развертки $SC_2AC_3BC_1$ треугольник SC_2A , приложим его к отрезку SC_1 с внешней стороны прежней развертки и сравним два треугольника аналогичным методом.

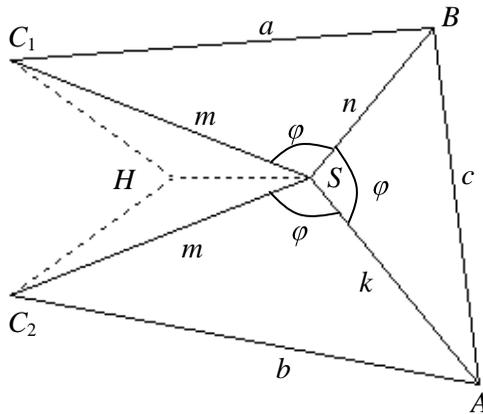


Рис. 3

Рассмотрим случай $90^\circ \leq \varphi < 120^\circ$ (рис. 3). Напротив угла φ в каждом треугольнике лежит большая сторона, поэтому $m < a, k < c$, $C_2A < C_2S + SA = C_1S + SA$. Для двух ломаных ASC_1 и ABC_1 , из которых одна охватывает другую, выполняется неравенство $C_1S + SA < C_1B + BA$, следовательно, $C_2A < C_1B + BA$ и неравенство $b < a + c$ доказано. Аналогично проверяются неравенства $a < b + c, c < a + b$.

2.5. Разработайте математическое и компьютерное моделирование восстановления тетраэдра с тремя равными углами при вершине из развертки.

§ 12. Моделирование срезанной треугольной призмы

Дана фигура $OABB_1O_1$, являющаяся прямой треугольной призмой, срезанной плоскостью (рис. 1). Параметры фигуры $OB = a$, $OA = b$, $\angle AOB = u$, $OO_1 = h$.

Требуется построить развертку этой фигуры и разработать моделирование процесса конструирования фигуры из развертки.

Разворот граней этой фигуры будем проводить в плоскость BOO_1 . Для системы координат, представленной на рис. 2, получаем координаты вершин многогранника:

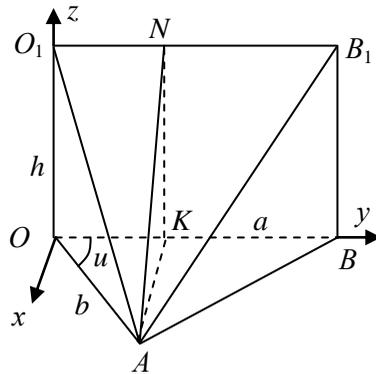


Рис. 1

$$O(0;0;0), B(0;a;0); A(b \sin u; b \cos u; 0), O_1(0;0;h), B_1(0;a;h) .$$

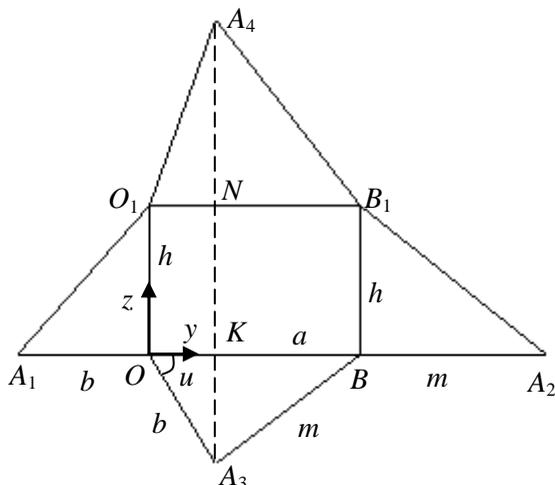


Рис. 2

Разверткой многогранника является фигура $OA_3BA_2B_1A_4O_1A_1$. Для развертки получаем длины сторон и координаты точек в системе координат Oyz :

$$\begin{aligned}
 O(0;0), A_3(b\cos u; b\sin u), BA_3 = BA_2 = m = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos u}, \\
 A_2(a+m;0), A_1(-b;0), O_1(0;h), B_1(a;h), O_1A_1 = O_1A_4 = \sqrt{b^2 + h^2}, \\
 OK = O_1N = b\cos u, KA_3 = b\sin u, A_3(b\cos u; b\sin u), \\
 NA_4 = \sqrt{O_1A_4^2 - O_1N^2} = \sqrt{h^2 + b^2 \sin^2 u}, A_4(b\cos u; h + \sqrt{h^2 + b^2 \sin^2 u}).
 \end{aligned}$$

По этим координатам можно построить развертку многогранника. Начнем моделирование многогранника из развертки.

Грань OAO_1 многогранника получается из треугольника OA_1O_1 поворотом $R_{OO_1}^{\pi-u}$ вокруг прямой OO_1 на угол $\pi - u$:

$$x' = x \cos t - y \sin t, y' = x \sin t + y \cos t, z' = z, t \in [0; \pi - u].$$

Подставляя координаты точки $A_1(0; -b; 0)$, получим координаты образа точки A_1 при повороте

$$x' = b \sin t, y' = -b \cos t, z' = 0, t \in [0; \pi - u]. \quad (1)$$

Величину угла B треугольника OAB найдем из равенства $b \cos u + m \cos B = a$, т.е.

$$\cos B = \frac{a - b \cos u}{m}.$$

При повороте R'_{M_0} вокруг точки $M_0(x_0; y_0)$ на угол t координаты преобразуются по формулам

$$x' - x_0 = (x - x_0) \cos t - (y - y_0) \sin t,$$

$$y' - y_0 = (x - x_0) \sin t + (y - y_0) \cos t.$$

При повороте R'_{M_0} вокруг прямой, параллельной оси Oz и проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, на угол t координаты преобразуются по формулам

$$x' - x_0 = (x - x_0) \cos t - (y - y_0) \sin t,$$

$$y' - y_0 = (x - x_0) \sin t + (y - y_0) \cos t, z' = z.$$

Грань BB_1A многогранника получается из треугольника BB_1A_2 поворотом $R_{BB_1}^{-(\pi-B)}$ вокруг прямой BB_1 на угол $-(\pi - B)$.

Для точки $B(0; a; 0)$ получим формулы поворота:

$$x' = x \cos t - (y - a) \sin t, y' = x \sin t + (y - a) \cos t + a, z' = z.$$

Подставляя координаты точки $A_2(0; a + m; 0)$, получим координаты образа точки a при повороте

$$x' = -m \sin t, y' = m \cos t, z' = 0, \quad t \in [-(\pi - B); 0]. \quad (2)$$

Грань OBA многогранника получается из треугольника OBA_3 поворотом $R_{OB}^{-\pi/2}$ вокруг прямой OB на угол $-\pi/2$.

$$z' = z \cos t - x \sin t, x' = z \sin t + x \cos t, y' = y, t \in [-\pi/2; 0].$$

Подставляя координаты точки $A_3(0; b \cos u; -b \sin u)$, получим координаты образа точки A_3 при повороте:

$$x' = -b \sin u \sin t, y' = b \cos u, z' = -b \sin u \cos t, \quad t \in [-\pi/2; 0]. \quad (3)$$

Двугранный угол между плоскостями O_1B_1B и O_1B_1A равен линейному углу ANK (рис. 1).

$$\operatorname{tg} \angle ANK = \frac{KA}{KN} = \frac{b \sin u}{h}.$$

Грань O_1B_1A многогранника получается из треугольника $O_1B_1A_4$ поворотом $R_{O_1B_1}^{\pi - \angle ANK}$ вокруг прямой O_1B_1 на угол $\pi - \angle ANK$.

$$z' - h = (z - h) \cos t - x \sin t, x' = (z - h) \sin t + x \cos t, y' = y.$$

Подставляя координаты точки $A_4(0; b \cos u; h + \sqrt{h^2 + b^2 \sin^2 u})$, получим координаты образа точки A_4 при повороте:

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{h^2 + b^2 \sin^2 u} \sin t, y' = b \cos u, \\ z' &= \sqrt{h^2 + b^2 \sin^2 u} \cos t + h, \quad t \in [0; \pi - \angle ANK]. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя формулы (1)-(4), можно изобразить динамику конструирования многогранника с помощью поворотов граней.

Программа «Срезанная призма» осуществляет построение многогранника из развертки (рис. 3).

2.6. Постройте развертки следующих многогранников (рис. 4—7), разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса конструирования многогранника из развертки:

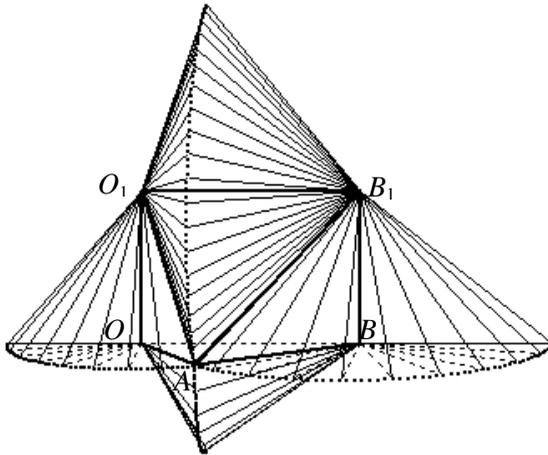


Рис. 3

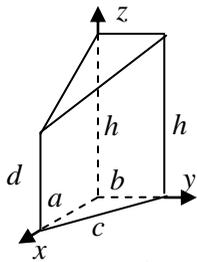


Рис. 4

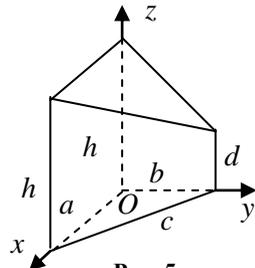


Рис. 5

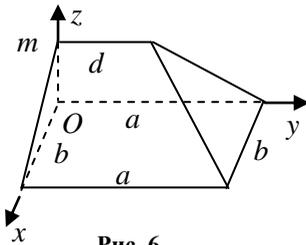


Рис. 6

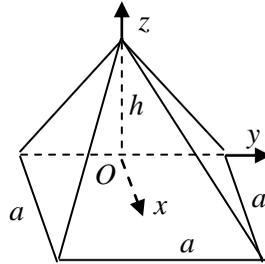


Рис. 7

§ 13. Задачи на моделирование пирамид и призм

2.7. На рис. 1 дана развертка пирамиды, основанием которой является квадрат, а одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания.

а) Выберите основные параметры a, b развертки и вычислите через них остальные параметры развертки.

б) Напишите программу построения этой развертки.

в) Разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса конструирования на экране компьютера пирамиды из этой развертки.

г) Рассмотрите обобщение этой задачи, заменив квадрат в основании на прямоугольник.

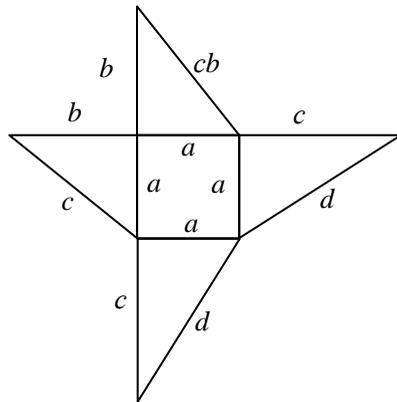


Рис. 1

2.8. На рис. 2 дана развертка пирамиды, основанием которой является квадрат, а одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания.

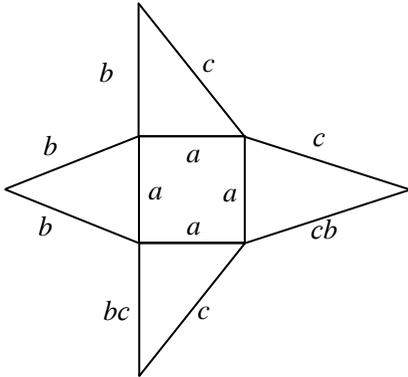


Рис. 2

а) Выберите основные параметры a , b развертки и вычислите через них остальные параметры развертки.

б) Напишите программу построения этой развертки.

в) Разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса конструирования на экране компьютера пирамиды из этой развертки.

г) Рассмотрите обобщение этой задачи, заменив квадрат в основании на прямоугольник.

2.9. На рис. 3 дана развертка правильной треугольной пирамиды.

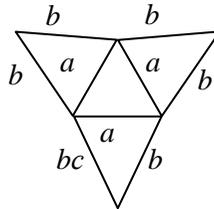


Рис. 3

а) Напишите программу построения этой развертки.

б) Разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса конструирования на экране компьютера пирамиды из этой развертки (рис. 4).

в) При каком условии из этой развертки получится прямоугольный тетраэдр с тремя прямыми углами в одной вершине? Постройте развертку этого тетраэдра.

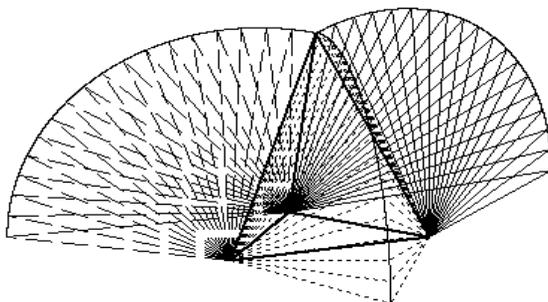


Рис. 4

г) На рис. 5 представлена другая развертка прямоугольного тетраэдра. Для какой развертки прямоугольного тетраэдра проще выполняется математическое и компьютерное моделирование?

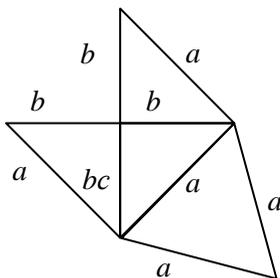


Рис. 5

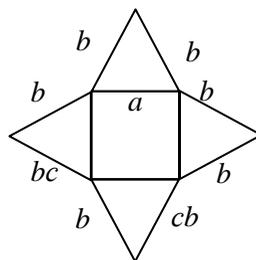


Рис. 6

2.10. На рис. 6 дана развертка правильной четырехугольной пирамиды.

- а) Напишите программу построения этой развертки.
- б) Разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса конструирования на экране компьютера пирамиды из этой развертки (рис. 7).
- в) Можно ли из этой пирамиды получить правильную четырехугольную пирамиду с четырьмя прямыми углами при вершине?

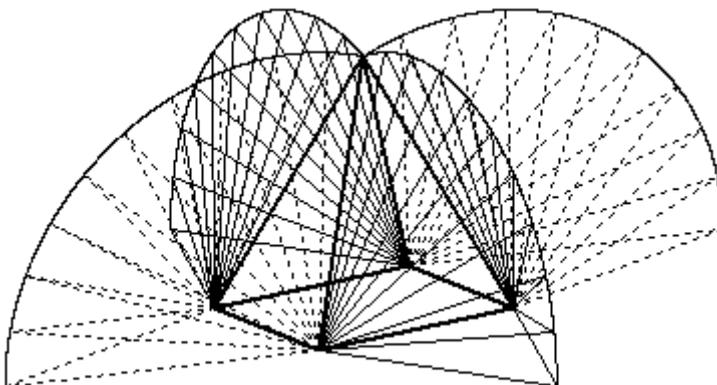


Рис. 7

2.11. На рис. 8 дана развертка правильной пятиугольной пирамиды.

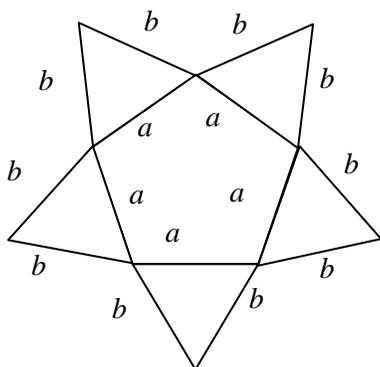


Рис. 8

а) Напишите программу построения этой развертки.

б) Разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса конструирования на экране компьютера пирамиды из этой развертки (рис. 9).

в) При каком условии из этой развертки получается пирамида, все ребра которой равны?

г) Рассмотрите обобщение этой задачи, заменив пятиугольник в основании на произвольный правильный n -угольник.

Сравните написанную программу с программой «Восстановление правильной пирамиды».

Сравните написанную программу с программой «Восстановление правильной пирамиды».

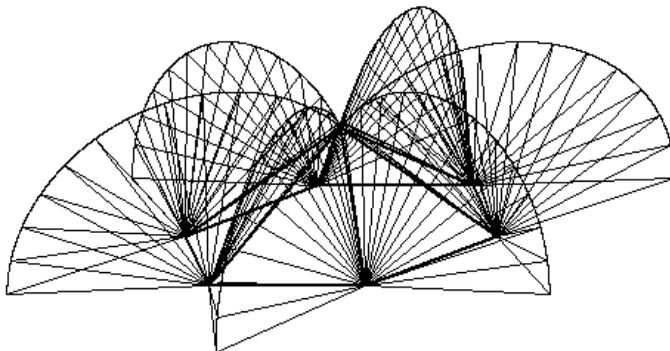


Рис. 9

2.12. На рис. 10, 11 изображено восстановление правильных треугольных пирамид из разверток. Одна пирамида повернута вокруг своей высоты к основанию на некоторый угол. Как в программе реализовать изменение положение тетраэдра, т.е. указанный поворот, изменением одного оператора?

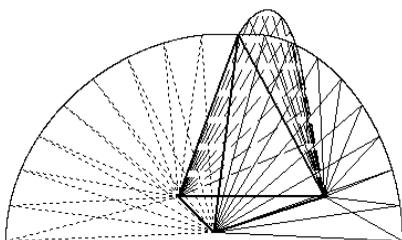


Рис. 10

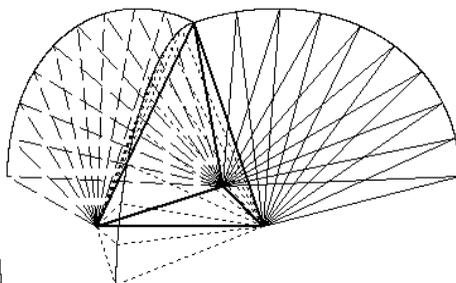


Рис. 11

2.13. Начинаем совершенствовать разработанную ранее модель. Разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса построения правильной пирамиды, в которой невидимые линии изображены пунктирными линиями (рис. 12).

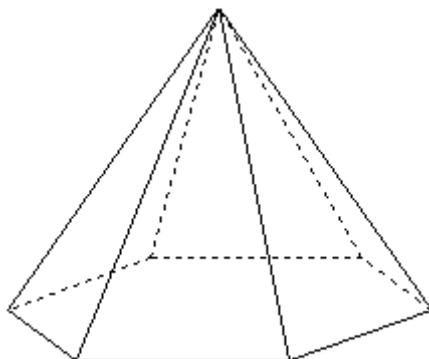


Рис. 12

Сравните написанную программу с программой «**Пирамида с пунктиром**».

2.14. Разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса построения правильной призмы. Невидимые линии изобразите пунктирными линиями (рис. 13).

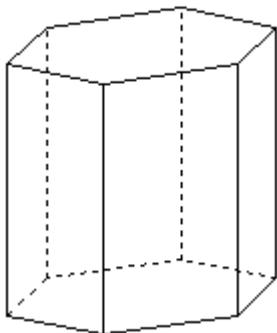


Рис. 13

Замечание. Верхнее основание призмы изображено сплошными линиями, а часть ребер в нижнем основании и боковых ребер изображены пунктирными линиями. При изменении количества ребер и коэффициентов искажения в программу нужно внести изменения на ограничения в условных операторах, чтобы верно были изображены пунктирные ребра.

Сравните программу с программой «**Правильная призма**».

2.15. Рассмотрим антипризму (рис. 14), которая имеет два равных параллельных основания, одно из которых повернуто вокруг их общей перпендикулярной оси на угол $180^\circ/n$, где n — число сторон основания. На рис. 15 представлена развертка этой антипризмы.

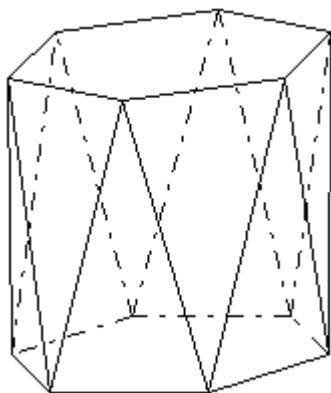


Рис. 14

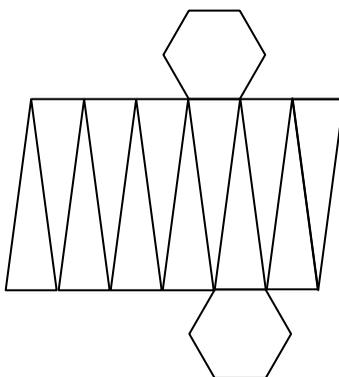


Рис. 15

Разработайте математическое и компьютерное моделирование процесса построения развертки правильной треугольной антипризмы (рис. 16).

2.16. Напишите программу построения развертки антипризмы, имеющей сторону основания a и высоту треугольной грани h . Напечатайте эти развертки для антипризм, представленных на рис. 17, 18.

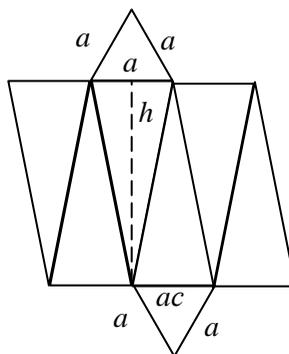


Рис. 16

Сравните свою программу с программой «Антипризма».

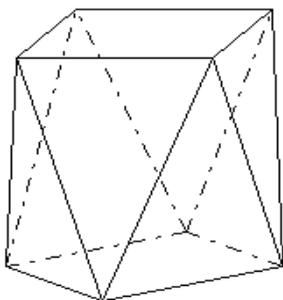


Рис. 17

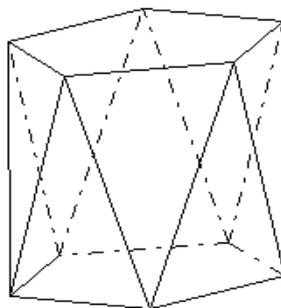


Рис. 18

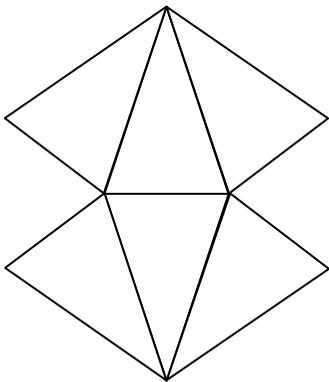


Рис. 19

Напишите программу конструирования n -угольной бипирамиды из соответствующей развертки.

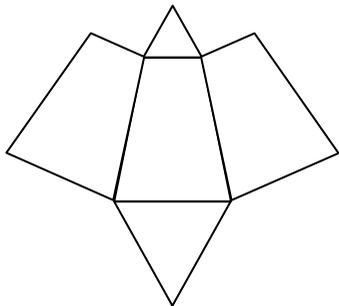


Рис. 20

Напишите программу конструирования n -угольной усеченной пирамиды из соответствующей развертки.

2.19. Существуют другие типы тетраэдров, которые не моделировались в данном разделе: каркасные тетраэдры; тетраэдры, имеющие единственную плоскость симметрии; тетраэдры, имеющие только две плоскости симметрии; зеркально-поворотные тетраэдры [19, с. 317—325].

Тетраэдр называется *каркасным*, если существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра.

Разработайте проект по моделированию развертки одного из этих типов тетраэдра и восстановлению тетраэдра из развертки.

2.17. На рис. 19 изображена развертка треугольной бипирамиды, т.е. поверхности, образованной объединением двух боковых поверхностей треугольных пирамид, имеющих общее основание.

Напишите программу построения развертки n -угольной бипирамиды, имеющей сторону основания a и высоту боковой грани h .

Напишите программу построения в пространстве n -угольной бипирамиды, имеющей сторону основания a и высоту боковой грани h .

2.18. На рис. 20 изображена развертка усеченной треугольной пирамиды.

Напишите программу построения развертки n -угольной усеченной пирамиды, имеющей сторону основания a и высоту боковой грани h .

Напишите программу построения в пространстве n -угольной усеченной пирамиды, имеющей сторону основания a и высоту боковой грани h .

2.20. Среди пирамид особое место занимают пирамиды, существование которых нужно доказать. Например:

а) пирамиды, высоты которых не пересекаются,

б) пирамиды, в которых две несмежные боковые грани перпендикулярны основанию (рис. 21).

Для построения в пространстве такой пирамиды продолжим до пересечения несмежные боковые грани, перпендикулярные основанию. Линия пересечения, т.е. прямая SH , перпендикулярна основанию. Разработайте программу по моделированию такой пирамиды.

В качестве параметров можно выбрать $Sh = h$, $\angle BHC = \varphi$, $HA = a$, $HB = b$, $HC = c$, $HD = d$.

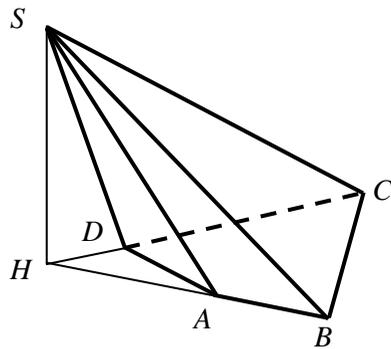
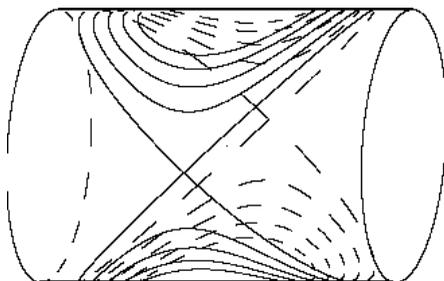


Рис. 21

Глава 3

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ



Что нас ожидает в этой главе?

1. Определение содержания каждого элективного курса.
2. Методические рекомендации по реализации некоторых вопросов элективного курса.
3. Направления дальнейших исследований по тематике элективного курса.

§ 14. Элективный курс «Моделирование линий и поверхностей»

Теоретический материал осваивается полностью и быстро, если осознается необходимость поиска соответствующих знаний.

Школьные учебники по математике подчеркивают, что для строительства во все времена требуются математические знания, т.к. математические знания позволяют рационально проводить измерения, вычисления и планирование в строительстве.

В различных учебниках геометрии базового уровня приводятся разнообразные примеры, поясняющие необходимость применения математики при выполнении строительных работ, но в старшем звене эти связи слабо просматриваются.

Высшее профессиональное образование должно в большей степени показывать примеры использования теоретических знаний для решения практических задач.

Изучение уравнений поверхностей второго порядка происходит в элективных курсах по математике и является обязательным элементом по многим специальностям в вузах. На практических занятиях с этими уравнениями проводятся простейшие манипуляции, в то время как использование этих уравнений предоставляет большие возможности для конструирования конструкций различной формы.

В системе индивидуальных заданий можно реализовать математическое моделирование простых строительных задач с использованием простейших конструкций, имеющих форму сферы, цилиндра и конуса. Использование компьютерных технологий позволяет наглядно изобразить работу модели, чтобы потом реализовать исследование на практике.

За основу элективного курса «Моделирование линий и поверхностей» следует взять материал главы «Приемы моделирования простейших объектов» и главы «Геометрия на сфере, цилиндре и конусе», добавив элементы компьютерной графики.

Цилиндр в пособии понимается как цилиндрическая поверхность, неограниченно продолжаемая в обе стороны (рис. 1),

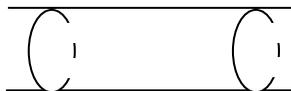


Рис. 1

т.е. поверхность, полученная при вращении прямой вокруг параллельной к ней прямой.

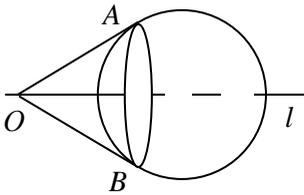


Рис. 2

В пособии используется утверждение: Отрезки касательных, проведенные к сфере из одной точки, равны (рис. 2). Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть сферу как поверхность, полученную при вращении окружности вокруг прямой, проходящей через центр сферы.

Докажем утверждение о том, что плоскость, не параллельная оси цилиндра и не перпендикулярная оси цилиндра, пересекает цилиндр по эллипсу (рис. 3).

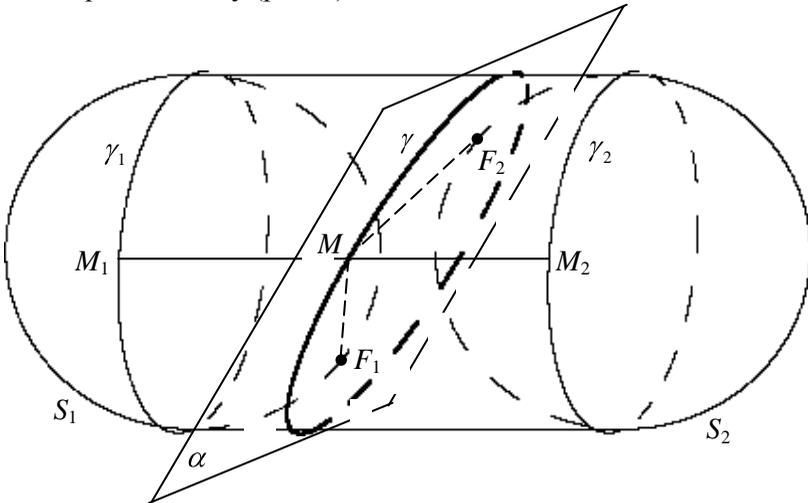


Рис. 3

Пусть плоскость α пересекает цилиндр по линии γ . Рассмотрим две сферы S_1 и S_2 , радиусы которых равны радиусу цилиндра. Пусть сферы S_1 и S_2 касаются плоскости, соответственно, в точках F_1 и F_2 , а цилиндра — по окружностям γ_1 и γ_2 .

Через произвольную точку M сечения γ проведем прямую, параллельную оси цилиндра, т.е. образующую цилиндра, и пусть она пересекает окружности γ_1 и γ_2 , соответственно, в точках M_1

и M_2 . Длина отрезка M_1M_2 не зависит от выбора точки M на сечении, т.к. длина отрезка M_1M_2 равна расстоянию между окружностями γ_1 и γ_2 .

Отрезки MF_1 и MM_1 равны как касательные, проведенные из точки M к сфере S_1 . Отрезки MF_2 и MM_2 равны как касательные, проведенные из точки M к сфере S_2 .

Следовательно $MF_1 + MF_2 = MM_1 + MM_2 = const$.

Сумма расстояний от произвольной точки M линии γ до двух фиксированных точек F_1 и F_2 является постоянной величиной, поэтому линия γ является эллипсом с фокусами F_1 и F_2 .

Постройте с помощью компьютерной программы аналог рис. 3, т.е. цилиндр, сечение цилиндра плоскостью и две сферы, касающиеся цилиндра. Расстояние между центрами сфер подберите экспериментально таким образом, чтобы чертеж иллюстрировал касание сфер с плоскостью. Сравните с программой «Сечение цилиндра плоскостью». Как найти расстояние между центрами двух сфер, если известны радиус R цилиндра и угол φ между осью цилиндра и плоскостью сечения?

Изучим моделирование пересечения двух цилиндров с перпендикулярными осями.

Рассмотрим цилиндр с осью Oy , заданный уравнением $x^2 + z^2 = R^2$, и цилиндр с осью Oz , заданный уравнением $x^2 + y^2 = R_1^2$, и пусть $R_1 < R$ (рис. 4).

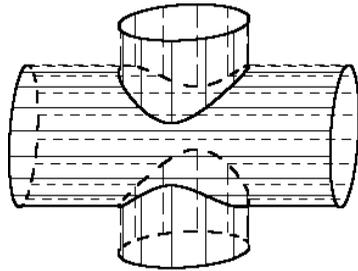


Рис. 4

Координаты точек линии пересечения двух цилиндров удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = R_1^2. \end{cases}$$

Линия пересечения двух цилиндров проектируется на плоскость Oxy в окружность $x^2 + y^2 = R_1^2$, поэтому из этого уравнения получаем параметрические уравнения проекции

$$x = R_1 \cos t, y = R_1 \sin t.$$

Подставляя значение $x = R_1 \cos t$ в уравнение $x^2 + z^2 = R^2$, найдем выражение для третьей координаты точек пересечения $z = \pm \sqrt{R^2 - R_1^2 \cos^2 t}$.

Окончательно параметрические уравнения линии пересечения принимают вид:

$$x = R_1 \cos t, y = R_1 \sin t, z = \sqrt{R^2 - R_1^2 \cos^2 t} \quad \text{— для верхней линии,}$$

$x = R_1 \cos t, y = R_1 \sin t, z = -\sqrt{R^2 - R_1^2 \cos^2 t}$ — для нижней линии (рис. 4).

Две замкнутые линии пересечения двух цилиндров с перпендикулярными осями называются бицилиндрикой. Изучите программу «Пересечение двух цилиндров».

Проекция бицилиндрики на плоскость Oyz имеет уравнение $z^2 - y^2 = R^2 - R_1^2$ и является частью гиперболы.

При $R = R_1$ проекция бицилиндрики на плоскость Oyz имеет уравнение $z^2 - y^2 = 0$ и является частью двух пересекающихся прямых. Бицилиндрика в этом случае вырождается в пару пересекающихся эллипсов (рис. 5).

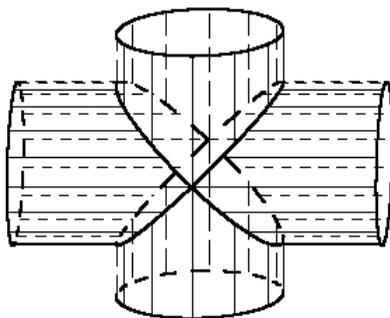


Рис. 5

Для самостоятельного исследования можно предложить построить семейство бицилиндров на цилиндре фиксированного радиуса R , при условии, что радиус R_1 перпендикулярных цилиндров меняется (соответствующий рисунок приведен в начале главы).

Более сложный проект — разработать программу моделирования пересечения сферы радиуса R с цилиндром радиуса R_1 . Если $R_1 = R/2$ и одна из образующих цилиндра проходит через центр сферы, линия называется линией Вивiani (рис. 6). Сравните ее с программами «Линия Вивiani» и «Линия Вивiani 2».

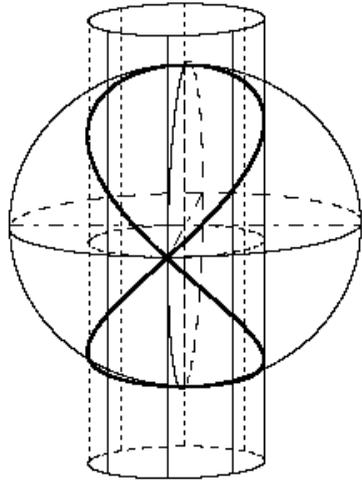


Рис. 6

При изучении различных систем координат на плоскости и в пространстве полезно рассмотреть косоугольную систему координат. Пусть сеть на плоскости состоит из правильных треугольников (рис. 7), тогда для нумерации горизонтальных прямых и наклонных прямых удобно использовать косоугольную систему координат. Если длина стороны наименьшего правильного треугольника равна R , то для узла с координатами (i, k) прямоугольные координаты равны $(iR + kR\cos 60^\circ; kR\sin 60^\circ)$.

Используя такое моделирование узлов сети, разработайте программу моделирования паркета, представленного на рис. 8. Сравните ее с программой «Паркет из окружностей в треугольнике».

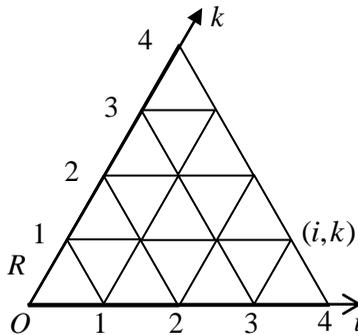


Рис. 7

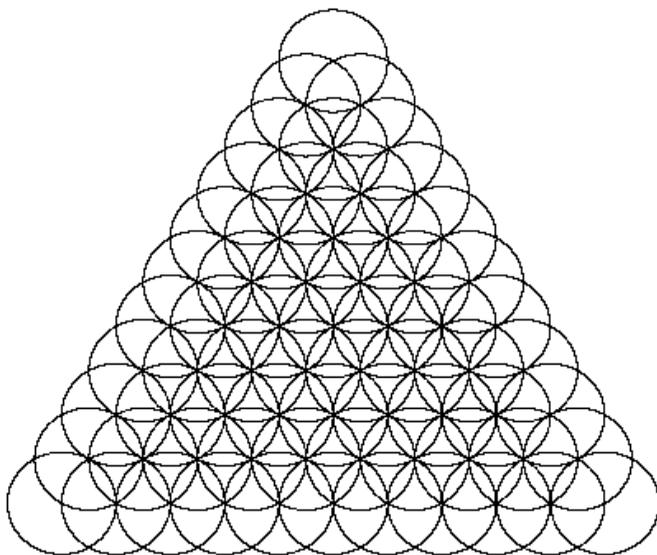


Рис. 8

Разработайте программу моделирования паркета, который состоит из окружностей, расположенных в правильном шестиугольнике (рис. 9). Сравните с программой «**Паркет из окружностей в шестиугольнике**».

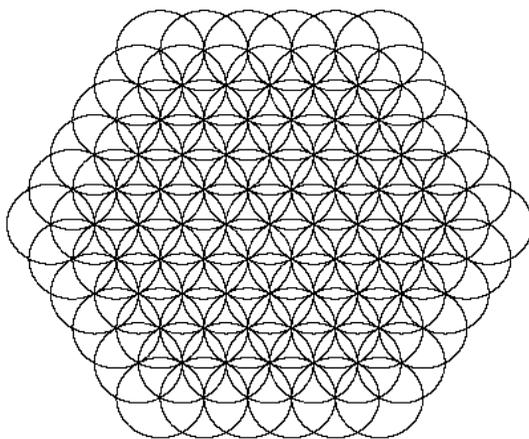


Рис. 9

§ 15. Элективный курс «Элементы математической картографии»

Математическое моделирование географических карт, т.е. математическая картография, сформировалось как наука давно, но в связи с появлением компьютеров это моделирование требует некоторых модификаций. Геометрические объекты для компьютерной графики в большинстве случаев лучше задавать параметрически, чтобы описать в дальнейшем непрерывный процесс образования объекта с помощью дискретных шагов. Суть математического моделирования сохраняется, но в вид задания объектов и их преобразований приходится вносить изменения.

В учебной и научно-популярной литературе отсутствуют элективные курсы, действующие межпредметные связи математики, информатики и географии, хотя геометрия, геоинформатика и география имеют много общих точек соприкосновения.

Элективный курс на стыке трех дисциплин предполагает как новое содержание, так и новые методы работы. Кратко это можно выразить тремя блоками: укрупнение дидактических единиц в обучении, расширение методов познания и проектирование поисковой деятельности.

За основу элективного курса следует взять материал двух глав — «Геометрия на сфере, цилиндре и конусе» и «Картографические проекции», добавив элементы компьютерной графики.

Математическая картография — раздел картографии, изучающий математические способы построения картографических проекций, их преобразований, способы и технические приемы применения проекций на практике. К математической картографии также иногда относят весь комплекс вопросов, связанных с математическим обоснованием карт (компоновка карт, расчет рамок и т.д.), а также способы и средства измерений на картах.

В математической картографии в основном различают две задачи: прямую и обратную. Прямая задача — исследование свойств картографических проекций, заданных уравнениями от широты и долготы точки на земном эллипсоиде.

Обратная задача математической картографии имеет целью нахождение проекций.

Поверхность Земли имеет конечную кривизну и ее нельзя отобразить на плоскость с сохранением всех пространственных отношений одновременно: углов между направлениями, расстояний и площадей поверхностей. Можно сохранить только некоторые из этих соотношений. Важное понятие в математической картографии — картографическая проекция, т.е. функция, задающая отображение географических координат точек на поверхности Земли на декартовы координаты на плоскости.

Изучение элементов математической картографии позволит учащимся получить более полное представление о геометрии, о роли математических знаний в окружающем мире, о применении геометрии в других науках: географии, астрономии и информатики.

Реализация элективного курса на данном материале будет способствовать улучшению межпредметных связей, которые, в свою очередь, являются интегрирующим звеном в системе дидактических принципов: научности, систематичности, целостности, предметности.

В методической литературе почти нет материалов по моделированию проекций.

Разработанное компьютерное и математическое моделирование представлено на содержательном материале геометрии (в курс которой входят простейшие элементы сферической геометрии) и других естественнонаучных дисциплин: географии, астрономии (использующих картографические проекции сферы) и информатики (элементы программирования и реализации компьютерного моделирования).

Особое значение в данном материале приобретает высокий потенциал геометрии в ориентации учащихся на предметы, связанные напрямую с ней. Применение разработанного материала в школьном обучении будет интересно ученикам, увлекающимся не только математикой, но и другими естественнонаучными дисциплинами. В элективном курсе они приобретут опыт нетрадиционного, оригинального использования знаний по другим предметам, расширят свои знания о возможном будущем профессиональном применении знаний.

Имеющиеся профессиональные пакеты математической картографии весьма дорогостоящи и сложны для непрофессионалов, поэтому реализация на их основе элективных курсов практически

невозможна. Актуальность элективного курса состоит в том, что возникает необходимость разработать компьютерное и математическое моделирование элементов картографии на основе параллельного проектирования, которое можно использовать в качестве основы для элективного курса.

Объект — процесс компьютерного и математического моделирования элементов математической картографии.

Предметом исследования в элективном курсе являются сферическая геометрия и основы математической картографии.

Целью исследования является разработка математического моделирование простейших объектов сферической геометрии и математической картографии для компьютерного моделирования.

Реализация указанной цели предполагает решение следующих задач:

1. Изучить литературу по методам изображения пространственных фигур на экране компьютера, а также изучить методы построения картографических проекций сферы.

2. Разработать математическое моделирование для построения кратчайших линий на сфере.

3. Найти формулы вычисления площадей на сфере и на проекции, а также коэффициент искажения на географической карте.

4. Написать компьютерные программы построения различных объектов на сфере в различных проекциях.

Существующие пакеты для построения географических карт используют сложный матричный аппарат и законы проективной геометрии, поэтому реализация элективных курсов на такой основе практически невозможна.

Основной гипотезой является предположение о том, что если разработать математическое моделирование некоторых проекций для географических карт на основе более простого параллельного проектирования, то можно реализовать соответствующий элективный курс в средней школе.

Теоретическая и практическая значимость исследования заключается в разработке принципиально нового моделирования элементов математической картографии на основе параллельного проектирования.

В первой части элективного курса следует освоить основные понятия сферической геометрии: зона видимости на сфере,

трехгранный угол и сферический треугольник, кратчайшие линии на сфере.

В задачах о построении объектов на сфере часто возникает потребность следующих простейших построений:

— изображение координатной сети, т.е. параллелей и меридианов на сфере;

— изображение кратчайшей линии (ортодромии) на сфере, соединяющей две заданные точки сферы;

— деление кратчайшей линии между двумя точками на заданное число частей;

— изображение кратчайшей линии, проходящей через заданную точку на сфере в заданном направлении, т.е. под заданным углом в данной точке к фиксированной координатной линии;

— восстановление перпендикуляра из данной точки на данной прямой;

— проведение перпендикуляра из данной точки на данную прямую;

— построение окрестности на сфере с центром в данной точке и данного радиуса;

— построение правильного n -угольника на сфере с центром в данной точке.

Во второй части рассмотрена классификация картографических проекций, произведено моделирование следующих проекций: азимутальная гномоническая проекция, азимутальная стереографическая проекция, азимутальная ортографическая проекция, азимутальная меридианная развертка, цилиндрическая гномоническая проекция, коническая гномоническая проекция.

Предлагаемый элективный курс «Математическая картография» предназначен для учащихся 11 классов физико-математического и естественнонаучного профилей, а также для студентов младших курсов, желающих расширить свои представления о роли математики в современном мире.

Основной целью элективного курса является формирование знаний, умений и навыков в построении элементов математической картографии; реализация межпредметных связей геометрии с информатикой, географией и астрономией.

Элективный курс математической картографии имеет следующие **развивающие и воспитательные цели:**

— Развитие интереса к предмету, использование эвристик для рационального моделирования и сокращения числа операций.

— Воспитание дисциплинированности, самостоятельности, аккуратности, чувства удовлетворения от решения поставленной задачи и получения совершенного рисунка.

Для достижения поставленных целей в рамках курса решаются следующие **задачи**:

— Обучить построению на экране компьютера элементов математической картографии с помощью компьютерного моделирования.

— Совершенствовать умения учащихся по компьютерному моделированию, по выводу математических формул.

— В учебно-познавательной области — дать учащимся знания о взаимосвязи элементов математической картографии с географией, геометрией, информатикой и астрономией; научить определять тип картографической проекции.

Прогнозируемые результаты деятельности после изучения элективного курса:

— научатся моделировать элементы математической картографии;

— получают более широкий взгляд на связь геометрии с географией, информатикой, астрономией.

Структура курса и организация обучения

Курс рассчитан на 18 учебных часов и состоит из двух тематических разделов: «Элементы сферической геометрии», состоящего из 7 занятий, и «Моделирование картографических проекций», содержащего 9 уроков. Данный элективный курс желательного проводить после изучения темы: «Сфера и шар». Контроль результатов обучения и оценка приобретенных школьниками умений и навыков производятся по результатам текущих оценок и защиты самостоятельных проектов по этой тематике.

Тематический план элективного курса «Математическая картография»:

1. Операторы компьютерной графики.
2. Основные понятия сферической геометрии.
3. Зона видимости на сфере.
4. Построение модели сферы, меридианов и параллелей на ней.

5. Трехгранный угол и сферический треугольник.
6. Измерение длин отрезков на сфере.
7. Кратчайшие линии на сфере.
8. Классификация картографических проекций.
9. Азимутальная гномоническая проекция.
10. Азимутальная стереографическая проекция.
11. Азимутальная ортографическая проекция.
12. Азимутальная меридианная развертка.
13. Цилиндрическая гномоническая проекция.
14. Коническая гномоническая проекция.
15. Цилиндрическая меридианная развертка.
16. Триангуляция сферы.
17. Защита самостоятельных проектов.

Учащиеся должны знать и уметь

Первый уровень умений и знаний

- Определять тип картографической проекции географической карты и математический закон ее образования.
- Определять географические координаты по координатной сетке.
- Наносить на географическую карту точку с данными географическими координатами.

Второй уровень умений и знаний

- Определять расстояние на карте между двумя данными точками на координатной линии.
- Определять коэффициенты искажения линейных размеров вдоль координатных линий.

Третий уровень умений и знаний

- Определять расстояние на карте между любыми двумя данными точками.
- Строить на компьютере геодезические линии между двумя данными точками в заданной проекции.
- Вычислять на компьютере коэффициент искажения площади для заданного криволинейного четырехугольника, образованного координатными линиями на заданной проекции.

Рассмотрим определение координат точки на конической проекции.

Для этого необходимо выполнить три стандартные операции.

Первой операцией является определение долготы точки M .

Пусть произвольная точка M находится внутри криволинейного четырехугольника $ABCD$ (рис. 1), причем из географической карты известны координаты точек $A(\lambda_A; \varphi_A), C(\lambda_C; \varphi_C)$.

Чтобы определить долготу λ_M точки M , нужно дугу AB и дугу DC разделить на одинаковое число частей, например, на 10, и определить долготу ближайшего меридиана к точке M . К сожалению, эта операция неосуществима циркулем и линейкой для произвольной дуги.

Немецкий математик К.Гаусс доказал, что окружность можно разделить на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, ..., 257, 65537, ... равных частей, но ее нельзя разделить на 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, ... равных частей. Для части окружности вопрос также решается непросто. Например, полуокружность можно разделить на 3 равные части — вспомните построение правильного шестиугольника, вписанного в окружность. А третью часть окружности нельзя разделить на три равные части. Если бы это было возможно, то всю окружность можно было бы разделить на 9 равных частей.

Для практических целей достаточно разделить дугу на 2^n равных частей, где $n \in \mathbb{N}$, тем более, что деление дуги AB пополам основывается на построении серединного перпендикуляра к отрезку AB (рис. 1).

Строим две окружности ω_2, ω_1 с центрами в соответствующих точках A и B . Точки E и F пересечения этих окружностей определяют серединный перпендикуляр к отрезку AB , который разделит как дугу AB , так и дугу DC пополам.

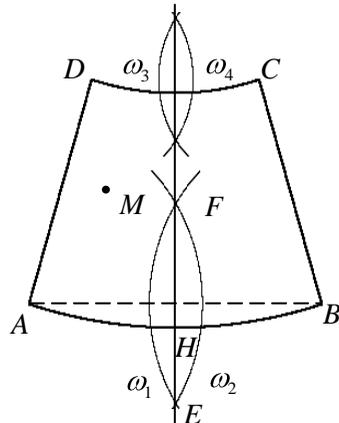


Рис. 1

Программа построения криволинейного четырехугольника и двух дуг для серединного перпендикуляра имеет вид:

```

Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
pi = 4 * Atn(1): x0 = 4000: y0 = 10000: r1 = 4000: r2 = 7000
t1 = 45 * pi / 32: t2 = 51 * pi / 32
For t = -pi / 4 To pi / 4 Step 0.001
x = r2 * Cos(t1) + 2400 * Cos(t): y = r2 * Sin(t1) + 2400 * Sin(t)
PSet (x + x0, y + y0)
Next t
For t = 3 * pi / 4 To 5 * pi / 4 Step 0.001
x = r2 * Cos(t2) + 2400 * Cos(t): y = r2 * Sin(t2) + 2400 * Sin(t)
PSet (x + x0, y + y0)
Next t
DrawWidth = 2
For t = t1 To t2 Step 0.001
x = r1 * Cos(t): y = r1 * Sin(t): PSet (x + x0, y + y0)
x = r2 * Cos(t): y = r2 * Sin(t): PSet (x + x0, y + y0)
Next t
For r = r1 To r2
x = r * Cos(t1): y = r * Sin(t1): PSet (x + x0, y + y0)
x = r * Cos(t2): y = r * Sin(t2): PSet (x + x0, y + y0)
Next r

```

Далее аналогично построим серединный перпендикуляр к отрезку AH и т.д.

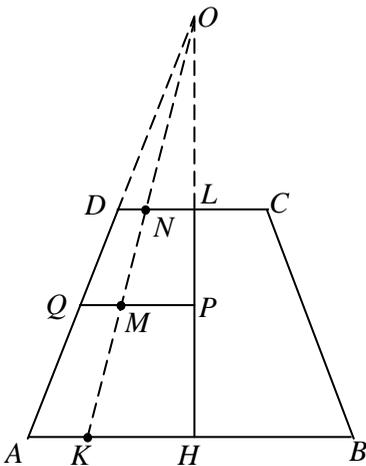


Рис. 2

Если центр конической проекции известен, то деление дуги пополам можно осуществить гораздо проще. Проведем диагонали AC и BD в равнобедренной трапеции $ABCD$ и соединим точку пересечения этих диагоналей с центром конической проекции.

Итак, будем считать, что можно найти с определенной точностью долготу точки M .

Рассмотрим *вторую операцию* по проведению меридиана через точку M для случая, когда центр конической проекции является недоступным.

Пусть в равнобедренной трапеции построен серединный перпендикуляр HL к основаниям трапеции. Из точки M опустим перпендикуляр MP на HL и проведем отрезок PQ . Соединим мысленно точку M с недостижимым центром O конической проекции. Пусть $K = OM \cap AH$, $N = OM \cap DL$, тогда треугольники OQP , OAH , ODL подобны и

$$\frac{QM}{MP} = \frac{AK}{KH} = \frac{DN}{NL}.$$

Первый способ построения точек K и N (рис. 3). Построим произвольные отрезки LD_1 , HD_2 , равные отрезку PQ и отметим на них точки M_1, M_2 , для которых $LM_1 = PM = HM_2$. С помощью параллельного проектирования получаем искомые точки N и K .

Второй способ не требует откладывания равных отрезков и базируется на использовании подобия треугольников.

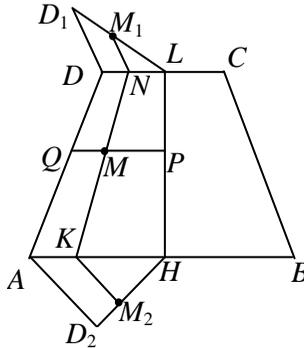


Рис. 3

Пусть $R = QL \cap DP$, $M_0 = MR \cap DL$ тогда $\triangle QPR \sim \triangle LRD$ и $\frac{PM}{MQ} = \frac{DM_0}{M_0L}$.

Пусть, $T = AL \cap DH$, $K = M_0T \cap AH$, тогда $\triangle DLT \sim \triangle HAT$ и $\frac{DM_0}{M_0L} = \frac{HK}{KA}$, следовательно, $\frac{HK}{KA} = \frac{PM}{MQ}$.

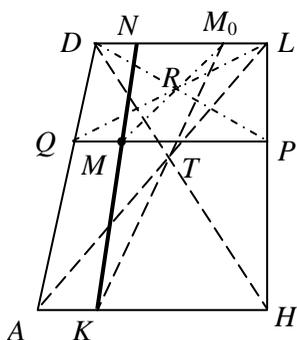


Рис. 4

Рассмотрим третью операцию по определению широты точки M .

Уточняем цель определения значения широты. Если нужно передать географические координаты, то будем определять дробную часть градуса в минутах.

Если нам нужна информация для вычисления в компьютере, то будем определять дробную часть градуса в виде десятичной или обыкновенной дроби.

Для точек N и K широты, соответственно, равны φ_C и φ_A . Определяем разность широт $\varphi_C - \varphi_A$, которая на большинстве географических карт является целым числом. Визуально определяем по карте, на какое число частей можно разделить отрезок KN , чтобы построения были точными. Выберем, например, $n=10$. На произвольном луче (рис. 5), выходящем из точки N , откладываем 10 равных отрезков произвольной длины. Последнюю конечную точку S соединяем отрезком с точкой K . Проектируя точку M на отрезок NS параллельно KS , определяем приблизительно долю от разности $\varphi_C - \varphi_A$. На рис. 5 для точки M в северном полушарии получаем $\varphi_M = \varphi_A + 0,6(\varphi_C - \varphi_A)$.

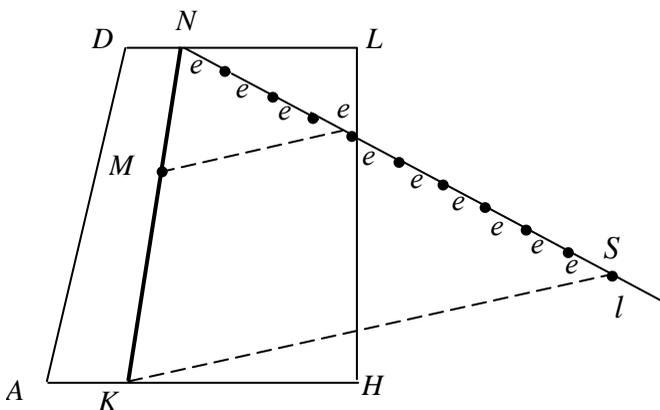


Рис. 5

В качестве самостоятельного проекта можно исследовать следующую проекцию.

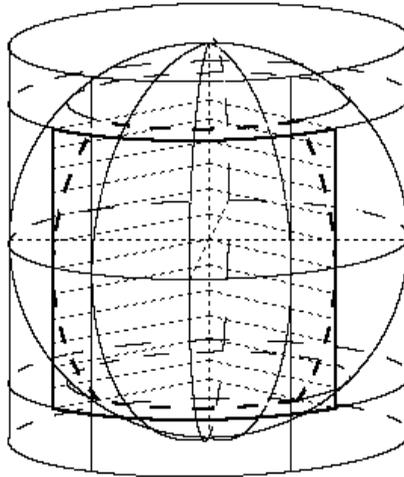


Рис. 6

На рис. 6 изображена новая проекция, не отраженная в таблице учебного пособия. Проектирование точек сферы осуществляется от оси цилиндра, касающегося сферы, на поверхность цилиндра ортогонально поверхности цилиндра. Изучите программу **«Ортогональная проекция от оси на цилиндр»** и восстановите математическое моделирование этой проекции. Вычислите масштабы длин по меридианам, по параллелям и по площадям.

§ 16. Элективный курс «Геометрия метрических пространств»

Актуальность и новизна компьютерного моделирования геометрии окружающего мира. Практика показывает, что активизации мыслительной деятельности способствует динамическое рассмотрение геометрических объектов. Движение — могучая сила, которая делает созерцание «живым» [10].

Трансформация геометрических объектов в значительной степени расширяет познавательные способности ребенка, его познавательный опыт. Если геометрические модели будут двигаться,

совпадать, увеличиваться или уменьшаться, тогда скучные и неподвижные предметы на глазах учеников оживут, дадут начало многим новым формам мысли, и перед учителем расширятся широкие возможности для новых методических приемов и демонстраций. «Оживить» геометрический процесс позволяет компьютерное моделирование.

Оценивая исследование, проведенное в пособии [18], можно констатировать, что на элементарном материале в новой метрике построена «теория серединного перпендикуляра и окружности, описанной около треугольника». Структура серединного перпендикуляра значительно отличается от соответствующей структуры перпендикуляра на евклидовой плоскости. Но для построения геометрии на плоскости суммы модулей необходимо провести исследование этого вопроса с различных точек зрения — исследовать аналитическим методом и предъявить геометрический метод построения данного множества. В других геометриях простейшие понятия евклидовой геометрии также иногда сложно интерпретируются. Например, в псевдоевклидовой геометрии существует три типа окружностей: действительного радиуса, мнимого радиуса и нулевого радиуса.

За основу элективного курса следует взять материал главы 3 «Моделирование геометрии метрических пространств» пособия [18], добавив элементы компьютерной графики.

Геометрия окружающего мира не обязательно должна основываться на евклидовой геометрии, использующей в качестве фундаментального метрического соотношения теорему Пифагора. Для моделирования некоторых процессов наиболее естественно выбрать другие способы измерения расстояний.

Значительная трудность при таком моделировании состоит в переосмыслении основных понятий геометрии окружающего мира.

Первая проблема. На современном этапе обучения учащиеся и студенты знакомятся с различными моделями описания действительности: информационной картиной мира, физической картиной мира, естественнонаучной картиной мира и т.д.

В каждой из этих моделей может использоваться математическое и компьютерное моделирование как элемент соответствующей картины мира.

Каждая новая концепция соответствующей картины мира требует переосмысления фундаментальных понятий соответствующей отрасли знаний. Достаточно вспомнить, что появление теории относительности потребовало нового видения взаимосвязи пространства и времени, зависимости массы движущегося объекта от его скорости.

Концепция современного образования направлена на формирование субъекта, способного творчески решать возникающие проблемы. Решение каждой новой проблемы приводит либо к изменению прежнего способа решения задачи, либо к новому видению изучаемых объектов в известной системе.

Как же сформировать умения переосмысления основных понятий в математике и информатике на доступном для учащихся материале и чтобы он обладал новизной и привлекательностью?

Психолог М.А.Холодная отмечает необходимость такой формы организации учебной информации, которая позволяет школьнику «мысленно участвовать в процессе рождения нового понятия, пересматривая его содержание по мере углубления представлений о соответствующих математических объектах вплоть до самостоятельного выстраивания нового понятия на базе некоторых исходных понятийных знаний».

Ориентиром для переосмысления основных понятий является проведение аналогий вначале по формированию определений, а затем по выдвигению гипотезы, и, наконец, по формированию обоснования того, что предложенное понятие является естественным в рассматриваемой модели.

В классическом понимании процесс использования аналогий строится на основе переноса отношений и свойств между объектами из известной системы знаний в формируемую систему знаний. В нашем случае наибольшая трудность состоит в том, что основных понятий в формируемой системе знаний еще нет.

Вторая проблема. Решая задачи с модулями, учащиеся в большинстве случаев не видят их значимости (за исключением необходимости использовать модуль выражения при извлечении корня четной степени). А если нет мотивации к использованию, то отпадает и потребность в изучении.

Авторы олимпиадных задач по математике [28, с. 77, 78, 81, 82] включают задания, использующие простейшие понятия

метрических пространств. Экспериментальный учебник Дениз Сечеи по геометрии [17] содержит измерение расстояний с помощью геометрии «такси» и геометрии максимумов. За рамками научно-популярной литературы остаются неисследованными вопросы интерпретации геометрических понятий в метрических пространствах, аналогичных евклидовой плоскости. Новизна данной тематики состоит в изучении интерпретации известных геометрических понятий в различных метрических пространствах. Новые перспективные направления возникают при включении компьютерного моделирования для построения зон Дирихле в различных метрических пространствах. Отправной точкой для переосмысления основных понятий является разрешение возникшего противоречия между попыткой проведения аналогии с известными фактами евклидовой плоскости и невозможностью оставаться в рамках известных представлений об изучаемом объекте. Компьютерное представление объекта в новом метрическом пространстве быстрее убеждает, что необходимо изменять точку зрения на известный ранее объект. Различные изображения нового объекта на компьютере позволяют учесть возникающие особенности, которые исследователь иногда может потерять при рассмотрении многочисленных комбинаций.

Компьютерное моделирование геометрии окружающего мира может создаваться на различных уровнях.

Дошкольники с интересом осуществляют расстановку игрушек, имитирующих мебель, на плане комнаты. В этом случае имеем *первый уровень, имитирующий замену объектов их игрушечными моделями, компоновку объектов и перенос их функционального значения.*

Учащиеся начальных классов на уроках информатики осуществляют расстановку моделей мебели на экране компьютера. В этом случае имеем *второй уровень моделирования геометрии окружающего мира*, который выражается в соотношении размеров размещаемых объектов (компьютерных примитивов) с размерами комнаты.

Учащиеся основной школы могут представить простейший проект по изображению садово-паркового ландшафта. Моделирование геометрии окружающего мира снова осуществляется, в основном, примитивами, но на этом уровне ученики могут

разделить отрезок на экране компьютера на равное число частей, разделить угол пополам и т.д. Используя простейшие компьютерные программы, они могут красиво и достаточно точно построить графики функций или фигуру из комбинаций графиков функций. В этом случае имеем *третий уровень моделирования геометрии окружающего мира*, который характеризуется вначале разработкой эскиза изображаемой картины, затем подбором необходимых объектов и потом либо трансформацией примитивов, либо построением фигуры с помощью компьютерной программы.

Учащиеся старших классов разрабатывают проекты моделирования траектории тела, брошенного под углом к горизонту, моделирования геометрии движения частицы в броуновском движении, и т.д. В этом случае имеем *четвертый уровень моделирования геометрии окружающего мира*, который выражается в моделировании кривых или поверхностей, удовлетворяющих определенным условиям (для физических задач, зависящих в основном от силы тяжести; для математических задач, удовлетворяющих некоторым условиям связи между переменными).

Учащиеся, разрабатывающие научно-исследовательские проекты, расширяют математический аппарат для моделирования, применяют языки программирования высокого уровня, чтобы использовать объектно-ориентированное программирование. В этом случае имеем *пятый уровень моделирования геометрии окружающего мира*, который выражается в синтезе математики и информатики для представления динамики геометрического объекта или трансформации модели физического объекта. Примерами таких проектов являются моделирование динамики замечательных точек треугольника, моделирование пространственного многогранника из плоской развертки, моделирование движения четырехзвенного шарнирного механизма [19, 21].

Аналогия является общенаучным методом, как при обучении, так и при научном поиске. Какую особенность можно выделить в структуре деятельности при использовании аналогий в переосмыслении основных понятий конструирования новой геометрии?

Используя исследования психологов о структуре творческой деятельности [11], в последнем случае мы имеем именно творческую деятельность, т.к. она характеризуется следующими признаками:

- созданием новых понятий;
- неопределенностью возможности постановки аналогичных задач;
- осознанием того, что при отсутствии в предметной области способа решения поставленной задачи можно сформулировать аналогичную задачу.

Некоторые направления формирования метода переосмысления основных объектов.

1. Как показывают приведенные примеры в [18], для некоторых классов задач целесообразно разрабатывать модель соответствующей геометрии.

2. Выделяется класс объектов K , достаточно полно изученных в некоторой области знаний Z , например, на плоскости с евклидовой метрикой. Пусть объекты этого класса характеризуется некоторым определением, свойством или отношением f .

3. В другой области знаний Z_1 (например, на плоскости с другой метрикой) требуется определить объекты K_1 , используя свойство f .

4. Выделяются этапы выстраивания аналогий посредством формирования следующей деятельности:

- выбирается метрическое пространство для моделирования геометрии в реальной задаче (определяется аналогия по способу измерения расстояний);
- определяется уравнение для множества точек нового понятия (проводится аналогия по моделированию искомого множества точек с помощью метода координат);
- составляется компьютерная программа для изображения на экране компьютера множества точек, удовлетворяющих полученному уравнению (определяется аналогично естественный параметр для компьютерного моделирования);
- тестируется компьютерная программа для изучения различных особенностей (проводится сопоставление результатов тестирования с аналогичными рисунками);
- аналитическим методом упрощается полученное уравнение (аналогично методу на плоскости с евклидовой метрикой).

По способу переноса метода решения задачи можно отметить, что аналогия между изучением серединного перпендикуляра в различных геометриях требует многих новых умений.

На евклидовой плоскости переход от условия на равенство длин двух отрезков к уравнению осуществляется возведением уравнения в квадрат и упрощением полученного уравнения.

На плоскости суммы модулей переход от условия на равенство длин двух отрезков к уравнению осуществляется раскрытием модулей, что требует рассмотрения нескольких случаев. После получения уравнения в каждом случае необходимо отобразить те значения переменных, которые удовлетворяют наложенным ограничениям.

Основная трудность изучения данного вопроса состоит в правильной интерпретации объекта плоскости суммы модулей, т.к. мы вынуждены пользоваться изображениями на евклидовой плоскости. В этом случае учащийся мыслит двумя категориями и мысленно находится одновременно в двух пространствах. Проговаривая определения и утверждения в смысле изучаемой геометрии суммы модулей, он изображает их объектами евклидовой плоскости.

Внешняя предметная деятельность человека, сформированная в новой геометрии, как орудийная постепенно трансформируется в психику и становится орудийно-опосредованной психикой.

Чтобы сформировать методологические знания для разработки способа решения творческих задач, полезно учитывать соотносе-

ние элементов структуры задачи и структуры деятельности.

В психологии задача определяется как цель, данная в условиях. Цель указывается в «требовании» задачи, а условие ее достижения — в рубрике «Дано». Условия достижения цели указываются также в способе ее достижения. На рис. 1 представлены макроэлементы структуры задачи.

Условие задачи
Требование задачи
Способ решения задачи
Примечания к задаче (его может не быть)

Рис. 1

В *репродуктивных* задачах известны условия и требования задачи. Способ достижения также известен, и его нужно применить в данной конкретной ситуации.

В *продуктивных* задачах условие и требование задачи также известны, но способ неизвестен, его нужно конструировать на основе положений данной области знаний.

В *творческих* задачах цель задана в «отсутствии условий ее достижения», т.е. цель и предмет могут быть известными частями задачи, хотя и эти части могут быть представлены недостаточно, а способ решения задачи неизвестен. В предметной области знаний отсутствуют знания, на основе которых он мог бы быть разработан [11, с. 43—44].

На рис. 2 представлены макроэлементы структуры деятельности.

Цель — то, что должно быть достигнуто
Предмет — то, что подлежит преобразованию, исследованию
Орудия — то, с помощью чего осуществляется преобразование предмета деятельности
Операции — процедуры воздействия орудиями на предмет
Субъект деятельности — ее носитель
Продукт — результат, который получается в итоге

Рис. 2

Формирование умений решать творческие задачи должно пройти естественные для этого предшествующие этапы решения задач: вначале репродуктивных задач для обучения методу решения задач и умений выделять этапы решения задач, а потом продуктивных задач для формирования этапов поисковой деятельности по расширению тематики задач.

Продуктивные задачи направлены в большей степени на разработку орудий деятельности и операций деятельности.

Творческие задачи, также как и продуктивные задачи, направлены на разработку орудий деятельности и операций деятельности, но дополнительно — на расширение цели и предмета деятельности.

Чтобы сформировать умение решать учебные творческие задачи, моделируется структура предстоящей деятельности, учитывающая структуру задач.

Цель деятельности — ввести новые понятия и получить геометрические факты в метрических пространствах
Предмет — метрические пространства SM, MM
Орудия деятельности — свойства модулей чисел, метод
Операции — упрощение равенств с модулями и их геометрическое истолкование
Субъект деятельности — учащийся, разрабатывающий проект по математике
Продукт — результат, который получается в итоге разработки проекта

Рис. 3

Одной из важнейших геометрических задач на евклидовой плоскости является задача о делении окружности на заданное число равных частей.

Немецкий математик К.Гаусс доказал теорему: правильный n -угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда число n можно представить в виде $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_s$, где p_1, p_2, \dots, p_s — различные простые числа вида $2^{2^k} + 1$. Например, числа 2, 4, 3, 5, 6, 8, 10, 17 можно представить в таком виде, и соответствующие правильные многоугольники можно построить с помощью циркуля и линейки. Числа 7, 9, 11, 13, 14 нельзя представить в таком виде, поэтому соответствующие правильные многоугольники невозможно построить.

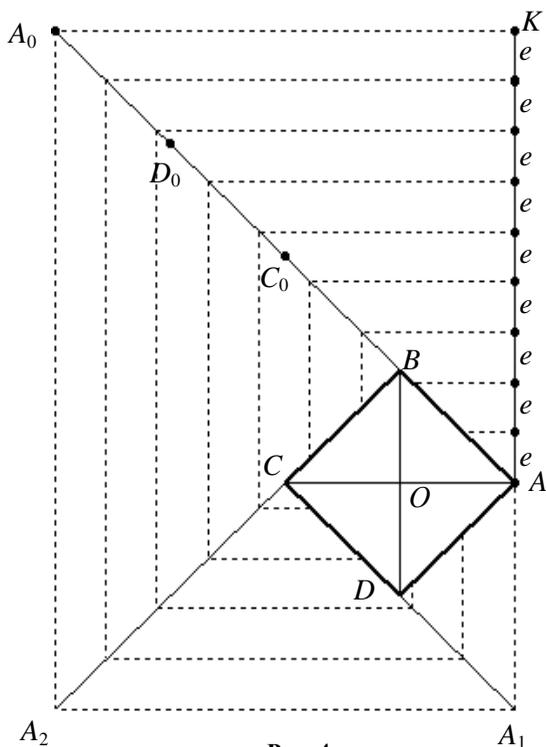


Рис. 4

Представляет интерес рассмотрение аналога этой проблемы на плоскости суммы модулей. Будем использовать обычные инструменты евклидовой плоскости, т.е. линейку и циркуль.

На евклидовой плоскости окружность невозможно распрямить данными геометрическими инструментами. На плоскости суммы модулей распрямление окружности представлено на рис. 4. Построим окружность $ADCBA$ радиуса R с центром в точке O .

Ломаную ADC распрямим в отрезок CA_1 , ломаную BCA_1 — в отрезок BA_2 , ломаную ABA_2 — в отрезок AA_0 . Таким образом, вся окружность $ADCBA$ распрямлена в отрезок AA_0 , и пусть точки B, C_0, D_0 делят отрезок AA_0 на четыре равные части.

Чтобы разделить отрезок AA_0 на n равных частей, построим произвольный луч AK и на нем отложим n равных отрезков.

Параллельным проектированием разделим отрезок AA_0 на n равных частей, а затем и саму окружность произвольного радиуса на n равных частей.

Для рис. 4 напишите программу, которая быстро представит эти операции на экране компьютера для любого натурального числа n , где $n \geq 2$, и сравните с программой «Деление окружности в метрике SM».

Можно констатировать, что такая задача вполне посильна для учащихся. Но ее лучше не объяснять учащимся, а создать мотивацию к выдвижению гипотезы по разрешимости этой задачи и поиску метода решения.

Учитывая структуру предстоящей деятельности и технологию проектирования поисково-исследовательской деятельности по математике и информатике [23], сформулируйте вначале последовательность этапов по подготовке к решению этой задачи, а затем по реализации этих этапов.

Понятие метрики в математике используется как способ измерения расстояния между объектами. В последнее время понятие метрики широко используется в информатике, в управлении.

§ 17. Элективный курс «Группы и элементы симметрии фигур»

За основу элективного курса следует взять материал главы «Группа симметрий в окружающем мире», добавив элементы компьютерной графики и повторив раздел о движениях плоскости и пространства.

Геометрические преобразования — тема школьного курса геометрии, которая застывшие формы геометрических фигур позволяет сделать динамичными. Для глубокого изучения этого раздела требуется развитое абстрактное мышление. В элективном курсе по математике и информатике развитию абстрактного мышления может способствовать как наглядное статическое представление объектов с элементами его симметрии, так и наглядное представление процесса преобразования фигуры, т.е. динамика преобразования.

Моделирование преобразований геометрических фигур позволяет ученикам лучше осознавать их свойства, способствует развитию пространственного мышления, помогает учащимся сознательно разобраться, полнее и глубже понять предлагаемый материал.

Предложенный материал элективного курса предназначен для учащихся 10—11 классов с углубленным изучением математики и информатики.

Цель элективного курса — формирование знаний, умений и навыков моделирования элементов симметрии плоских и пространственных фигур.

Задачи:

1. Актуализировать понятия преобразования, движения, симметрии, группы и их практическое применение и применять их на практике.
2. Сформировать умения и навыки в построении простейших геометрических фигур с элементами симметрии.
3. Изучить основные операторы языка VisualBASIC и Quick-Basic.
4. Сформировать навыки моделирования для построения геометрических фигур с элементами симметрии.
5. Научить учащихся использовать цикл в языке программирования для моделирования элементов симметрии правильных многоугольников с применением элементарных преобразований.

В элективном курсе потребуются знания как из курса математики, так и из курса информатики, поэтому рекомендуется проводить интегрированные занятия математики и информатики.

Содержание данного элективного курса имеет большую практическую направленность и, следовательно, каждое занятие следует строить таким образом, чтобы изучение теоретических знаний сочеталось с практической деятельностью.

В ходе изучения данного элективного курса развиваются творческие способности ребенка, гибкость его мышления, «геометрическая зоркость», интуиция, воображение, способность к оперированию образами, изобразительные навыки. У учащихся развиваются такие умения как наблюдение, измерение, вычерчивание, конструирование и моделирование. Возможность введения в курс эмоционально окрашенного материала способствует формированию у учащихся положительного эмоционально-целостного отношения к предмету.

В конце изучения курса учащиеся должны уметь находить групповые свойства на множестве с заданной операцией; моделировать построение геометрических фигур с элементами

симметрии; использовать цикл в языке программирования для моделирования элементов симметрии правильных многоугольников и многогранников с применением элементарных преобразований; применять полученные знания и усвоенные методы в самостоятельной деятельности.

В школьном курсе информатики учащиеся изучают логические операции: дизъюнкцию, конъюнкцию, импликацию. В профильном курсе информатики — сложение по модулю два и равносильность, иногда — штрих Шеффера и стрелку Пирса. Зная значения двух аргументов a и x , можно определить всегда результат логической операции, т.е. $a * x = b$. В некоторых логических задачах возникает вопрос об обратной операции, т.е. нахождении аргумента x по заданным a и b в уравнении $a * x = b$. Учащиеся пытаются решить такие уравнения методом перебора, используя таблицу истинности.

Проблема усугубляется двумя частными случаями. Уравнение $1 \vee x = 0$ не имеет решения, а уравнение $0 \wedge x = 0$ имеет два решения. Эти контрпримеры останавливают дальнейшие попытки решать уравнения.

Чтобы сформировать быстрые навыки определения групповых свойств логических бинарных операций, необходимо провести подготовительную работу по систематизации различных свойств, используя следующую таблицу и заменяя знак операции $*$ соответствующей логической операцией.

Свойства Операция	$x * 0$	$x * 1$	$x * x$	$x * \bar{x}$	Коммутативность	Ассоциативность
\vee						
\wedge						
\rightarrow						
\leftrightarrow						
\oplus						
$ $						
\downarrow						

Подробно нужно рассмотреть решение уравнения $a \oplus x = b$, в котором a, b — данные логические величины, а x — неизвестная логическая переменная

Решение. Прибавляя слева к левой и правой частям уравнения логическую константу a по модулю два, получим

$$a \oplus (a \oplus x) = a \oplus b \text{ или } (a \oplus a) \oplus x = a \oplus b, 0 \oplus x = a \oplus b.$$

Для данного уравнения получаем решение

$$x = a \oplus b.$$

Решение уравнения по этой формуле является алгоритмизируемым. В методе вывода этой формулы наглядно видно использование свойств данной операции. Обычно свойства операции перечисляются в учебниках и потом используются только при упрощении громоздких формул. Предложенный вывод решения этого уравнения создает мотивацию использования ассоциативного свойства и свойства операции с ложным высказыванием и с истинным высказыванием.

Можно ли распространить предложенный метод на уравнение

$$a \vee x = b? \tag{1}$$

Основная идея решения — это изоляция переменной x в левой части уравнения. Можно быстро убедиться, что для уравнения $a \vee x = b$ изоляция переменной оказывается невозможной. Однако одна попытка заслуживает внимания

$$\begin{aligned} \bar{a} \vee (a \vee x) &= \bar{a} \vee b, (\bar{a} \vee a) \vee x = \bar{a} \vee b, 1 \vee x = \bar{a} \vee b, \\ 1 &= \bar{a} \vee b. \end{aligned}$$

Вначале кажется, что мы не получили способа решения уравнения и полученное равенство имеет отдаленное отношение к данному уравнению.

Вспомним, что уравнение $a \vee x = b$ не всегда имеет решение. Из данного уравнения получено соотношение $\bar{a} \vee b = 1$, т.е. доказано, что если уравнение имеет решение, то его коэффициенты должны удовлетворять условию

$$\bar{a} \vee b = 1. \tag{2}$$

Для уравнения $1 \vee x = 0$ имеем $a = 1, b = 0$ и равенство $\bar{a} \vee b = 1$ принимает вид $\bar{1} \vee 0 = 1$, т.е. является противоречивым, а следовательно, и уравнение не имеет решения.

Проверка равенства $\bar{a} \vee b = 1$ становится критерием, когда данное уравнение $a \vee x = b$ имеет решение.

Можно ли распространить предложенный метод на уравнение

$$a \wedge x = b ? \quad (3)$$

Снова можно убедиться, что для уравнения $a \vee x = b$ изоляция переменной оказывается невозможной. Однако одна попытка заслуживает внимания

$$\begin{aligned} \bar{a} \wedge (a \wedge x) &= \bar{a} \wedge b, (\bar{a} \wedge a) \wedge x = \bar{a} \wedge b, 0 \wedge x = \bar{a} \wedge b. \\ 0 &= \bar{a} \vee b. \end{aligned}$$

Снова кажется, что мы не получили способа решения уравнения.

Вспомним, что уравнение $a \wedge x = b$ не всегда имеет решение.

Из данного уравнения получено соотношение $\bar{a} \wedge b = 0$, т.е. доказано, что если уравнение имеет решение, то его коэффициенты должны удовлетворять условию

$$\bar{a} \wedge b = 0. \quad (4)$$

Для уравнения $0 \wedge x = 1$ имеем $a = 0, b = 1$ и равенство $\bar{a} \wedge b = 0$ принимает вид $\bar{0} \wedge 1 = 0$, т.е. является противоречивым, а следовательно, и уравнение не имеет решения.

Проверка равенства $\bar{a} \wedge b = 0$ становится критерием, когда данное уравнение $a \wedge x = b$ имеет решение.

Итак, мы выделили новое направление использования различных свойств логических операций для нахождения необходимых условий решения логических уравнений.

Проверьте, является ли условие (2) достаточным, чтобы уравнение (1) имело решение.

Проверьте, является ли условие (4) достаточным, чтобы уравнение (3) имело решение.

Если условия (2) и (4) являются достаточными для соответствующих уравнений (1) и (3), то обеспечивают ли они единственность решения соответствующего уравнения?

Остановимся подробнее на выделении элементов симметрии бордюров.

Всего существует семь типов симметрии бордюров:

1) Любой бордюр обладает переносной симметрией вдоль своей оси (рис. 1). В простейшем случае симметрия бордюра полностью исчерпывается переносной симметрией, т.е. совокупностью параллельных переносов $T_{k\bar{a}}$ на векторы $k\bar{a}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

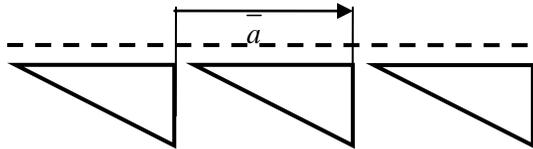


Рис. 1

2) Бордюры могут обладать наряду с переносной также зеркальной симметрией: они зеркально симметричны относительно прямой l , делящей ленту бордюра пополам в продольном направлении (рис. 2). Под зеркальной симметрией в этом случае следует понимать осевую симметрию S_l .

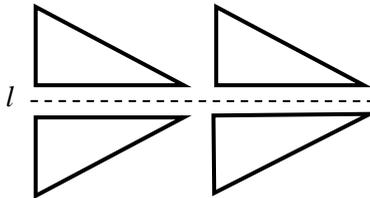


Рис. 2

3) Бордюры, у которых ось переноса является осью скользящего отражения (рис. 3). Скользящее отражение или скользящая симметрия в этом случае является композицией отображений $T_{a/2}S_l$ или равносильно композицией $S_lT_{a/2}$.

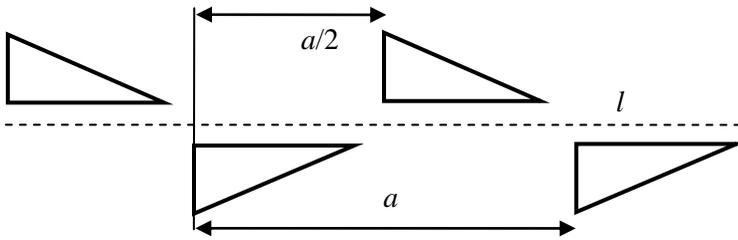


Рис. 3

4) Бордюры, которые имеют поперечные оси симметрии (рис. 4).
Например, S_{l_1}, S_{l_2} .

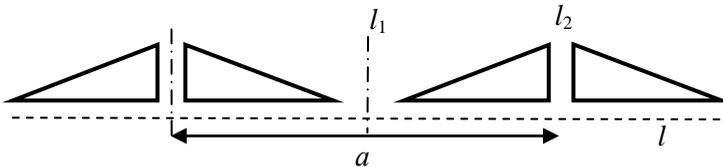


Рис. 4

5) Бордюры, которые имеют поворотные оси 2-го порядка, перпендикулярные к плоскости бордюра (рис. 5). Например, симметрией является поворот $R_O^{180^\circ}$.

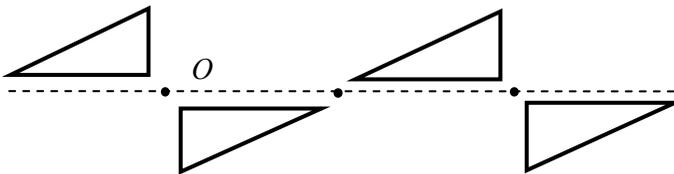


Рис. 5

6) Бордюры, которые основаны на комбинировании оси скользящего отражения с поворотными осями 2-го порядка, перпендикулярными к плоскости бордюра (рис. 6).

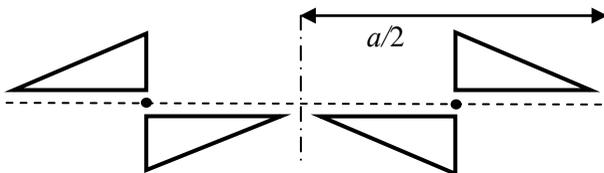


Рис. 6

7) Бордюры, основанные на комбинировании зеркальных отражений. Такие бордюры имеют наряду с продольной также поперечные оси симметрии; как следствие возникают поворотные оси 2-го порядка (рис. 7).

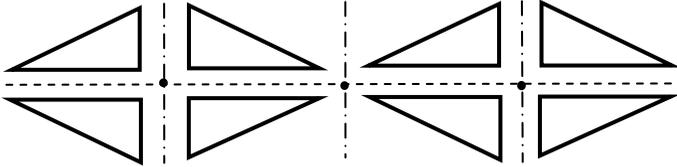


Рис. 7

Рассмотрим задачу по формированию навыков использования свойства осевой симметрии — нарисовать на экране пирамиду из 10 ступенек-прямоугольников (рис. 8).

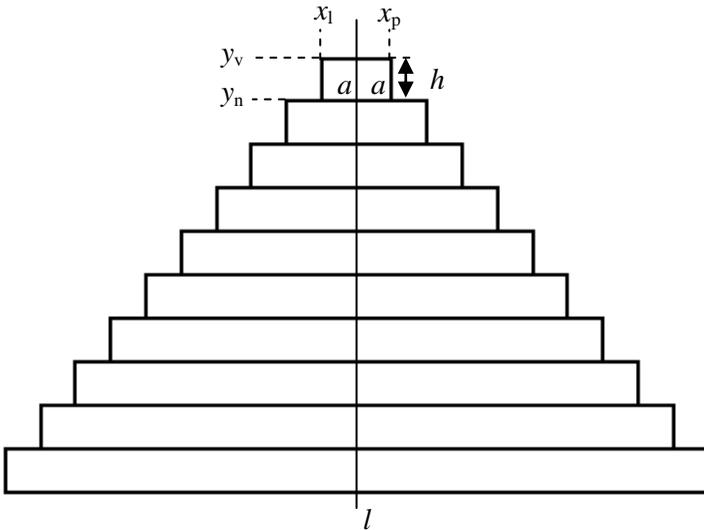


Рис. 8

Решение. Воспользуемся тем, что пирамида имеет ось симметрии l . Пусть центр самого верхнего основания пирамиды находится в точке $(x_0; y_0)$, через которую проходит ось симметрии. Пронумеруем прямоугольники сверху вниз числами от 1 до 10.

Прямоугольник проще всего построить одним оператором на экране компьютера, если определить координаты двух противоположных вершин $(x_l; y_v)$ и $(x_p; y_n)$ прямоугольника. Очевидно, что значения x_l, x_p, y_v, y_n зависят от номера прямоугольника.

В силу симметрии, чтобы получить x_l , нужно от x_0 вычесть что-то, а чтобы получить x_p — прибавить столько же.

Составим вспомогательную таблицу.

номер \ абсциссы	x_l	x_p
1	$x_0 - a$	$x_0 + a$
2	$x_0 - 2a$	$x_0 + 2a$
3	$x_0 - 3a$	$x_0 + 3a$
...
10	$x_0 - 10a$	$x_0 + 10a$

Легко заметить, что если обозначить через i номер ступеньки, то получим формулы для вычисления абсцисс вершин прямоугольника: $x_l = x_0 - ia, x_p = x_0 + ia$.

Аналогично для ординат вершин прямоугольника получаем:

$$y_v = y_0 - (i - 1)h, y_n = y_0 - ih.$$

Программа построения фигуры «**Пирамида из прямоугольников**» имеет вид:

```
Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
a = 300: h = 400: x0 = 5000: y0 = 5000
For i = 1 To 10
xl = x0 - i * a: xp = x0 + i * a
yv = y0 - (i - 1) * h: yn = y0 - i * h
DrawWidth = 2
Line (xl, yn)-(xp, yv), , B
Next i
End Sub
```

3.1. Измените высоту, ширину, цвет ступенек пирамиды. Составьте пирамиду из закрасенных прямоугольников; из закрасенных прямоугольников с рамкой другого цвета.

3.2. Напишите аналогичную программу на языке QBASIC. Для закраски внутренних точек прямоугольников можно использовать оператор PAINТ.

С помощью оператора PAINТ можно закрасить замкнутую область в заданный цвет.

Формат:

PAINТ (X,Y), C1, C2

X, Y — координаты любой точки из замкнутой области;

C1 — цвет, в который надо закрасить область;

C2 — цвет, которым нарисована граница области.

Если цвет области совпадает с цветом границы, то C2 можно не указывать. Закрашиваемая область должна быть замкнутой.



Рис. 9

Народы Крайнего Севера часто используют орнаменты в украшениях одежды, обуви, геральдике.

3.3. Напишите компьютерную программу построения рис. 9 и сравните ее с программой «Орнамент Севера». Если этот рисунок строить с помощью закрасенных прямоугольников, то лучше вначале смоделировать эту фигуру, повернутую на угол 45^0 , тогда все отрезки окажутся горизонтальными или вертикальными. После построения фигуры ее можно вставить в Paint и повернуть в исходное положение.

§ 18. Элективный курс «Моделирование многоугольников и многогранников»

За основу элективного курса следует взять материал двух глав — «Геометрические модели и их компьютерные аналоги» и «Компьютерное моделирование многогранников из развертки», добавив элементы компьютерной графики.

Этот элективный курс имеет важное значение для профильного обучения учащихся, т.к. демонстрирует применение методов научного познания:

— методом наблюдения и постановкой математического эксперимента определяется последовательность операций для получения из многогранника развертки и, наоборот, из развертки — многогранника;

— на основе методов анализа и синтеза определяются аналитические задания для каждой элементарной операции, а затем моделируется весь процесс сборки многогранника из развертки;

— выбор параметра в каждом способе сборки многогранника ориентирует на выстраивание плана решения задачи, а затем на его реализацию.

Раньше развитием пространственного мышления в школе занимались в основном на уроках математики и черчения. В настоящее время пространственное мышление формируется также в значительной степени на уроках информатики. Информатика добавляет в динамику пространственного образа свойства, которых прежними средствами обучения невозможно было достичь, и преобразует классические методы обучения.

3.4. Изучите в пособии [21] тему «Генерирование идей для решения задачи». Продолжите поиск новых методов решения задачи о делении отрезка на экране компьютера пополам.

Представим идею одного из таких методов. При копировании отрезка копия отрезка смещается вниз на некоторое число шагов и на некоторое число шагов вправо. С помощью клавиш верните копию на место оригинала и определите вектор переноса копии. Убедитесь в правильности своего вывода для копии другой фигуры. А теперь — подсказка. Копию отрезка верните на место оригинала, поверните на 90^0 и получите середину отрезка.

3.5. Можно рассмотреть цикл задач по конструированию многогранников с заданными свойствами из разверток (при развертке многогранной поверхности получается плоская фигура с помощью последовательных движений всех граней поверхности в некоторую плоскость).

Широкий спектр задач помогает формировать навыки математического и компьютерного моделирования, навыки оперирования геометрическими образами. Компьютер в этих задачах на первых порах выступает как средство визуализации динамики объекта, но компьютерное экспериментирование порождает много новых задач, а следовательно, компьютер стимулирует реализацию активных методов познания. Набор разнообразных проектов по конструированию разверток многогранника является актуальным для методики формирования динамики пространственного образа.

Цикл исследовательских проектов, связанных с развертками, предусматривает следующие задачи:

- а) задачи на построение развертки поверхности геометрического тела;
- б) задачи на узнавание геометрического тела по развертке его поверхности;
- в) конструирование геометрического тела по развертке его поверхности;
- г) изображение тела по его развертке;
- д) задачи на вычисление геометрических величин тела по развертке его поверхности;
- е) выбор необходимого количества параметров на развертке;
- ж) математическое моделирование трансформации развертки в изображение пространственной фигуры;
- з) написание компьютерной программы для демонстрации восстановления изображения пространственной фигуры из развертки.

Реализация наглядного и эстетичного изображения трансформации геометрического образа на экране компьютера должна осуществляться с учетом следующих положений:

- выбор места расположения основной фигуры, чтобы в дальнейшем были видны преобразования этой фигуры;
- выбор масштаба фигуры на экране;

- выбор количества промежуточных положений для динамики изменения;
- выбор скорости изменения геометрического образа;
- выбор интервала задержки между двумя положениями фигур;
- выбор метода исчезновения предыдущего изображения;
- выбор цветовой гаммы и типа линий для закраски меняющихся положений фигуры (если изучать на экране, то лучше изменяющимся цветом; если вставлять в другой файл, то лучше черно-белыми цветами; если изучается динамика нескольких граней, то лучше пунктирные линии различного типа);
- выбор расположения осей координат для лучшего понимания расположения фигуры;
- выделение основной фигуры (основания, развертки фигуры) жирной линией для лучшего изображения;
- выбор полноты изображения геометрического образа;
- дополнительные построения траектории вершины непрерывной линией.

На этапе сопоставления геометрического тела и его развертки следует обратить внимание, что с одним и тем же телом можно сопоставить несколько разверток.

Для способа разреза поверхности куба по ребрам (на рис. 1 линия разреза из семи ребер изображена жирной линией) можно получить развертку (рис. 2), если грани куба разворачивать в плоскость, содержащую основание куба.

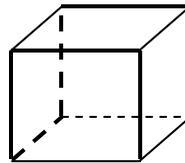


Рис. 1

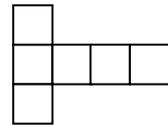


Рис. 2

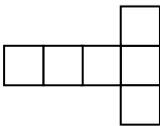


Рис. 3

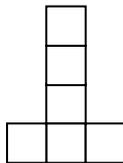


Рис. 4

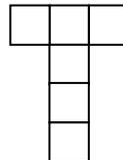


Рис. 5

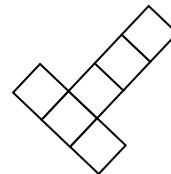


Рис. 6

На кубе можно рассмотреть аналогичные разрезы, приводящие к разверткам, представленным на рис. 3—5. Эти развертки

отличаются от развертки на рис. 2 только расположением на плоскости. Более того, все развертки на рис. 2—6 можно представить единообразно следующим образом. Вначале выполним разрез, представленный на рис. 1, затем совершим поворот всей конструкции вокруг вертикальной прямой, проходящей через центры верхней и нижней граней, и только потом развернем грани на плоскость основания. В зависимости от угла поворота можно получить представленные пять разверток, а меняя другим образом этот угол, можно получить бесконечное число разверток. Все такие развертки, полученные друг из друга движением, будем считать как один тип развертки куба.

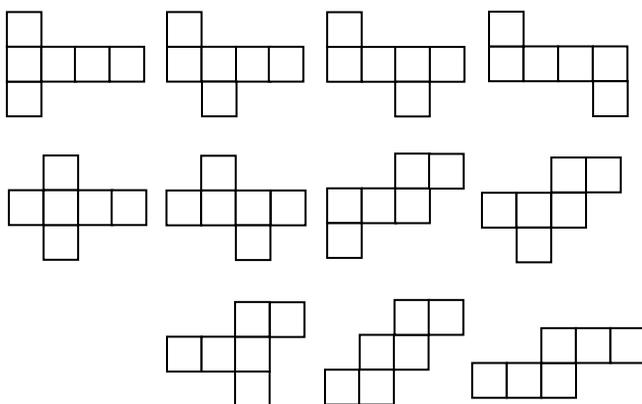


Рис. 7

На рис. 7 представлены различные типы разверток куба.

Для каждой такой развертки можно решить по две задачи — указать разрез на кубе, приводящий к такой развертке, и указать последовательность операций по склейке куба из развертки.

Постройте аналогичные развертки правильного тетраэдра.

Каждая развертка куба на рис. 7 содержит пять общих ребер. Куб содержит 12 ребер, следовательно, для получения каждой развертки использовались разрезы по семи ребрам. Заметим, что мы пока не доказали, что на рис. 7 представлены все типы разверток.

Докажите, что для получения любой развертки куба необходимо совершить разрез по семи ребрам, т.е. число ребер в разрезе является инвариантом для любой развертки. Полученное доказательство сравните с методом в пособии [22, с. 97—99].

Каждую задачу в математике полезно переформулировать в других терминах. В результате устанавливается связь с другими разделами математики, и первоначальная задача может оказаться либо решенной в другой постановке, либо дать решение для ранее поставленной задачи в другом разделе, либо может привести к равносильной нерешенной проблеме.

Пусть передняя грань куба гомотетично сжата в квадрат меньших размеров, и в полученной усеченной четырехугольной пирамиде эта грань перемещается к задней грани, пока не окажется в плоскости задней грани. Получим фигуру, представленную на рис. 8, которая называется графом куба. Граф содержит 8 вершин, 12 ребер и 6 граней: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$.

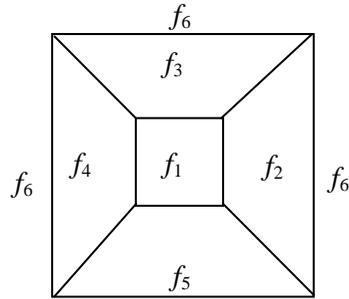


Рис. 8

Разрез куба на рис. 1 для развертки можно изобразить на графе (рис. 9) маршрутом 12345678 с помощью вершин или тем же маршрутом с помощью ребер $e_1 e_2 e_3 e_7 e_8 e_{10} e_{12}$.

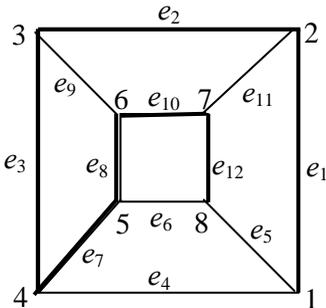


Рис. 9

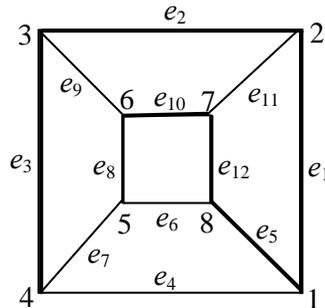


Рис. 10

Маршрут не является замкнутым и не содержит циклов, иначе развертка распадется на несколько частей. Он должен проходить через каждую вершину, т.к. каждый трехгранный угол в кубе нужно разрезать и развернуть на плоскость. Такой маршрут в теории графов называется гамильтоновой цепью.

Для гамильтоновой цепи на графе (рис. 10) постройте разрез на кубе и постройте соответствующую развертку куба.

Таким образом, геометрическая задача о числе разверток куба связана с перечислением гамильтоновых цепей на графе куба.

3.6. В качестве проекта для исследования можно предложить изучить вопрос о перечислении гамильтоновых цепей на графе куба и написать программу для автоматического поиска таких цепей [13, с. 177].

Постройте различные типы разверток правильного октаэдра. Постройте граф октаэдра и изучите представление разверток на графе.

3.7. Моделирование призм и пирамид нужно начинать с простейших разверток. Проведите анализ разверток на рис. 11—17, определите набор параметров, с помощью которых наиболее рационально можно осуществить математическое и компьютерное моделирование восстановления следующих геометрических тел.

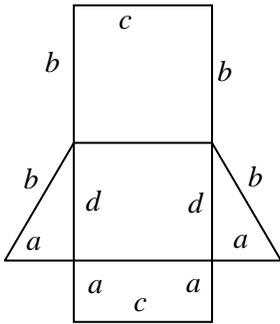


Рис. 11

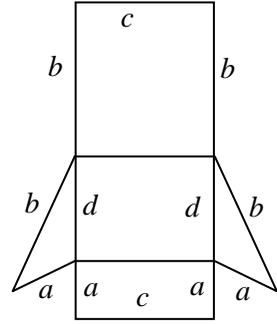


Рис. 12

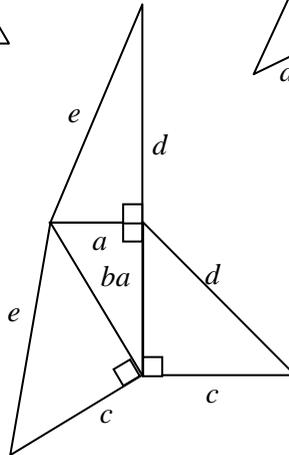


Рис. 13

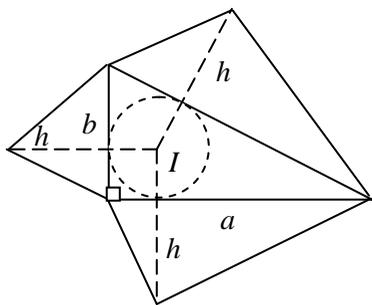


Рис. 14

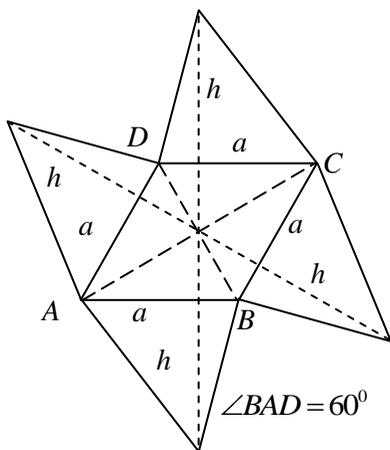


Рис. 15

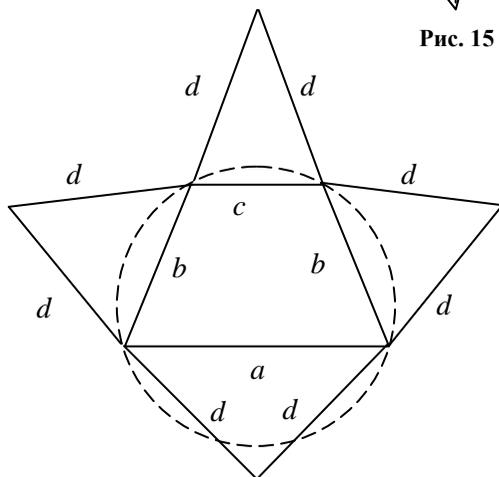


Рис. 16

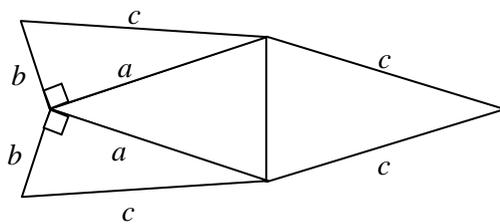


Рис. 17

3.8. Поиск новых тем исследования для проекта можно осуществить путем систематизации материала с целью обнаружения неисследованных свойств.

Составьте таблицу для различных видов тетраэдров.

Тип тетраэдра	Свойства		
	объем	площадь поверхности	специальные свойства
Равногранный тетраэдр			
Тетраэдр с равным наклоном граней к основанию			
Тетраэдр с равным наклоном боковых ребер к основанию			
Ортоцентрический тетраэдр			
Каркасный тетраэдр			
Прямоугольный тетраэдр			

Полуопределенные задачи

Пусть для некоторой геометрической фигуры указан набор параметров. Если при некоторых фиксированных значениях этих параметров фигура однозначно определена с точностью до положения в пространстве, то будем говорить, что в этом случае рассматривается *определенная* задача.

Для формирования поисково-исследовательской деятельности учащихся представляет интерес класс задач, в которых указан неполный набор параметров. Учащиеся должны самостоятельно ввести дополнительные параметры для геометрической фигуры. Такие задачи будем называть *полуопределенными*.

Полуопределенные задачи на восстановление пространственных фигур, заданных с помощью развертки, требуют сложных мыслительных действий. Вначале требуется восстановить семейство пространственных фигур над одной из граней по заданному, но не полному набору параметров. Для фиксации вершин многогранника, не принадлежащих этой грани, нужно дополнительно выбрать несколько параметров. Затем построить развертку многогранника, изображение многогранника и смоделировать процесс восстановления многогранника из развертки.

1. Постройте развертку четырехугольной пирамиды $ABCD S$, для которой точка H является проекцией вершины S на основание $ABCD$ (рис. 18).

а) Введите один новый параметр для задания развертки.

б) Нужны ли какие-нибудь ограничения на введенные параметры a, b, c, d ?

в) Разработайте моделирование восстановления пирамиды из развертки.

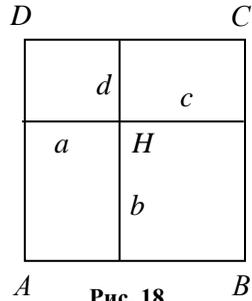


Рис. 18

2. Постройте развертку параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$, для которого проекцией верхнего основания $A' B' C' D'$ на плоскость нижнего основания $ABCD$ является квадрат $ABCD$ (рис. 19).

а) Введите один новый параметр для задания развертки.

б) Разработайте моделирование восстановления параллелепипеда из развертки.

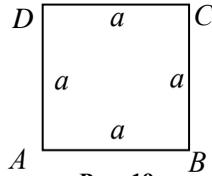


Рис. 19

3. Постройте развертку параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$, для которого проекцией верхнего основания $A' B' C' D'$ на плоскость нижнего основания $ABCD$ является прямоугольник $A_0 B_0 C_0 D_0$ (рис. 20).

а) Введите два новых параметра для задания развертки.

б) Разработайте моделирование восстановления параллелепипеда из развертки.

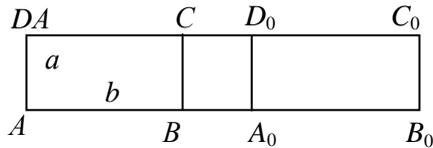


Рис. 20

4. Постройте развертки треугольных пирамид $ABCS$, для которых точка H является проекцией вершины S на основание ABC (рис. 21, 22).

а) Введите один новый параметр для задания каждой развертки.

б) Разработайте моделирование восстановления каждой пирамиды из развертки.

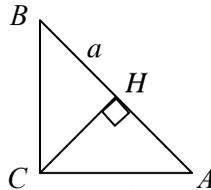


Рис. 21

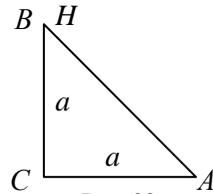


Рис. 22

§ 19. Элективный курс «Поиск функциональной зависимости»

За основу элективного курса следует взять материал главы «Поиск функциональной зависимости», добавив элементы компьютерной графики.

Поиск функциональной зависимости является одной из главных задач каждого исследователя, поэтому формирование методов поиска функциональной зависимости является одним из основных моментов в исследовательской деятельности учащихся по математике.

Основными этапами для обнаружения функциональной зависимости являются: анализ нескольких объектов и отношений между объектами, выявление некоторой зависимости на определенной группе объектов, формулировка гипотезы, проверка зависимости на более широком классе объектов, попытка построения контрпримеров, доказательство гипотезы.

Следует различать формирование навыков поиска функциональной зависимости посредством обучения выстраиванию этапов поиска закономерностей и деятельность учащегося, направленную на выявление закономерности в исследовании посредством применения сформированных ранее навыков.

Существует психологический разрыв между тем, когда субъекта обучают навыкам, а значит ориентацией на то, что нужно увидеть в предложенном исследовании, и той ситуацией, когда нужно увидеть необходимость обращения внимания на ту группу объектов, в которой потом может обнаружиться функциональная зависимость.

Учитывая, что человек получает большую часть информации визуально и мозг позволяет усваивать и перерабатывать огромное количество информации за мгновенный зрительный акт, нужно использовать акт визуального наблюдения для устранения психологического разрыва, т.е. для формирования мотивации.

Для этого лучше использовать геометрические задачи, т.к. они в большей степени выступают раздражителями нашего внимания, магическим воздействием переплетения линий следования по рисунку, приглашением к исследованию.

Поиск функциональной зависимости можно начать с изучения дискретных величин.

Рассмотрим один из важнейших методов поиска закономерностей для дискретной величины и доказательства утверждений.

а) Принцип математической индукции:

Утверждение справедливо для всякого натурального n , если

- 1) оно справедливо для $n = 1$,
- 2) из справедливости утверждения для некоторого $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$.

Доказательства утверждений с помощью принципа математической индукции называются *методом математической индукции*.

Пример 1. Найти сумму

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение.

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

Появляется гипотеза, что $S_n = \frac{n}{n+1}$. Проверим ее методом математической индукции. Для $n = 1$ гипотеза верна, т.к. $S_1 = \frac{1}{2}$.

Предположим, что гипотеза верна при $n = k$, т.е.

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Докажем, что гипотеза верна и при $n = k + 1$, т.е. что

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Действительно,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

На основании принципа математической индукции можно утверждать, что $S_n = \frac{n}{n+1}$ справедливо при любом натуральном n . \square

Замечание. Рассмотрим другое решение этой задачи

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Пример 2. Докажите, что для любого натурального n выражение $10^n + 18n - 1$ делится на 27.

Решение. Утверждение справедливо при $n = 1$. Пусть справедливо утверждение $(10^k + 18k - 1) : 27$ при $n = k$, тогда $10^{k+1} + 18(k+1) - 1 = (10^k + 18k - 1)10 - 162k + 27$. Выражение $10^k + 18k - 1$ делится на 27 по предположению. Выражение $-162k + 27$ также делится на 27, следовательно $(10^{k+1} + 18(k+1) - 1) : 27$.

3.9. Докажите тождества

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;

б) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$;

в) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$;

г) $1^3 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$;

д) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$;

е) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{4}$;

ж) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n(n + 1)}{2(2n + 1)}$;

з) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

3.10. Найдите суммы:

а) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

3.11. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

3.12. Докажите, что следующие соотношения выполняются для любого натурального n :

а) $(10^n + 18n - 1) : 27$; б) $(n^3 + 11n) : 6$; в) $(n^3 + 5n) : 6$;

г) $(4^n + 15n - 1) : 9$; д) $(6^{2n+1} + 1) : 7$; е) $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) : 133$.

б) Формула включения и исключения.

Множество A называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов. Это число называется *мощностью* множества A и обозначается $|A|$, $|\emptyset| = 0$, но $|\emptyset| = 1$.

Два конечных множества называются *равномощными*, если их мощности равны, т.е. $|A| = |B|$.

Для любых конечных множеств A, B, C выполняются равенства

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
 —

формула перекрытий, формула включения и исключения.

Пример 3. Сколько чисел среди первых двухсот натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение. Обозначим через A множество чисел, делящихся на 2, B — множество чисел, делящихся на 3 и C — делящихся на 5, тогда $A \cup B \cup C$ — числа, которые делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5. Число элементов множества $A \cup B \cup C$ найдем по формуле

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Для множества $A = \{2, 4, \dots, 200\}$ получаем $|A| = 100$, для множества $B = \{3, 6, \dots, 198\}$ следует $|B| = 66$ и для множества $C = \{5, 10, \dots, 200\}$ получаем $|C| = 40$.

Множество чисел, которые одновременно делятся на 2 и 3, т.е. делятся на 6, имеет вид $A \cap B = \{6, 12, \dots, 198\}$, причем $|A \cap B| = 33$.

Аналогично $A \cap C = \{10, 20, \dots, 200\}$, $|A \cap C| = 20$, $B \cap C = \{15, 30, \dots, 195\}$, $|B \cap C| = 13$, $A \cap B \cap C = \{30, 60, \dots, 180\}$, $|A \cap B \cap C| = 6$, $|A \cup B \cup C| = 100 + 66 + 40 - 33 - 20 - 13 + 6 = 146$.

Количество чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, равно $200 - |A \cup B \cup C|$, т.е. равно 54.

Замечание 1. Удалить из множества $\{1, 2, \dots, 200\}$ натуральные числа, которые делятся на 2, или на 3, или на 5 можно вычеркиванием методом решета Эратосфена, но этот процесс будет долгим. Применим модифицированный вариант решета Эратосфена. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 5 равно 30, поэтому вероятно, что количество чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5 на множествах $\{1, 2, \dots, 30\}$, $\{31, 32, \dots, 60\}$, ..., $\{151, 152, \dots, 180\}$, полученных одно из другого сдвигом на 30, будут одинаковым. Действительно, любая пара чисел x и $30k + x$, где k — произвольное число, ведет себя одинаково относительно делимости на 2, или на 3, или на 5. Поэтому достаточно найти искомое количество чисел на множестве $\{1, 2, \dots, 30\}$, затем это количество умножить на число таких периодов и добавить необходимые числа из оставшегося множества $\{181, 182, \dots, 200\}$. Окончательно получаем $8 \cdot 6 + 6 = 54$.

Решение, приведенное выше, иллюстрирует применение теоремы включений и исключений и требует большего времени. Последнее решение использует догадку о периодичности значений функции на множестве и ее аддитивности.

Замечание 2. Эти вычисления быстро проверяются для любого значения n с помощью простейшей компьютерной программы:

```
Private Sub Command1_Click()
n = 200: k = 0
```

```
For i = 1 To n
  If (i Mod 2 = 0) Or (i Mod 3 = 0) Or (i Mod 5 = 0) Then s = s + 1 Else k = k + 1
Next i
Print k
End Sub. □
```

3.13. Сколько чисел среди первой тысячи натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 7?

с) Идеи симметрии и факторизации в комбинаторных задачах.

Видные ученые-математики и исследователи творческой деятельности по математике (А.Пуанкаре, Ж.Адамар, А.Н.Колмогоров) неоднократно отмечали, что обучение перегружено мелкими факторами, в то время как мало сообщается общих и фундаментальных идей.

Согласимся с этим высказыванием, не только потому, что оно принадлежит великим людям, но, оглядываясь на реальности: не всем обучающимся быть исследователями, а для большинства учащихся нужна многократная отработка навыков на многочисленных примерах с постепенным усложнением.

После свершившегося факта, т.е. обучения в массовой школе классическими методами, мы должны предпринять меры по дополнительному образованию тех учащихся, которые подают надежды и способны к творческой работе.

Систематизация методов решения задач должна происходить с выделением фундаментальных идей в математике на примере материала, известного учащимся.

В подготовке современного специалиста естественно-математического и технического профиля большое внимание уделяется дискретной математике. Программы подготовки специалистов по математике, информационным технологиям, программированию содержат раздел, посвященный бинарным отношениям, отношению эквивалентности, фактормножеству, частичному порядку и раздел, посвященный комбинаторике.

Перечисленные разделы хорошо усваиваются студентами и школьниками в элективных курсах, но в дальнейшем связь между ними почти не устанавливается, хотя потребность в этом возникает. Например, искусство программирования и методы переработки

информации предполагают работу со списками, в которых расставлены приоритеты, наложены некоторые ограничения.

Операцию по переходу от данного множества с заданным отношением эквивалентности на нем к фактормножеству будем называть факторизацией. Факторизация — это разбиение множества на классы по некоторому признаку.

Покажем применение идей симметрии и факторизации множества на примере одного класса комбинаторных задач.

Пример 4. На собрании должны выступить 10 человек: $A, B, V, Г, Д, Ж, З, И, К, Л$. Сколькими способами их можно расположить в списке выступающих, если B должен выступит не раньше, чем A ?

Замечание 1 по формулировке задачи. Студенты часто хотят переформулировать задачу, заменяя оборот « B должен выступить не раньше, чем A » на следующий текст « B должен выступит после A ». Последнее ограничение создает у многих решающих ошибочный мотив считать, что B выступает следующим за лектором A . В задаче такое ограничение не предполагается, поэтому оставим более корректную формулировку в первоначальном виде.

Замечание 2. Использование в условии задачи небольшого числа выступающих, например, пяти человек, приводит к оперированию с небольшими числами и кажется, что после небольших вычислений будет получен окончательный ответ. Но в этом случае учащийся или студент пытается перечислить все списки, а абстрактное мышление фактически не работает. Предлагая задачу, в ответе которой будет факториал большого числа, нужно сказать, что после записи решения по формуле проводятся сокращения с некоторыми множителями, и ответ может содержать факториалы некоторых чисел.

Первый способ основывается на следующем приоритете — A выступает раньше, чем B .

Пусть A записан в список выступающих первым, тогда B можно записать на любое из оставшихся 9 мест. Итак, первое действие по записи A первым, а B на другие места можно выполнить девятью способами. Зафиксировав A и B на двух местах, можно переставить остальных выступающих в списках, т.е. совершить 8! перестановок. Второе действие по записи остальных выступающих

можно выполнить $8!$ способами. По правилу произведения два действия можно выполнить $9 \cdot 8!$ способами.

Пусть A записан в список выступающих вторым, тогда B можно записать на любое из 8 последующих мест. Итак, первое действие по записи A вторым, а B на другие места можно выполнить восемью способами. Зафиксировав A и B на двух местах, можно переставить остальных выступающих в списках, т.е. совершить $8!$ перестановок. Второе действие по записи остальных можно выполнить $8!$ способами. По правилу произведения два действия можно выполнить $8 \cdot 8!$ способами.

Продолжая аналогично передвигать A на последующие места, рассмотрим последний случай.

Пусть A записан в список выступающих девятым, тогда B можно записать только на последнее, десятое место. Итак, первое действие по записи A и B можно выполнить одним способом. Зафиксировав A и B на двух местах, можно переставить остальных выступающих в списках, т.е. совершить $8!$ перестановок. Второе действие по записи остальных можно выполнить $8!$ способами. По правилу произведения два действия можно выполнить $1 \cdot 8!$ способами.

По правилу суммы найдем общее число списков:

$$9 \cdot 8! + 8 \cdot 8! + 7 \cdot 8! + \dots + 1 \cdot 8! = (9 + 8 + 7 + \dots + 1) \cdot 8! = 45 \cdot 8! = 5 \cdot 9!.$$

Второй способ основывается на следующем приоритете — B не может выступить раньше, чем A .

Находим общее число перестановок без учета ограничения — $10!$. Исключаем случаи, когда B записан первым, а A — на последующих местах, когда B записан вторым, а A — на последующих местах, и т.д. Получаем следующее выражение:

$$10! - (9 \cdot 8! + 8 \cdot 8! + 7 \cdot 8! + \dots + 1 \cdot 8!) = 10! - 5 \cdot 9! = 5 \cdot 9!.$$

Комментарии к двум предложенным способам. С точки зрения дискретной математики на множестве из десяти элементов задан частичный порядок. Для двух элементов этот порядок четко очерчен, т.е. элемент A предшествует элементу B , что запишем в виде $A < B$. Можно считать, что каждый элемент связан сам с собой этим отношением. Восемь элементов, отличных от A и B , не связаны отношением порядка, что и объясняет название — частичный

порядок. Разговорная фраза: их можно записать в списке в любом порядке — означает, что для восьми элементов частичный порядок не задан. Первый способ решения основывается на перечислении списков в соответствии с введенным порядком, второй способ основывается на рассмотрении списков, не удовлетворяющих введенному порядку.

Третий способ. Общее число списков, без учета на расположение в списках выступающих A и B , равно $10!$. Рассмотрим произвольный список $(\dots B_{\underset{k}{k}} \dots A_{\underset{m}{m}} \dots)$, в котором выступающий B записан на k месте и выступающий A записан на m месте. Среди всех списков найдется «симметричный список» $(\dots A_{\underset{k}{k}} \dots B_{\underset{m}{m}} \dots)$, в котором выступающий A записан на k месте, выступающий B записан на m месте, а все остальные 8 выступающих — на прежних местах. Половина всех списков удовлетворяет данному ограничению — B должен выступит не раньше, чем A , а вторая половина не удовлетворяет заданному ограничению.

Получаем простое решение:

$$\frac{10!}{2} = 5 \cdot 9!.$$

Решение задачи основывается на факторизации общего числа перестановок по отношению — симметричности.

Идея этого метода не нова. Она используется при выводе числа сочетаний из n элементов по k . Вначале рассматриваются размещения из n элементов по k , а затем выделяются выборки (кортежи, списки), которые отличаются только перестановками из k элементов и выполняется деление

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Аналогичная задача для закрепления идеи факторизации.

Задача. Квадрат разделен на четыре части, которые нужно закрасить в различные цвета. Порядок красок на квадрате не имеет значения. Сколькими способами можно закрасить квадрат, если имеется 8 красок различных цветов?

Усложним задачу для формирования умения использовать факторизацию в комбинаторных задачах.

Пример 5. На конференции должны выступить 10 человек: $A, B, B, Г, Д, Ж, З, И, К$ причем по одной теме должны выступить три докладчика A, B, B .

1) Сколькими способами 10 человек можно расположить в списке выступающих, если A выступает с общим докладом, а B и B — не раньше, чем A , но в произвольном порядке?

2) Сколькими способами 10 человек можно расположить в списке выступающих, если A выступает с общим докладом, B выступает позже, чем A (не обязательно следующим), а B — позже, чем B (не обязательно следующим).

Рассмотрим решение для случая 1).

Общее число списков, без учета на расположение в списках выступающих A, B и B равно $10!$. Рассмотрим произвольный список $(\dots B \dots A \dots B \dots)$, в котором выступающий B записан на k месте, выступающий A записан на m месте, а выступающий B записан на n месте. Среди всех списков найдутся «перестановочные списки», в которых только выступающие A, B, B переставлены местами, все остальные выступающие записаны на прежних местах.

$$(\dots B \dots B \dots A \dots), (\dots A \dots B \dots B \dots), (\dots A \dots B \dots B \dots),$$

$$(\dots B \dots B \dots A \dots), (\dots B \dots A \dots B \dots)$$

Третья часть всех списков удовлетворяет данному ограничению — $A < B < B$ или $A < B < B$, поэтому число списков с расставленными приоритетами равно $10!/3$.

Аналогично для случая 2) число списков с расставленными приоритетами равно $10!/6$.

В примере 3 используется выделение классов эквивалентности, которые ведут себя одинаковым образом относительно делимости на 2, или на 3, или на 5. Для каждого класса проверяется инвариантность относительно делимости на 2, или на 3, или на 5, и далее применяются операции с классами.

Факторизация по этому отношению значительно сокращает вычисления. В действительности и классический способ использует факторизацию, выделяя класс чисел, делящихся на 2, затем класс чисел, делящихся на 3, и, наконец, класс чисел, делящихся на 5.

Для решения каждой комбинаторной задачи ставится цель определения некоторого числа элементов. Можно сказать, что решение задачи направлено на поиск целевой функции от натурального аргумента.

Выделим этапы формирования навыков применения факторизации для решения комбинаторных задач:

- выделение признака для разбиения множества на классы;
- формирование классов по найденному признаку;
- проверка инвариантности признака в каждом классе;
- оценка количества элементов в каждом классе;
- оперирование с классами для определения целевой функции.

Следует заметить, что применение идеи факторизации целесообразно на множестве, имеющем большое количество элементов. Для множеств с небольшим числом элементов оценка количества элементов, удовлетворяющих определенным ограничениям, быстрее проводится простым перечислением соответствующих списков.

Периодические функции в школе и в вузе часто рассматриваются на бесконечном промежутке. В методической литературе отсутствуют примеры, показывающие возможность использования периодичности функции на дискретном множестве.

Последнее решение примера 3 показывает, что периодичность функции и аддитивность функции являются естественными понятиями на дискретном множестве и позволяют быстрее решить задачу.

d) Рассмотрим задачу о том, какое минимальное количество точек определяет заданную линию. Наряду с такой постановкой задачи важно получить метод построения этой линии по выбранной минимальной системе точек.

Две точки на плоскости полностью определяют прямую линию, т.к. через две точки проходит и единственная прямая. Построить такую линию, конечно, можно с помощью линейки. Аналитически такая задача также решается просто. Для двух точек $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2)$, прямая A_1A_2 определяется уравнением $(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$.

Через три точки, которые не расположены на одной прямой, проходит и единственная окружность. Чтобы построить центр окружности, нужно построить серединные перпендикуляры к двум отрезкам. Аналитическое решение задачи о получении уравнения окружности, проходящей через три точки $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$ представлено в разделе о построении диаграммы Вороного.

Рассмотрим задачу об использовании минимального количества точек для задания параболы. Пусть даны три точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, которые не расположены на одной прямой и никакие две из которых не расположены на вертикальной прямой. Найдем параболу $y = ax^2 + bx + c$ с вертикальной осью.

Подставляя координаты точек в уравнение параболы, получим систему для определения коэффициентов a, b, c

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \quad y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c, \quad y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c. \quad (1)$$

Вычитая уравнения, получим систему для двух коэффициентов

$$\begin{cases} a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1, \\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1. \end{cases}$$

Решение системы

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & y_2 - y_1 \\ x_3^2 - x_1^2 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}} \quad \text{или}$$

$$a = \frac{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

$$b = \frac{y_1(x_3^2 - x_2^2) + y_2(x_1^2 - x_3^2) + y_3(x_2^2 - x_1^2)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

Коэффициенты a и b определяются однозначно тогда и только тогда, когда $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \neq 0$, т.е. когда $(x_2 - x_1) \neq 0$,

$(x_3 - x_2) \neq 0, (x_1 - x_3) \neq 0$. Последнее условие означает, что никакие две из трех данных точек не расположены на вертикальной прямой.

Коэффициент $a = 0$, если

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0.$$

Это условие означает, что три данные точки расположены на одной прямой. Очевидно, что в этом случае из уравнения параболы мы должны получить уравнение прямой.

Подставляя значения коэффициентов a, b в любое из уравнений системы (1), найдем значение коэффициента c .

В разделе 8.3 «Интерполяционные многочлены» аналогичная задача рассматривалась в более общей ситуации.

Таким образом, по трем данным точкам парабола с вертикальной осью определяется однозначно.

Замечание. Геометрическое построение четвертой точки на параболе или вершины параболы по трем данным точкам автору не известно.

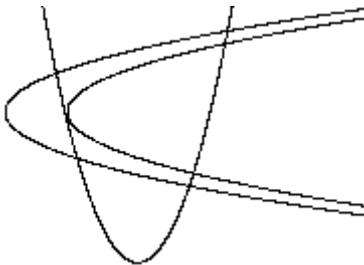


Рис. 1

Обращаем внимание на то, что в только что решенной задаче рассматривались параболы с вертикальной осью.

Если исключить ограничение на ось параболы, т.е. восстанавливать параболу по трем точкам, не расположенным на одной прямой, то задача становится неопределенной.

На рис. 1 видно, что через три данные точки можно провести две параболы и через четыре данные точки можно провести две параболы.

3.14. Решите аналогичную задачу о восстановлении параболы с горизонтальной осью, проходящей через три данные точки. Напишите компьютерную программу построения такой параболы, рассматривая в качестве данных координаты трех точек параболы.

3.15. Дана парабола γ , хорда AB которой перпендикулярна вертикальной оси симметрии параболы. Вертикальные отрезки C_0C, H_0H, D_0D с концевыми точками на хорде и на параболе

разделены в одном и том же отношении, соответственно, точками C_1, H_1, D_1 , т.е. $CC_1 : C_1C_0 = HH_1 : H_1H_0 = DD_1 : D_1D_0$. Докажите, что точки A, C_1, H_1, D_1, B расположены на параболе.

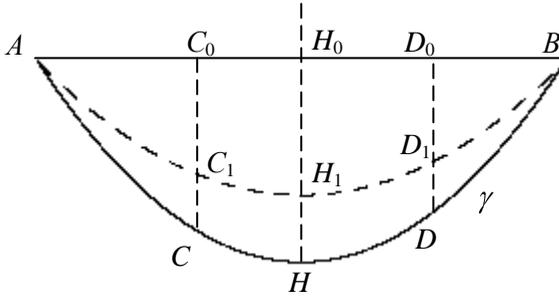


Рис. 2

3.16. Через точки A и B проведены три параболы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ с общей осью симметрии, и пусть хорда AB перпендикулярна оси парабол (рис. 3). Параболы пересечены пучком прямых, параллельных оси симметрии парабол. Докажите, что на отрезках высекаются пропорциональные отрезки, т.е.

$$\frac{C_1C_2}{C_2C_3} = \frac{H_1H_2}{H_2H_3} = \frac{D_1D_2}{D_2D_3}$$

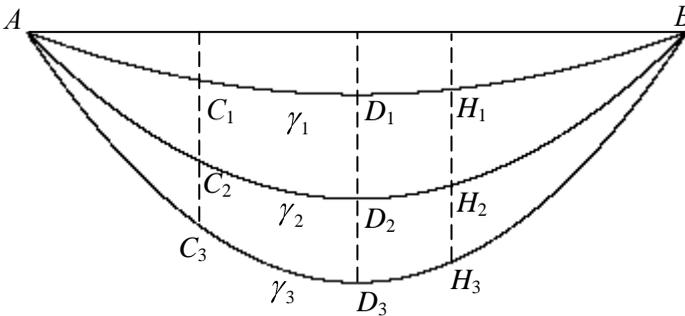


Рис. 3

е) Рассмотрим задачу о построении фигуры, изображенной на рис. 4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a . Каждая сторона квадрата делится на две равные части. На полученных отрезках строятся

квадраты во внешнюю сторону от данного квадрата и строятся квадраты в угловых точках. Вокруг данного квадрата получилось первое кольцо из квадратов со сторонами $a/2$.

Далее стороны квадратов снова делятся пополам, и повторяется процесс построения квадратов.

В чем же существенная разница между различными взглядами двух учащихся на одну и ту же геометрическую фигуру на рис. 1, один из которых проявляет интерес к геометрической фигуре и желает ее построить геометрическими инструментами, а второй хочет воспроизвести этот рисунок с помощью компьютера?

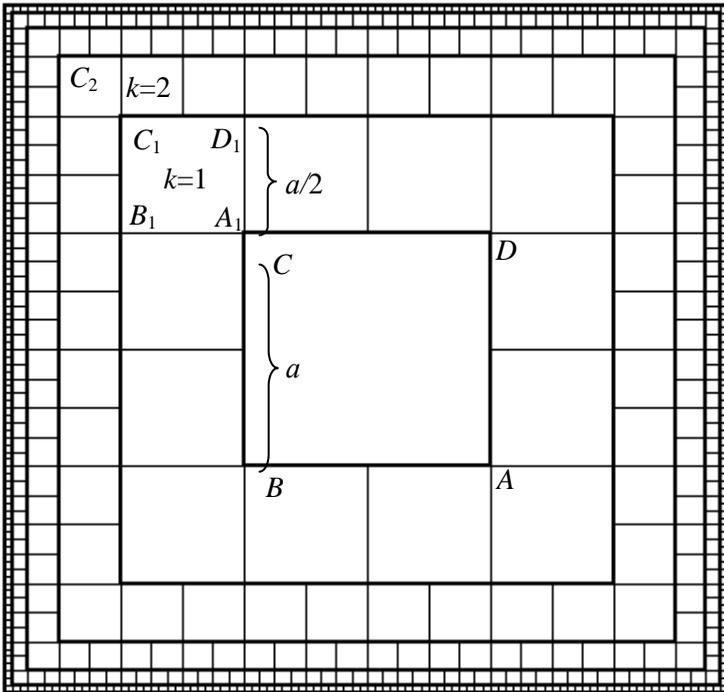


Рис. 4

Для первого учащегося вопрос о построении фигуры решается просто. Строим квадрат $ABCD$ со стороной a . Продолжаем стороны квадрата. Одну сторону квадрата делим на две равные части. Во внешнюю сторону от данного квадрата строим квадраты

со сторонами, равными $a/2$. Обращаем внимание на то, что все стороны первоначального квадрата не обязательно делить пополам, т.к. на каждой из сторон легко найти середину отложением отрезка, равного $a/2$.

Вокруг данного квадрата получилось первое кольцо из квадратов со сторонами $a/2$. Далее процесс повторяется аналогично.

Фраза «Далее процесс повторяется аналогично» часто обрывает исследование. Действительно, есть ли необходимость каждый раз делить сторону на две равные части при переходе к новому кольцу окаймляющих квадратов? Для геометрического построения середины отрезка с помощью циркуля и линейки нужно осуществить в этом случае несколько операций. Можно ли каким-то дополнительным построением автоматизировать получение длины квадрата для следующего кольца квадратов?

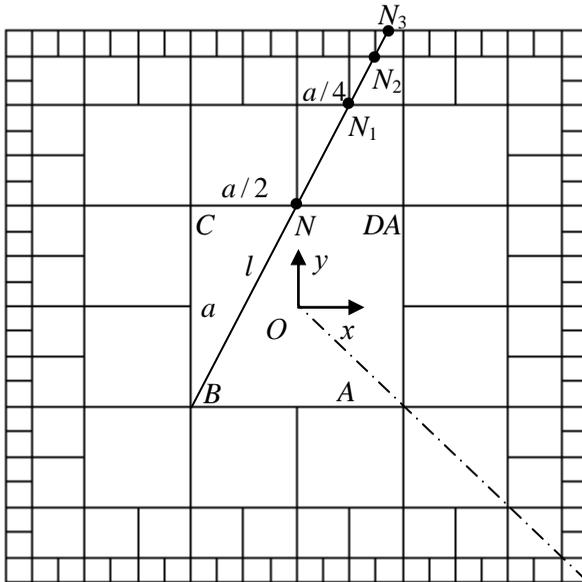


Рис. 5

Анализ длин a , $a/2$, $a/4$ показывает, что эти длины пропорционально уменьшаются, т.е. из них можно образовать пропорцию $a : a/2 = a/2 : a/4$, а значит, нужно искать дополнительное построение, выявляющее подобные треугольники с такими элементами.

Если провести прямую l (рис. 5), проходящую через вершину B квадрата и середину N стороны CD квадрата, то эта прямая в пересечении со сторонами квадратов каждого следующего ряда определяет середины отрезков N_1, N_2, N_3, \dots , т.к. легко заметить серию подобных треугольников. Таким образом, достаточно только один раз разделить отрезок CD пополам, а потом провести прямую BN и строить необходимые квадраты.

Компьютерное построение данной фигуры возможно несколькими способами.

Первый способ — построение квадратов с помощью примитивов, т.е. основных фигур в текстовом редакторе. Прикладывание равных фигур и построение квадрата, стороны которого в два раза меньше, чем стороны исходного квадрата, являются приближительными методами и, кстати, также требуют большого времени. Поэтому рассмотрим построение фигуры с помощью компьютерного моделирования.

Построение фигуры с помощью компьютерной программы требует перевода сформулированной геометрической задачи на алгебраический язык.

Предположим, что начало декартовой системы координат совпадает с центром первоначального квадрата, а оси координат параллельны сторонам квадрата.

Для построения всей фигуры необходимо выделить два принципиальных вопроса.

Первый вопрос — как построить квадраты в одном кольце, т.е. в двух горизонтальных и двух вертикальных рядах?

Второй вопрос — как перейти на нового кольцо, чтобы повторить предыдущие построения на компьютере?

Конечно, существует нулевой этап построения первоначального квадрата, но он является тривиальным построением квадрата с помощью одного оператора, хотя и требует определения координат двух противоположных вершин $C(-a/2; a/2)$, $A(a/2; -a/2)$.

Построение квадратов на компьютере в горизонтальном ряду можно осуществить с помощью цикла, изменяя все координаты по оси абсцисс на одно и то же число, т.е. добавлением числа, равного длине стороны квадрата. Но для этого необходимо знать,

сколько раз нужно выполнить изменение координат, т.е. сколько квадратов умещается в горизонтальный ряд.

Очевидно, что это число зависит от номера кольца окаймляющих квадратов.

Итак, компьютерное моделирование создало мотивацию к выявлению зависимости числа квадратов в горизонтальном ряду.

Такой вопрос мог задать любознательный учащийся и при построении квадратов вручную, но при компьютерном моделировании этот мотив возникает естественным образом в силу необходимости. При компьютерном моделировании, в большинстве случаев, возникает несколько мотивов по определению различных функциональных зависимостей, причем в решаемой задаче они осознаются как необходимые, а не кем-то изначально определенными. Необходимость решить возникшую проблему активизирует методы поиска решения.

Ради справедливости следует заметить, что построение фигуры вручную не требует аналитического математического моделирования. Оно значительно проще по формированию алгоритма построения, но зато является рутинным и после построения двух колец окаймляющих квадратов вообще отбивает желание продолжать далее построения. Оно не отличается как точностью, так и мобильностью, т.к. при незначительном изменении условий задачи вся процедура построений должна быть повторена снова.

Построение такой фигуры лучше осуществить с помощью компьютерной программы по следующей причине. При изменении длины стороны данного квадрата, изменении числа колец из окаймляющих квадратов, выделении раскраски определенных квадратов или выделении контура группы квадратов можно быстро изменять рисунок.

Рассмотрим построение верхнего горизонтального ряда окаймляющих квадратов на шаге с номером k . Построение можно выполнить с помощью цикла, указав координаты двух противоположных вершин самого левого квадрата в этом ряду и затем последовательно выстраивая квадраты в ряд.

Определим число квадратов в горизонтальном ряду. Над каждым квадратом предыдущего ряда строится два квадрата и по углам добавляется по квадрату, поэтому получаем рекуррентную

формулу для числа квадратов $b_k = 2b_{k-1} + 2$, где $k \geq 1$, $b_0 = 1$ и числовую последовательность: 1, 4, 10, 22, 46, ... Эта последовательность имеет признаки геометрической прогрессии, т.к. происходит удвоение предыдущего члена последовательности, а также признаки арифметической последовательности, т.к. каждый член последовательности затем увеличивается на 2. Но в целом эта последовательность отличается от известных ранее последовательностей в школьном курсе математики.

Компьютер может вычислять члены этой последовательности по рекуррентной формуле, но представляет интерес найти явное выражение произвольного члена последовательности.

$$b_1 = 4 = 2^2,$$

$$b_2 = 2b_1 + 2 = 2^3 + 2,$$

$$b_3 = 2b_2 + 2 = 2(2^3 + 2) + 2 = 2^4 + 2^2 + 2,$$

$$b_4 = 2b_4 + 2 = 2(2^4 + 2^2 + 2) = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2,$$

...

$$b_k = 2^{k+1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} \dots + 2^2 + 2.$$

Сумма членов геометрической прогрессии $2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^{k-3} \dots + 2^2 + 2$ равна $2^k - 2$. Следовательно,

$$b_k = 2^{k+1} + 2^k - 2 \text{ или } b_k = 3 \cdot 2^k - 2.$$

Рассмотрим другой способ определения числа b_k . Длина ряда квадратов с номером k равна

$$d_k = a + 2\frac{a}{2} + 2\frac{a}{4} + \dots + 2\frac{a}{2^k} = a \frac{2^k + 2^{k-1} - 1}{2^{k-1}}.$$

Разделив длину ряда на длину квадрата $a/2^k$ в этом ряду, получим искомое число $b_k = 3 \cdot 2^k - 2$.

Познакомимся с новым, третьим способом определения чисел b_k с помощью производящей функции, используя методы символической математики.

Запишем рекуррентное соотношение для b_k в виде

$$b_k - 2b_{k-1} - 2 = 0.$$

Рассмотрим выражения

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k + \dots, \quad (1)$$

$$xf(x) = b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots + b_{k-1}x^k + \dots$$

В символьной математике часто используют выражение

$$\frac{1}{1-bx} = 1 + bx + (bx)^2 + \dots + (bx)^k + \dots, \quad (2)$$

которое очевидно из определения суммы геометрической прогрессии для знаменателя bx , удовлетворяющего условию $|bx| < 1$.

Составим выражение

$$f(x) - 2xf(x) - \frac{2}{1-x} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k + \dots - 2b_0x - 2b_1x^2 - 2b_2x^3 - \dots - 2b_{k-1}x^k + \dots - 2(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots)$$

$$f(x) - 2xf(x) - \frac{2}{1-x} = b_0 - 2 + (b_1 - 2b_0 - 2)x + (b_2 - 2b_1 - 2)x^2 + \dots + (b_k - 2b_{k-1} - 2)x^k + \dots$$

Учитывая равенства $b_k - 2b_{k-1} - 2 = 0$ для $k \geq 1$ и $b_0 = 1$, получаем

$$f(x)(1-2x) = \frac{2}{1-x} - 1 = \frac{1+x}{1-x}. \quad f(x) = \frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Представим дробь $\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}$ в виде суммы более простых дробей вида (2):

$$\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}.$$

$$1+x = A(1-2x) + B(1-x).$$

Подставляя значение $x = 1$, получаем $A = -2$.

Подставляя значение $x = 1/2$, получаем $B = 3$.

$$\text{Поэтому } \frac{1+x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{3}{1-2x} - \frac{2}{1-x}, \quad f(x) = \frac{3}{1-2x} - \frac{2}{1-x}.$$

Используя выражение (2), получим

$$f(x) = 3 \cdot 1 + 2x + 2^2 x^2 + \dots + 2^k x^k + \dots - 2 \cdot 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots$$

$$f(x) = 1 + (3 \cdot 2^2 - 2)x + (3 \cdot 2^2 - 2)x^2 + \dots + (3 \cdot 2^k - 2)x^k + \dots \quad (3)$$

Сравнивая коэффициенты в выражениях (1) и (3) при x^k , получаем $b_k = 3 \cdot 2^k - 2$.

Этот способ, конечно, является более сложным, но он является универсальным для получения большого количества формул в комбинаторике и в дискретной математике при переходе от рекуррентной формулы к явному заданию.

Число окаймляющих квадратов c_k можно получить, умножая число квадратов в одном ряду на четыре и вычитая число угловых квадратов, т.к. они подсчитаны дважды, т.е. $c_k = 4b_k - 4$.

Число квадратов в ряду с номером k равно $c_k = 12(2^k - 1)$, где $k \geq 1$.

В компьютерной программе «**Квадраты вокруг квадрата**» приняты обозначения:

— $(xl; yv)$ — координаты левого верхнего угла квадрата в ряду с номером k и расположенного слева;

— $(xp; yn)$ — координаты правого нижнего угла квадрата;

— ak — длина стороны квадрата в этом ряду.

```
Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
xc = 5000: yc = 4000: a = 2000: ak = a / 2: xl = -a / 2: xp = a / 2: yv = -xl: yn = -xp
Line (xl + xc, yv + yc)-(xp + xc, yn + yc), , B
For k = 1 To 5
bk = 3*2 ^ k - 2: xl = xl - ak: yv = -xl: yn = xl: xp = -xl
For i = 1 To bk
Line (xl + (i - 1) * ak + xc, yv + yc)-(xl + i * ak + xc, yv - ak + yc), , B
Line (xl + (i - 1) * ak + xc, yn + yc)-(xl + i * ak + xc, yn + ak + yc), , B
Line (xl + xc, yv - (i - 1) * ak + yc)-(xl + ak + xc, yv - i * ak + yc), , B
Line (xp + xc, yv - (i - 1) * ak + yc)-(xp - ak + xc, yv - i * ak + yc), , B
Next i
Line (xl + xc, yv + yc)-(-xl + xc, -yv + yc), , B
ak = ak / 2: Next k: End Sub
```

Проведенное математическое моделирование, ориентированное под потребности компьютерного моделирования, содержит

несколько вариантов только для определения числа b_k квадратов в горизонтальном ряду. При разработке компьютерной программы также можно предложить несколько вариантов организации цикла для построения квадратов в ряд, а затем несколько вариантов для организации двойного цикла, т.е. цикла в цикле при переходе на следующее кольцо. Использование компьютера расширяет возможности для генерирования идей по решению одной задачи различными методами. Методы генерирования идей и другие направления использования компьютера для формирования исследовательской деятельности учащихся по математике и информатике приведены в пособии [21].

3.17. На рис. 6 сторона квадрата, равная a , делится на 3 равные части, и далее строятся окаймляющие квадраты. Определите число b_k квадратов в каждом ряду с номером k и число c_k квадратов в каждом кольце, а также напишите компьютерную программу построения этой фигуры. Определите площадь всей фигуры при возрастании номера k ; определите число квадратов черного цвета и число квадратов белого цвета в кольце с номером k ; определите отношение суммы площадей квадратов черного цвета к сумме площадей квадратов белого цвета. (Ответ: $b_k = 2 \cdot 3^k - 1$).

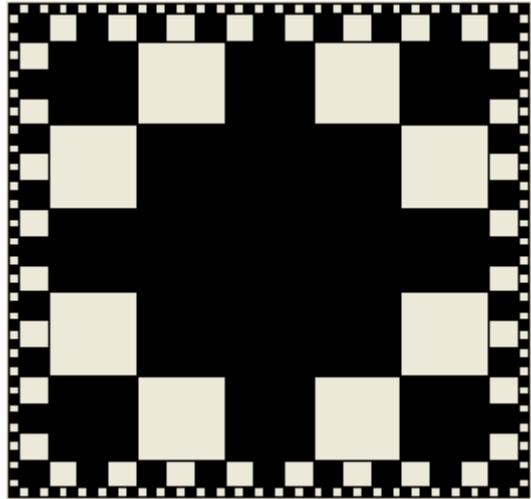


Рис. 6

3.18. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a (рис. 7). Каждая сторона квадрата делится на две равные части. На полученных отрезках строятся равносторонние треугольники во внешнюю сторону от данного треугольника и строятся

треугольники в угловых точках. Вокруг данного треугольника получилось первое кольцо из треугольников со сторонами $a/2$. Далее стороны треугольников делятся пополам, и повторяется процесс построения равносторонних треугольников.

Определите число b_k равносторонних треугольников в каждом ряду с номером k и число c_k равносторонних треугольников в каждом кольце, а также напишите компьютерную программу построения этой фигуры. (Ответ: $b_k = 2^{n+3} - 7$).

Напишите программу построения семейства треугольников на рис. 7 и сравните ее с программой «**Окаймляющие равносторонние треугольники**».

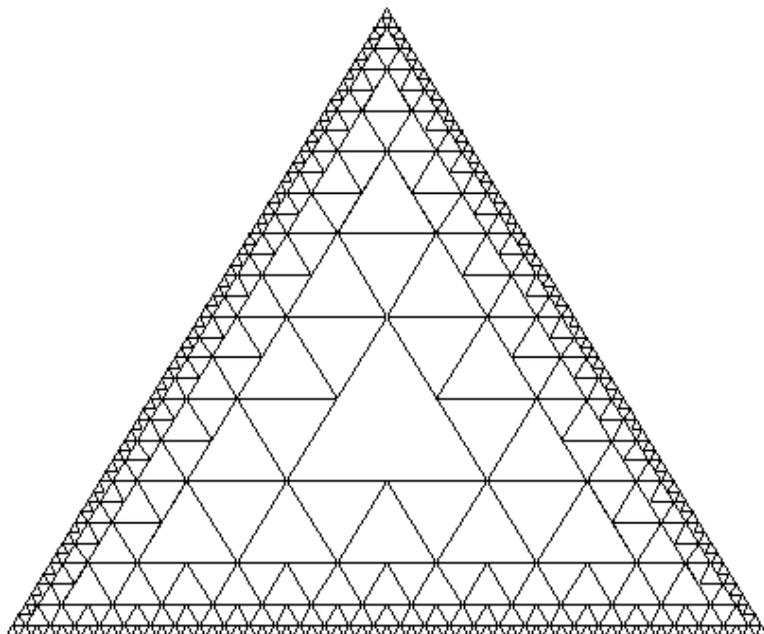


Рис. 7

f) Плоскость можно замостить произвольными равными четырехугольниками [19], произвольными равными треугольниками (поясните).

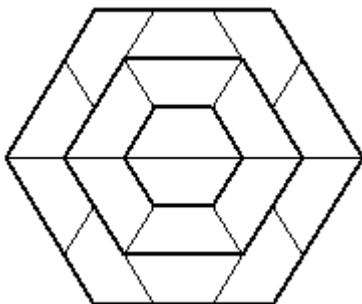


Рис. 8

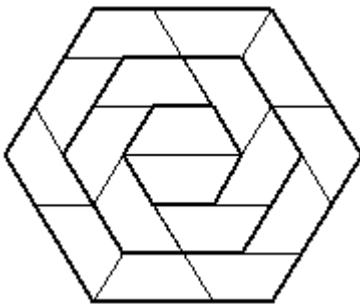


Рис. 9

Если для сторон или углов многоугольника выполняются некоторые равенства, то паркет из одних и тех же фигур могут иметь различную структуру. Например, если плоскость замостить расширяющимися шестиугольниками (на рис. 8, 9 они выделены жирными линиями), а области между шестиугольниками заполнять трапециями, то структура на рис. 8 и рис. 9 является различной.

3.19. Постройте основу для экспериментов по составлению паркета из трапеций в шестиугольнике (рис. 10). На рис. 10 указана нумерация колец между правильными concentрическими шестиугольниками.

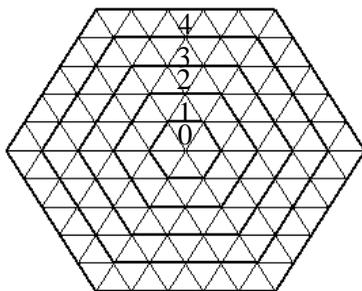


Рис. 10

Пусть a_n — число треугольников в кольце с номером n между шестиугольниками.

Напишите рекуррентную формулу для числа a_n . Найдите явное выражение для a_n различными способами.

Разработайте несколько алгоритмов построения паркета, изображенного на рис. 10, где n — произвольное натуральное число. Напишите программу построения такого рисунка и сравните ее с программой «Паркет из треугольников в шестиугольнике».

Пусть b_n — число трапеций в кольце с номером n между шестиугольниками. Напишите рекуррентную формулу для числа b_n . Найдите явное выражение для b_n различными способами.

3.20. Напишите программы построения паркетов на рис. 8, 9 и сравните их с программами «Паркет 1 из трапеций», «Паркет 2 из трапеций».

Обсудите возможность продолжения паркетов на рис. 8, 9 для покрытия плоскости.

3.21. Одной из интересных задач в теории графов является задача о наименьшем числе красок, необходимых для раскраски областей графа. На рис. 11, 12 представлены раскраски паркетов из трапеций в правильном шестиугольнике. Изучите этот вопрос в научно-популярной литературе и сформулируйте вывод для паркетов на рис. 11—12 при условии, что такие паркеты неограниченно продолжаютяся.



Рис. 11



Рис. 12

Подводя итоги, можно констатировать, что:

- геометрические рисунки с заложенными идеями функциональной зависимости создают мотив для самостоятельного определения этих зависимостей;
- воспроизведение этих рисунков на компьютере расширяет спектр поиска зависимостей;
- использование математического и компьютерного моделирования позволяет создать изящный рисунок, который можно быстро изменять в зависимости от параметров.

§ 20. Элективный курс «Модели геометрии Лобачевского»

Для создания мотивации учащихся к изучению геометрии Лобачевского нужно выделить следующие три направления.

1. При движении объектов со скоростью значительно меньше скорости света используют геометрию евклидовой плоскости. При движении объектов со скоростью, близкой к скорости света, используют неевклидовы геометрии: псевдоевклидову геометрию и геометрию Лобачевского.

2. История создания геометрии Лобачевского имеет большое воспитательное значение, т.к. демонстрирует величайший подвиг в формировании научного мышления человечества.

3. На основе геометрии Лобачевского можно разрабатывать новые содержательные исследовательские проекты по математическому и компьютерному моделированию.

За основу элективного курса следует взять материал пособия [20] «Модели геометрии Лобачевского», добавив элементы компьютерной графики.

Это пособие соответствует курсу по выбору «Геометрия Лобачевского», читаемому в большинстве педагогических вузов в рамках регионального или вузовского компонентов. Этот материал также может быть использован как пособие для элективного курса «Геометрия Лобачевского» в лицеях и гимназиях.

В пособии рассматриваются различные модели геометрии Лобачевского — модель Кэли-Клейна в круге, модель Пуанкаре на полуплоскости, модель Пуанкаре в круге. Для систематизации основных характеристик объектов в различных моделях представлена единая таблица. Большое внимание уделяется сравнению величин одних и тех же объектов в метрике евклидовой плоскости и метрике плоскости Лобачевского, геометрическим построениям в различных моделях.

Компьютерное моделирование объектов в модели плоскости Лобачевского включается в процесс математического эксперимента, обеспечивает высокую точность построения геометрических объектов. Визуализация объектов в модели существенно повышает уровень понимания геометрии Лобачевского.

После изучения геометрии Лобачевского встает вопрос о непротиворечивости этой теории, т.е. о построении ее модели.

Пособие предназначено для знакомства с различными моделями геометрии Лобачевского — моделью Кэли-Клейна в круге, моделью Пуанкаре на полуплоскости, моделью Пуанкаре в круге; приведена единая таблица для трех моделей.

Пособие можно использовать также для первоначального знакомства с геометрией Лобачевского через одну из ее моделей. В этом случае изучение следует начать с аксиоматики геометрии Лобачевского (см. учебник [2]) и проверки выполнения аксиом в какой-нибудь модели.

В пособии подробно рассматривается модель Кэли-Клейна, т.к. набор задач в модели Пуанкаре на полуплоскости рассмотрен в задачнике [27]. В модели Кэли-Клейна доказываются основные метрические соотношения для треугольника, приводятся сведения о движениях и основных кривых: окружности, эквидистанте. Большое внимание уделяется аналитическому заданию движений, как продолжению метода координат, реализуемого в общем курсе геометрии. Аналитическое задание используется для компьютерного моделирования различных линий.

Во всех моделях используются некоторые факты элементарной геометрии на евклидовой плоскости (пучки окружностей, сложное отношение, поляра, гиперболические функции). Соответствующий материал приведен в специальной главе, посвященной элементарной геометрии на евклидовой плоскости. Этот материал можно использовать в школе для элективного курса по выбору по дополнительным главам элементарной геометрии.

Если один и тот же объект рассматривается с точки зрения евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского, то будем использовать нижние индексы для соответствующих обозначений. Например:

$|AB|_E$ — расстояние между точками, измеренное на евклидовой плоскости в модели;

$|AB|_L$ — расстояние между этими же точками в модели, но измеренное в метрике плоскости Лобачевского;

E^2 — евклидова плоскость, L^2 — плоскость Лобачевского.

В большинстве случаев индексы, обозначающие измерение в соответствующей метрике, не указываются, если из текста очевидно, в каком смысле используется объект или величина. Рисунки,

не использующие модель, т.е. на плоскости Лобачевского, обозначены знаком \mathbb{L}^2 .

При изучении объектов плоскости Лобачевского в модели мы должны использовать определения в смысле плоскости Лобачевского (или их эквиваленты). С другой стороны, мы хотим интерпретировать эти объекты на евклидовой плоскости. В силу использования различных подходов соответствующие формулы будут иметь более сложный вид, чем для объектов евклидовой плоскости. Интерпретация мира плоскости Лобачевского на привычном нам языке евклидовой плоскости приведет к необходимости называть известные нам объекты другими терминами. Поэтому обращаем внимание читателя на корректное употребление терминологии.

Мышление читателя должно работать в параллельных направлениях. Удерживая в памяти какой-то факт плоскости Лобачевского, необходимо оперировать соответствующими понятиями евклидовой плоскости. Иногда сложившиеся навыки из элементарной евклидовой геометрии будут плохими советчиками и приведут к ошибкам, поэтому будьте внимательны и опирайтесь на аксиоматику и доказанные ранее утверждения в плоскости Лобачевского.

Трудность освоения геометрии Лобачевского на порядок выше, чем понимание большинства других разделов математики. Это подтверждается тем, что в течение нескольких десятилетий видные ученые не могли построить модель плоскости Лобачевского. Открытие неевклидовой геометрии явилось революционным переворотом в познании мира, а ее постижение развивает нас значительно больше, чем мы себе вначале представляем.

В общем курсе геометрии для педвузов и классических университетов многие факты излагаются обзорно или в сжатом виде. Жесткие требования о минимальном количестве страниц при печатании книг также заставляют авторов предьявлять некоторые формулы в готовом виде. Для сложных разделов в основном используется методика — смотри, запоминай, в остальном разберешься, когда поступишь в аспирантуру. Это лишает внимательного читателя радости открытия и полноценного познания. При изложении геометрии Лобачевского часто используется авторитарный стиль изложения. Объекты вводятся как кем-то данные, они

противоречат представлениям слушателей. У слушателей остается сомнение до тех пор, пока не будет проверено выполнение аксиом или характеристических свойств.

Настоящий курс по выбору предоставляет возможность вывести многие формулы, почувствовать причину различий величин одного и того же объекта в различных метриках. Привлекая наглядность (пособие содержит много рисунков), курс по выбору направлен на развитие абстрактного и критического мышления, пространственного представления.

В элективном курсе профильного обучения можно изучать геометрию Лобачевского, т.к. она привлекает новизной материала, способствует развитию критического и абстрактного мышления, пространственного представления.

Курс по выбору и элективный курс по геометрии Лобачевского направлены на формирование научного метода познания. В нем пересматриваются важнейшие пространственные представления: о прямолинейности, «быть расположенными в плоскости», «быть расположенными между двумя точками», понятия равенства. При изучении геометрии Лобачевского в большей степени, чем в других разделах математики, формируется аксиоматический метод познания.

Большое внимание в пособии уделяется геометрическим построениям. Чтобы осуществить перенос известных простых построений с евклидовой плоскости на плоскости Лобачевского, требуется значительная изобретательность. Работа в моделях плоскости Лобачевского часто приводит к новым и неизвестным заранее ситуациям.

На современном этапе обучения учащиеся обладают значительной базой знаний и умений по информатике, которые можно использовать в элективном курсе по математике. В этом курсе можно предложить учащимся различные темы для поисково-исследовательской деятельности. Например, доказать или опровергнуть утверждения для плоскости Лобачевского, которые известны учащимся для евклидовой плоскости. В этом случае, прежде всего, встает вопрос об истинности утверждения, которое можно «проверить» визуально на экране компьютера. Для построения фигуры необходимо провести моделирование. Если гипотеза подтверждается при различных значениях параметра,

то исследование должно завершаться доказательством сформулированного утверждения. Компьютер естественно включается в процесс математического эксперимента и усиливает мотивацию к дальнейшему исследованию. Высокая точность построения геометрических объектов на компьютере способствует принятию правильных решений. Визуализация объектов в модели существенно повышает уровень понимания геометрии Лобачевского.

Использование компьютера для наглядного изображения образа фигур при заданном движении позволяет более убедительно интерпретировать различные факты геометрии Лобачевского и проводить эксперименты для выстраивания различных гипотез.

Все важные формулы для дальнейшего изучения заключены в рамку.

После изучения специфики каждой модели (модели Кэли-Клейна, модели Пуанкаре на полуплоскости, модели Пуанкаре в круге) полезно провести интегрированное занятие по одновременной интерпретации математического объекта (отношения или утверждения) в трех моделях. В этом случае происходит разговор на различных языках об одном и том же объекте. Согласование трех языковых структур в этом случае приводит к сравнительному анализу достоинств и недостатков каждой модели. Приведем пример такой деятельности.

Задача. На плоскости Лобачевского заданы две перпендикулярные прямые n_1 и n_2 . Существуют ли прямые, параллельные каждой из прямых n_1 и n_2 ?

Эскиз рисунка изображен на рис. 1. Далее необходимо либо доказать существование таких прямых, либо построить искомые прямые в моделях.

На рис. 2—4 построены искомые прямые, соответственно, в модели Кэли-Клейна, модели Пуанкаре на полуплоскости и модели Пуанкаре в круге.

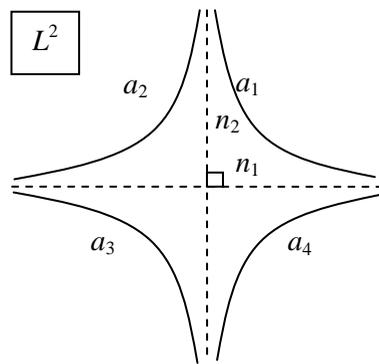


Рис. 1

На каждом из этих рисунков прямые n_1 и n_2 расположены в моделях таким образом, чтобы построения были более простыми. Интересно рассмотреть и другие случаи расположения прямых. Формулировку задачи можно расширить. Например, осуществить поиск всех движений, переводящих всю фигуру из шести прямых в себя; выяснить взаимное расположение построенных прямых a_1, a_2, a_3, a_4 между собой.

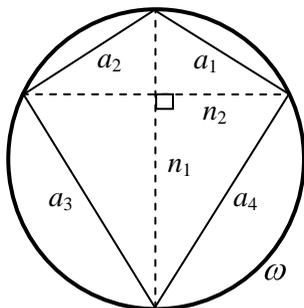


Рис. 2

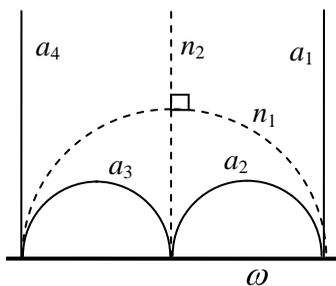


Рис. 3

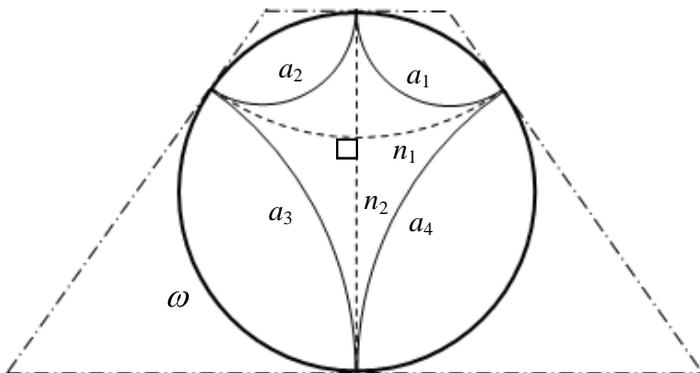


Рис. 4

Одним из перспективных направлений исследовательских проектов является построение замощений плоскости Лобачевского.

Пусть p, q, r — три целых числа ≥ 3 , такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

На плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в круге существует треугольник с углами $\alpha = \pi/p, \beta = \pi/q, \gamma = \pi/r$. Симметрии относительно сторон треугольника порождают замощение плоскости [4, с. 302].

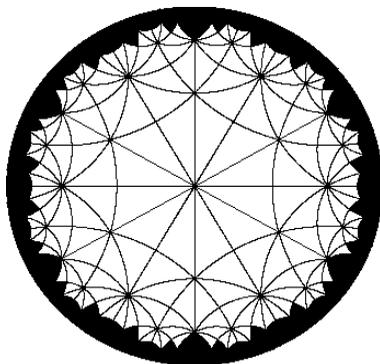


Рис. 5

На рис. 5 представлено замощение части плоскости равными треугольниками с углами $\pi/2, \pi/6, \pi/4$. Область, закрашенная черным цветом вдоль границы круга, еще не замощена.

На рис. 6 жирной линией выделена область, которая замощена двадцатью четырьмя равными четырехугольниками. Каждый четырехугольник имеет три прямых угла и один угол, равный $\pi/3$. Окрестность точки O замощена шестью четырехугольниками, а окрестность точки A — четырьмя четырехугольниками.

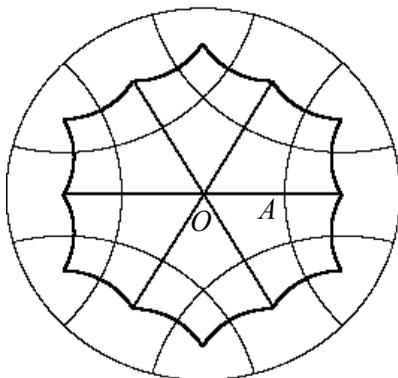


Рис. 6

Для замощения окрестности точки O (рис. 7) рассмотрим четырехугольник $OABC$, в котором $\angle O = \pi/3, \angle A = \angle B = \angle C = \pi/2$.

Пусть радиус окружности ω , которая будет изображать абсолют, равен R . Обозначим расстояние между центрами окружностей через d , т.е. $OO_1 = d$, и пусть $O_1D = R_1$.

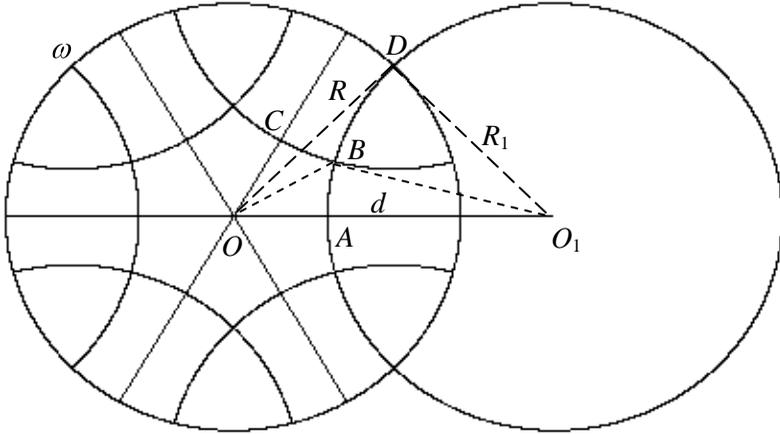


Рис. 7

Прямые плоскости Лобачевского изображаются перпендикулярными окружностями к абсолюту ω , следовательно, $\angle ODO_1 = 90^\circ$. Из прямоугольного треугольника ODO_1 получаем

$$R^2 + R_1^2 = d^2. \quad (1)$$

В треугольнике OBO_1 : $\angle O_1OB = 30^\circ$, $\angle OBO_1 = 135^\circ$.

Из теоремы синусов для треугольника OBO_1 следует

$$\frac{BO_1}{\sin 30^\circ} = \frac{OO_1}{\sin 135^\circ} \quad \text{или}$$

$$d = \sqrt{2}R. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует

$$R_1 = R, d = \sqrt{2}R.$$

Дуги остальных аналогичных окружностей получаются поворотом вокруг центра абсолюта на углы, кратные 60° .

3.22. Напишите программу построения рис. 6 и сравните с программой «Трипрямоугольники в круге».

Продолжите дальше покрытие плоскости Лобачевского указанными четырехугольниками.

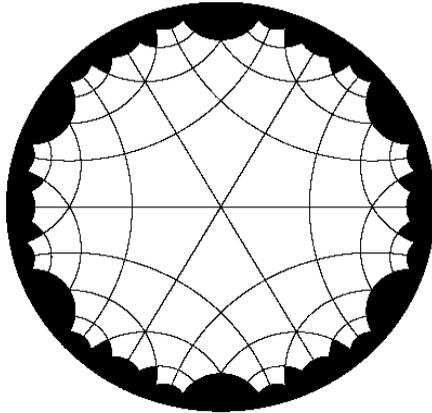


Рис. 8

3.23. Напишите программу построения рис. 8 и сравните ее с программой «Продолжение трипрямоугольников». Если рисунок математического паркета, построенный программой, вставить в Paint, то его можно раскрасить (рис. 9).

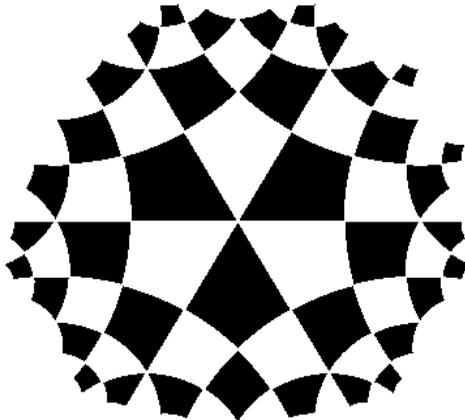


Рис. 9

Если разделить каждый трипрямоугольник на два равных треугольника, то получим схему замощения плоскости Лобачевского. На рис. 10 замощение начато из центра окружности, а вдоль границы абсолюта изображены некоторые из прямых плоскости Лобачевского (программа «Треугольники в круге Пуанкаре»). Полное замощение плоскости вдоль границы сложно изобразить из-за многообразия элементов. В некоторый момент лучше остановить этот процесс, пока различимы построенные элементы паркета.

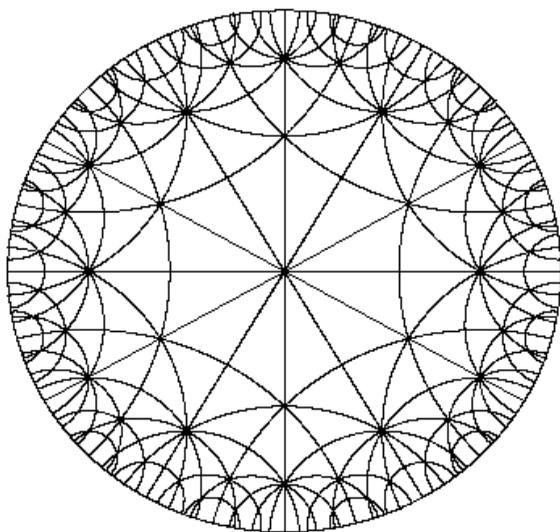


Рис. 10

3.24. Для разработки нового проекта выберите новые величины углов треугольника и постройте другое замощение плоскости Лобачевского.

Все изображения движений в моделях Пуанкаре основываются на евклидовых поворотах вокруг центра абсолюта и инверсиях относительно окружностей, поэтому одно занятие необходимо посвятить аналитическому заданию инверсии и построению образов многоугольников при инверсии.

Формулы преобразования координат при инверсии и свойства инверсии приведены в справочных материалах учебного пособия. Приведем некоторые примеры и ссылки на программы.

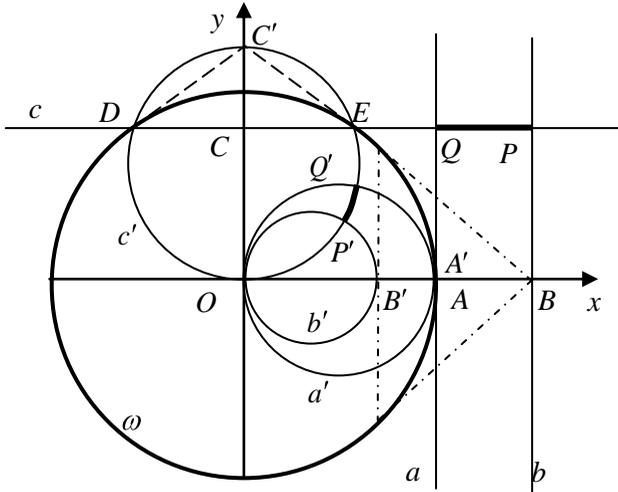


Рис. 11

При инверсии (рис. 11) прямая a , касающаяся окружности ω инверсии, отображается в окружность a' , проходящую через центр инверсии. Точка A на окружности инверсии отображается в себя, т.е. $A' = A$, поэтому окружность a' построена с диаметром OA .

Прямая b , не пересекающая окружность ω инверсии, отображается в окружность b' , проходящую через центр инверсии. Точка B отображается в точку B' , поэтому для окружности b' отрезок OB' является диаметром.

Прямая c , пересекающая окружность ω инверсии в точках D и E , отображается в окружность c' , проходящую через центр инверсии. Точка C отображается в точку C' , поэтому для окружности c' отрезок OC' является диаметром. Точки D и E при инверсии отображаются в себя, поэтому эти точки принадлежат как прямой c , так и окружности c' . Отрезок PQ при инверсии отображается в дугу $P'Q'$.

При инверсии вертикальные отрезки v_1, v_2, \dots, v_5 (рис. 12) прямоугольной сетки отображаются в дуги окружностей v'_1, v'_2, \dots, v'_5 с центрами на горизонтальном диаметре окружности инверсии ω . Горизонтальные отрезки h_1, h_2, \dots, h_5 прямоугольной сетки отображаются в дуги окружностей h'_1, h'_2, \dots, h'_5 с центрами на вертикальном диаметре окружности ω .

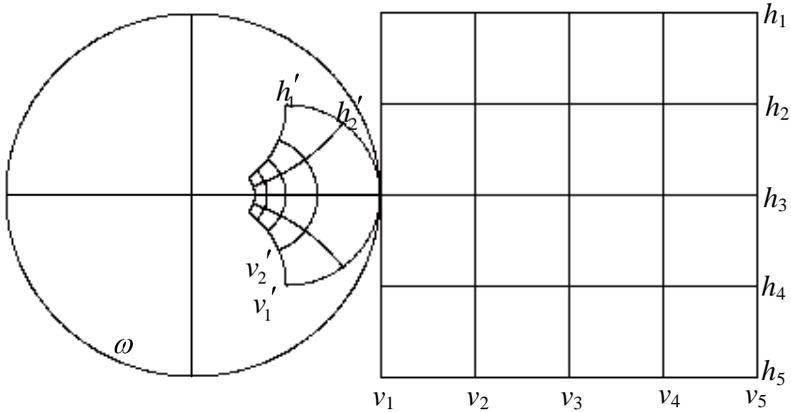


Рис. 12

Раскрашенная шахматная доска (рис. 13), расположенная вне окружности инверсии, при инверсии отобразится в раскрашенную область внутри окружности инверсии.

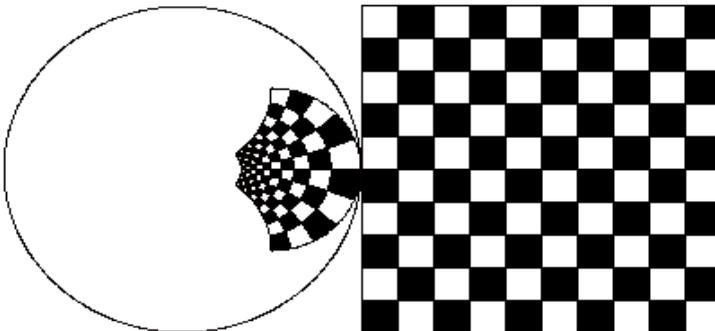


Рис. 13

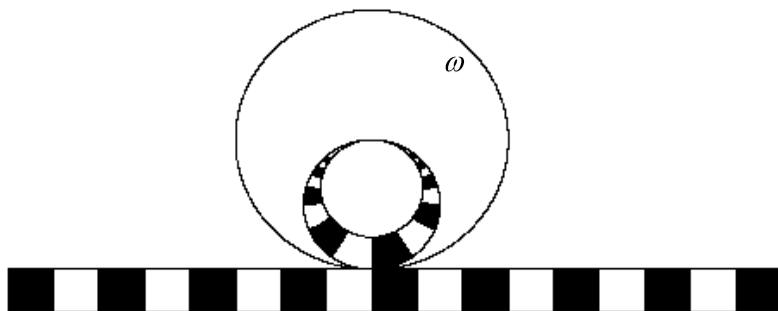


Рис. 14

Закраска квадратов на ленте и их образов (рис. 14) выполнена для каждой точки в программе **«Инверсия ленты»**.

Для рис. 13 программа **«Инверсия шахматной доски»** построила сетку для клетчатой доски, а штриховку можно выполнить в графическом редакторе Paint.

Для рис. 13 программа **«Прямоугольная сетка с инверсией.pas»** на языке **Pascal ABC** строит сетку вне окружности инверсии, ее образ и выполняет закрашивание областей.

```

program inversia;
uses
  Crt,GraphABC;
var
  x0,y0,R,n,a,b,i,j,k,t,xv,yv,x2,y2:integer;
  x,y,x1,y1:real;
begin
  SetWindowSize(800,800);
  x0:=140; y0:=220; {перенос системы координат}
  R:=120; {радиус инверсии}
  n:=5; {число областей}
  a:=40; b:=a div 2; {длина стороны квадрата и длина для смещения в центр квадрата}
  Line(x0,y0,x0+n*a,y0+n*a);
  Clrscr;
  Begin
    For k:=0 to 1258 do {построение точками окружности инверсии}
      begin
        PutPixel(x0+trunc(R*cos(k/2)),y0+trunc(R*sin(k/2)),5);
      end;
    For i:=-n to n do {построение горизонтальных отрезков и их образов}

```

```

For t:=0 to 2*n*a do
Begin
PutPixel(x0+R+t,y0+i*a,5);
x1:=R*R*(R+t)/(Sqr(R+t)+Sqr(i*a));
y1:=R*R*(i*a)/(Sqr(R+t)+Sqr(i*a));
PutPixel(x0+trunc(x1),y0+trunc(y1),5);
end;
For i:=0 to 2*n do {построение вертикальных отрезков и их образов}
For t:=-n*a to n*a do
Begin
PutPixel(x0+R+i*a,y0+t,5);
x1:=R*R*(R+i*a)/(Sqr(R+i*a)+Sqr(t));
y1:=R*R*t/(Sqr(R+i*a)+Sqr(t));
PutPixel(x0+trunc(x1),y0+trunc(y1),5);
end;

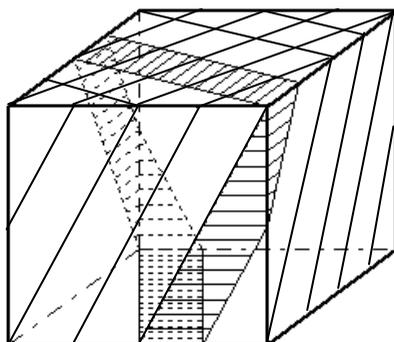
For i:=0 to 2*n-1 do {закраска областей сетки }
For t:=-n to n-1 do
Begin
xv:=R+i*a+b; yv:=t*a+b;
If (i+t)mod 2=0 Then FloodFill(xv+x0,yv+y0,clBlack);
x2:=trunc(R*R*xv/(Sqr(xv)+Sqr(yv)));
y2:=trunc(R*R*yv/(Sqr(xv)+Sqr(yv)));
If (i+t)mod 2=0 Then FloodFill(x2+x0,y2+y0,clBlack);
end;
end;
End.

```

В приложении практикума представлены все используемые операторы языка программирования **Pascal ABC**.

Глава 4

МЕТОДОЛОГИЯ ПОИСКОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ



Что нас ожидает в этой главе?

1. Выявление взаимосвязи элемента и системы для решения задачи.
2. Метод быстрого построения графика функции с заданными свойствами.
3. Использование контрпримеров для решения задач.
4. Укрупнение дидактических единиц объединением прямой и обратной задач.
5. Формирование мотивации для перехода от нескольких примеров к поиску общей функциональной зависимости.

§ 21. Различные модели одного объекта

Для математического и компьютерного моделирования необходимо сформировать следующие умения и навыки:

- определять необходимое число параметров и диапазоны их изменения для моделирования объекта;
- для выбранного числа параметров разрабатывать математическую модель объекта;
- разрабатывать алгоритмы для компьютерного моделирования этих моделей;
- реализовывать алгоритмы в компьютерной программе;
- сравнивать математические модели для различных параметризаций и выбирать наиболее рациональную модель для компьютерного моделирования;
- изучать семейства объектов при варьировании одного из параметров.

Идея использования различных моделей одного объекта обсуждается в школьном курсе информатики, хотя и недостаточно реализуется в дальнейшем. В математике же фактически не поясняется эта идея, хотя неявно ее можно обнаружить.

Например, для окружности сформулировано определение и получено уравнение окружности, т.е. рассматривается аналитическое задание окружности. Учащийся должен уметь графически изображать окружность с помощью циркуля и без циркуля для построения рисунка к задаче.

Прямая на плоскости определяется аксиоматически, приведены различные уравнения прямой, т.е. различные аналитические модели, и сформированы навыки графического изображения прямой. Правильнее сказать, части прямой, т.е. отрезка, по линейке и без линейки, для построения рисунка к задаче.

При компьютерном моделировании окружности и прямой требуется расширение списка этих моделей. Наиболее рационально использовать параметрические уравнения окружности и отрезка.

Формирование умения разрабатывать математические модели объекта — сложный и творческий процесс. В нем нужно выделить три основных этапа: обучение моделированию, формирование навыков на классе однотипных заданий, подведение обучаемого к самостоятельному выбору различных параметризаций.

Для окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

можно рассмотреть две параметризации.

Первая параметризация выбрана для случая, когда одна из переменных выбирается в качестве параметра

$$x = t, y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad (1)$$

где $-R \leq t \leq R$.

Для следующей, часто используемой, параметризации рассмотрим вектор с начальной точкой в центре окружности и конечной точкой на окружности. Вторая параметризация определяется с помощью угла φ , образованного указанным вектором с положительным направлением оси Ox :

$$x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, \quad (2)$$

где $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Если в качестве параметра t выбрать время, то можно изменить угловую скорость поворота вектора вокруг начала координат. Полагая, например, $\varphi = 3t$, получим следующую параметризацию:

$$x = R \cos 3t, \quad y = R \sin 3t, \quad t \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right].$$

В этот момент преподавателю важно не стремиться рассказать все известные ему параметризации, а обратиться к учащимся, чтобы они самостоятельно начали предлагать другие параметризации.

Эксперимент показывает, что вначале появляются полные аналогии с вышеперечисленными параметризациями:

$$y = t, \quad x = \pm\sqrt{R^2 - t^2}, \quad -R \leq t \leq R,$$

$$x = R \cos 2t, \quad y = R \sin 2t, \quad t \in 0; \pi,$$

$$x = R \cos 4t, \quad y = R \sin 4t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Затем появляется попытка объединить частные случаи

$$x = R \cos kt, \quad y = R \sin kt, \quad t \in \left[0; \frac{2\pi}{k}\right], k - const, k \neq 0.$$

Пик творчества наступает в тот момент, когда учащиеся начинают выбирать для параметра новый смысл.

Если в качестве φ выбран угол, образованный вектором с положительным направлением оси Oy , то получаем параметризацию

$$x = R \sin t, \quad y = R \cos t, \quad t \in 0; 2\pi .$$

Если в качестве φ выбран вписанный угол (рис. 1), опирающийся на дугу M_0M , то получаем параметризацию

$$x = R \sin 2\varphi, \quad y = R \cos \varphi, \quad \varphi \in 0; \pi .$$

Кстати, эта параметризация была получена ранее.

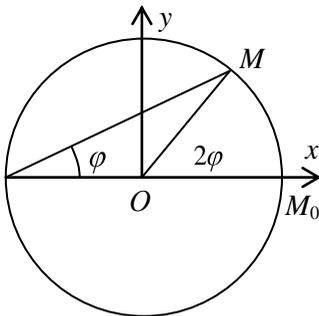


Рис. 1

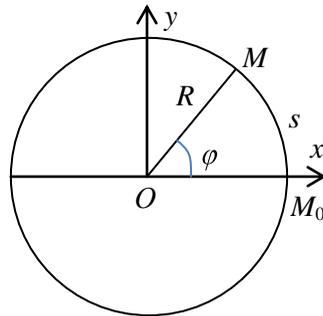


Рис. 2

Положение точки M на окружности можно охарактеризовать длиной дуги M_0M (рис. 2). Длина s дуги выражается через радиус окружности R и величину центрального угла φ , опирающегося на эту дугу, следующим образом $s = R\varphi$. Возникает новая параметризация, использующая в качестве параметра длину дуги окружности:

$$x = R \cos \frac{s}{R}, \quad y = R \sin \frac{s}{R}, \quad s \in 0; 2\pi R .$$

Наиболее полно спектр различных параметризаций для прямой представлен в базовом и профильном уровнях школьного курса математики.

В различных школьных учебниках используются уравнения прямой на плоскости:

$$y = kx + b ; \quad (3)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) ; \quad (4)$$

$$ax + by + c = 0 ; \quad (5)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} ; \quad (6)$$

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} ; \quad (7)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} . \quad (8)$$

Если добавить уравнения

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad (9)$$

которые наиболее удобно использовать при компьютерном построении отрезка, то получим богатую коллекцию различных моделей прямой.

В уравнении (3) используются 2 параметра, но, к сожалению, это уравнение нельзя использовать для вертикальных прямых, которые определяются уравнениями $x = const$.

В уравнениях (4), (5) используются 3 параметра. Уравнения вида (4) не определяют класс вертикальных прямых. В уравнении (5) можно получить два параметра, разделив на ненулевой коэффициент при неизвестных.

Например,

$$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0, \quad b \neq 0$$

или

$$y = kx + m, \quad k = -\frac{a}{b}, \quad m = -\frac{c}{b}.$$

В этом случае сужается класс рассматриваемых прямых.

В остальных случаях используются 4 параметра.

Однако идею о сокращении числа параметров до двух параметров для всех прямых на плоскости можно реализовать.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Обозначая

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -p,$$

получим уравнение

$$\cos \varphi x + \sin \varphi y - p = 0, \quad (10)$$

которое часто используется при построении огибающих линий.

В уравнении (10) используются два параметра, которые имеют геометрический смысл. Параметр φ равен углу (рис. 3), образованному единичным нормальным вектором $\vec{n}(\cos \varphi; \sin \varphi)$ с положительным направлением оси Ox .

Из начала координат опустим перпендикуляр OH на прямую (рис. 3). Параметр p равен расстоянию OH , взятому со знаком $+$, если векторы \vec{n} и \vec{OH} сонаправлены, и со знаком $-$, если векторы противоположно направлены.

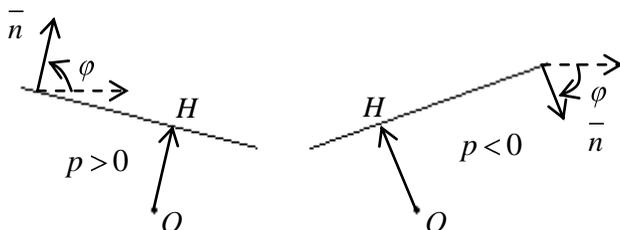


Рис. 3

Построение моделей параболы и гиперболы является проблемной задачей, так как определения этих объектов в школьном курсе формируются на основе уравнений. Эти определения зависят от выбранной системы координат, не являются геометрическими определениями и фактически являются аналитической моделью геометрических объектов.

В некоторых школьных учебниках парабола определяется геометрическим способом, как множество точек плоскости,

равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

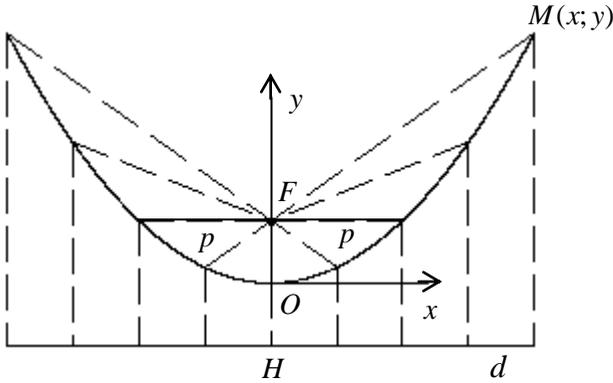


Рис. 4

Обозначим расстояние от фокуса F до директрисы d через p (рис. 4). Прямая, проходящая через фокус перпендикулярно директрисе, называется *осью параболы*. Из определения параболы следует, что парабола симметрична относительно оси. Точка пересечения параболы с осью называется *вершиной параболы*.

Фокус параболы удален от вершины параболы на расстояние $p/2$.

Рассмотрим декартову систему координат, начало которой совпадает с вершиной параболы, а ось Oy сонаправлена с лучом $[OF)$. Для произвольной точки $M(x; y)$ параболы получаем уравнение

$$x^2 = 2py. \quad (11)$$

Подставляя значение $y = p/2$ в уравнение, получим $x = \pm p$. Точки $(-p; p/2)$ и $(p; p/2)$ расположены на параболе и удалены от оси Oy на расстояние p .

Ценность уравнения параболы в виде (11) состоит в том, что параметр p имеет геометрическое значение. Параметр равен расстоянию от фокуса до директрисы, а также равен половине длины хорды параболы, проходящей через фокус перпендикулярно оси

параболы. Половина значения фокального параметра p равно расстоянию от фокуса до вершины параболы.

Если переменные x и y измерять в линейных единицах, что фактически и делается при построении чертежа или считывании информации с чертежа, то параметр p в уравнении также должен измеряться в линейных единицах.

В школе часто используется уравнение параболы в виде

$$y = ax^2. \quad (12)$$

Для уравнений (11) и (12) зависимость между параметрами выражается формулой

$$a = \frac{1}{2p}. \quad (13)$$

Приоритет использования формулы (12) в школьном курсе математики определяется тем, что в этом уравнении функция явно задана, однако геометрическое истолкование параметра a в этом случае затруднено.

Если для p использовать именованную величину, например, метр, то параметр a имеет размерность m^{-1} .

Для параболы производными понятиями являются: вершина, фокус, директриса, ось симметрии, фокальный параметр.

Фиксируя один из параметров и изменяя другой, можно исследовать расположение остальных параметров семейства парабол.

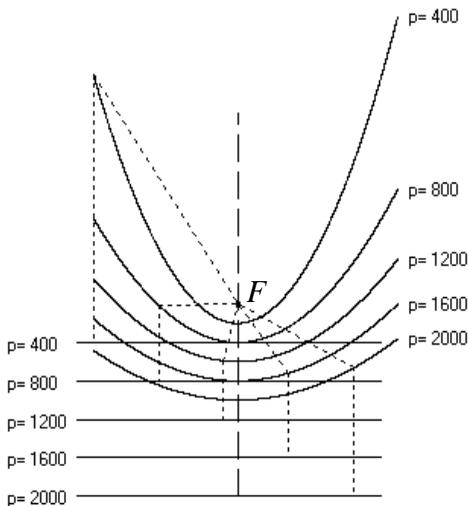


Рис. 5

На рис. 5 построено семейство парабол с общим фокусом и общей осью симметрии.

Уравнения семейства парабол $y = \frac{x^2 - p^2}{2p}$, а уравнения директрис $y = -p$. Пунктирными линиями изображены равные отрезки от точки параболы до фокуса и до директрисы.

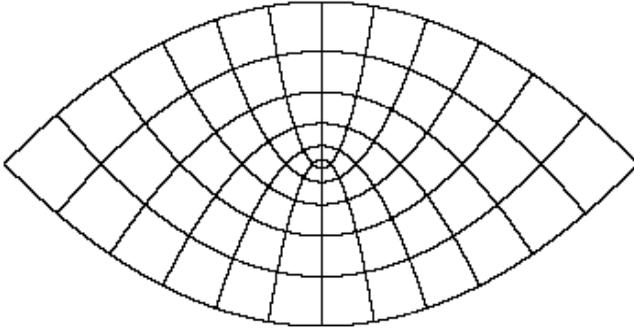


Рис. 6

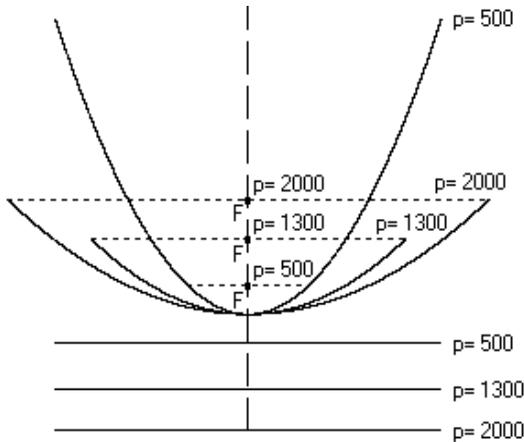


Рис. 7

Два семейства парабол (рис. 6) используются в качестве параболической системы координат на плоскости.

На рис. 7 построено семейство парабол с общей вершиной и общей осью симметрии. Пунктирными линиями изображены хорды парабол, проходящие через фокусы парабол. Половины

этих хорд равны фокальным параметрам. Сравните длины этих хорд с расстоянием от фокусов парабол до соответствующих директрис. Семейство парабол задано уравнением (3).

На рис. 8, 9 построены семейства парабол с общей директрисой и общей осью симметрии.

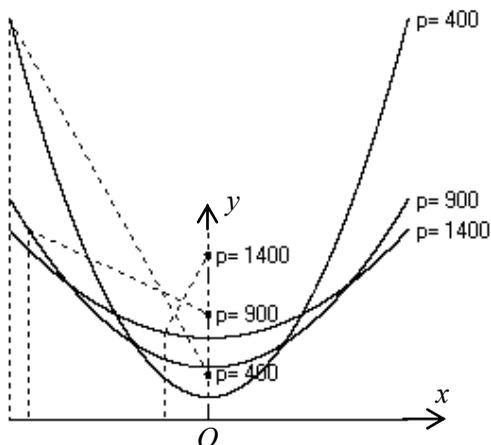


Рис. 8

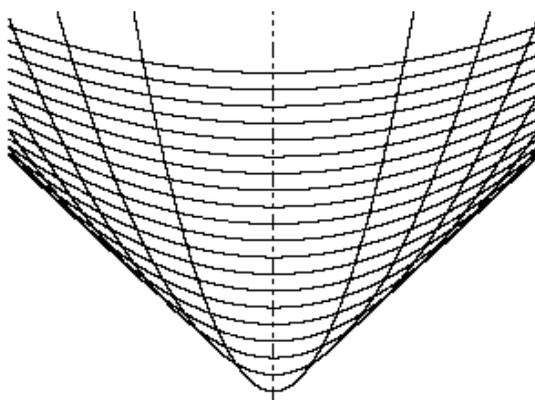


Рис. 9

Тренинг построения различных моделей можно расширить, если использовать различные системы координат. Ряд учебников для профильного уровня используют полярную систему координат.

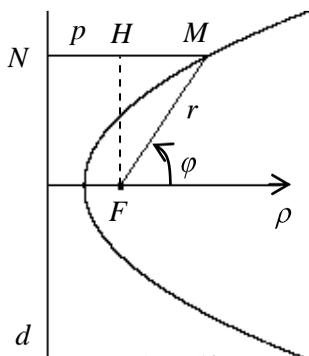


Рис. 10

Если полюс полярной системы координат совпадает с полюсом параболы, а полярный луч направлен вдоль оси симметрии параболы (рис. 10), то получаем

$$MF = MN, \quad r = r \cos \varphi + p,$$

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad \varphi \in (0; 2\pi) \text{ — полярное уравнение параболы.}$$

На рис. 11 выбрана новая параметризация параболы. Полярное уравнение параболы

$$r = \frac{p}{1 - \sin \varphi}, \quad \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

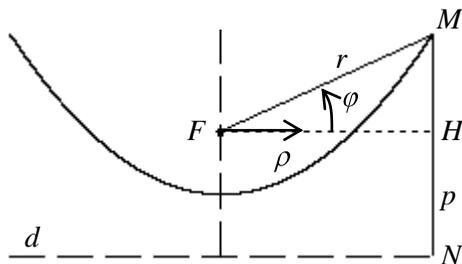


Рис. 11

Выбирая полюсы в других точках, связанных с параболой, и другие направления полярного луча, можно продолжить линию на самостоятельный поиск параметризаций.

Формирование умения разрабатывать модели одного и того же объекта можно расширить, если разработку аналитических моделей дополнить методами создания моделей объектов конструктивными методами, например, перегибанием листа бумаги.

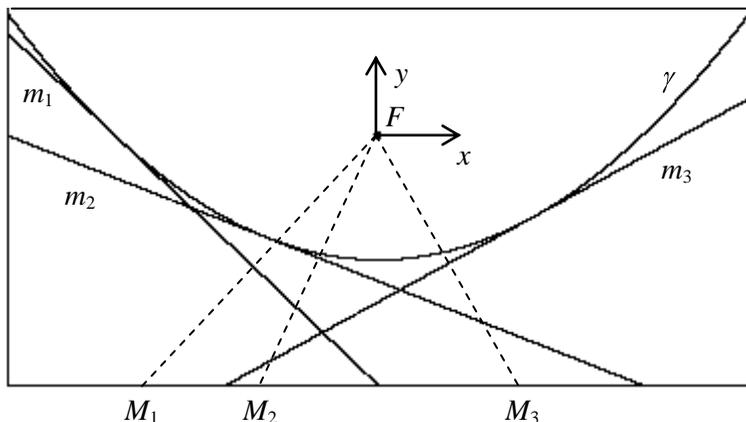


Рис. 12

Для параболы можно привести другие методы построения. Например, парабола, как огибающая семейства прямых при сгибании листа бумаги (рис. 12) [19, с. 183—189].

Перегибая прямоугольный лист бумаги так, чтобы точка нижнего основания листа совпала с фиксированной точкой F , получим семейство сгибов, т.е. семейство прямых на плоскости (рис. 12).

Для семейства прямых

$$\sin \varphi x - \cos \varphi y - \frac{a}{\cos \varphi} = 0$$

огibaющей линией является парабола (рис. 12, 13)

$$y = \frac{x^2}{4a} - a$$

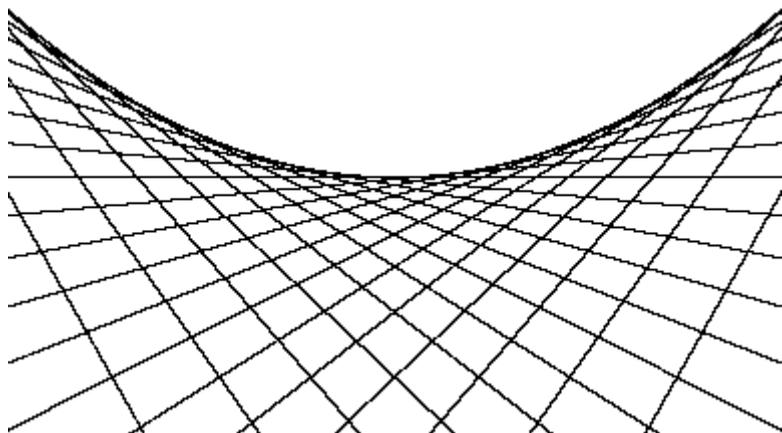


Рис. 13

Вначале парабола получается как дискретное множество точек, т.к. совершается конечное число операций. Учащийся осознает, что таким способом можно получить любое конечное число точек на параболе. В этом случае учащийся естественно включается в разработку обоснования утверждения того, что построенное множество является параболой. Создаются предпосылки для того, чтобы заменить физическую модель компьютерной. Формируется мотивация разработки компьютерной модели.

Параболу можно определить как множество центров окружностей, касающихся оси абсцисс и окружности $x^2 + (y - p)^2 = p^2$ (рис. 14).

Действительно, для произвольного центра $M(x; y)$ окружности получаем $MK = MF - p$ или

$$y + p = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}.$$

Уравнение параболы $y = \frac{x^2}{4p}$.

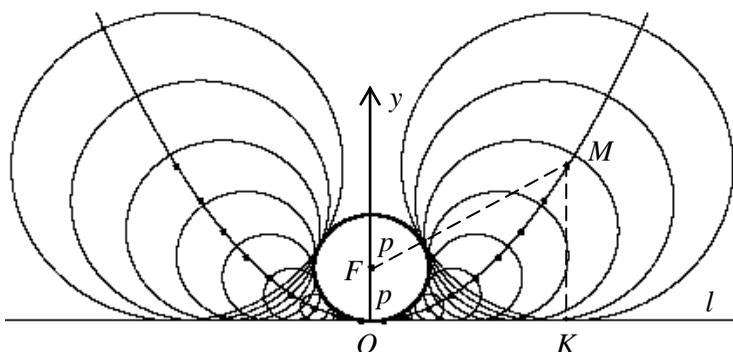


Рис. 14

Параболу можно определить как множество центров окружностей, касающихся данной прямой и проходящих через данную точку (рис. 15).

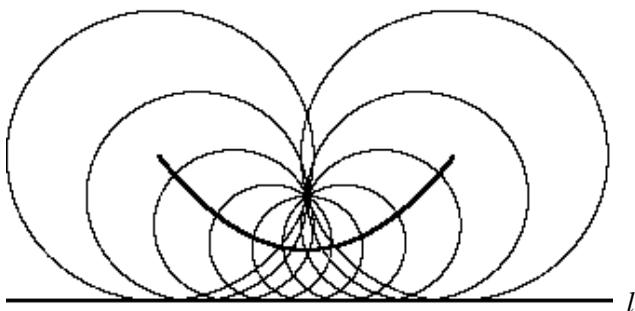


Рис. 15

Напишите компьютерные программы для следующих рисунков и сравните с соответствующими программами:

- рис. 5 и «Семейство парабол с общим фокусом»;
- рис. 6 и «Параболические координаты»;
- рис. 7 и «Семейство парабол с общей вершиной»;
- рис. 9 и «Семейство парабол с общей директрисой»;
- рис. 13 и «Парабола как огибающая»;
- рис. 14 и «Парабола как множество центров»;
- рис. 15 и «Парабола и окружности по определению».

§ 22. Метод включения элемента в систему

Существует класс задач, которые трудно решить, т.к. для их решения требуется применить эвристики или выполнить дополнительные построения. Даже опытные специалисты в элементарной математике иногда вынуждены признать себя побежденными, и обращаются к предложенному решению. При знакомстве с приведенным решением создается впечатление о необычности данного решения, а самое главное — как могло возникнуть такое решение? По сравнению с учащимся, опытный специалист в этом случае задает себе вопрос: почему же я не смог решить эту задачу. Насколько близко я был к решению задачи?

Для развития креативности существует много технологий, в частности, теория решения изобретательских задач (ТРИЗ). Эти технологии ориентируют на анализ проблемы, преобразование исходной ситуации в задачу по выявлению основного противоречия и способа его устранения. С точки зрения методики обучения решению математических задач ничего нового в этом нет. В математике часто применяется метод решения задачи в направлении от заключения к условию, чтобы выяснить основное противоречие.

Если для решения технических проблем описано много методов устранения основного противоречия, то для решения математических задач, с которыми человек встречается в первый раз, таких методов почти нет.

Рассмотрим один из таких методов, который в некоторых ситуациях позволяет выстроить последовательность вопросов и действий по разрешению основного противоречия в математической задаче.

Иногда математические задачи удается решить, если можно найти для неизвестного элемента систему, содержащую этот элемент. Оперирование этой системой позволяет быстрее достичь того же эффекта, чем при непосредственном использовании искомого элемента, т.к. иногда системой легче маневрировать, чтобы достичь поставленной цели.

Обычно системный метод в методике понимается как организация изучения материала в соответствии с системностью, уделяя внимание вопросам: каким набором задач мы организуем пропедевтику необходимого действия, как закрепляем это действие,

какое влияние оказывают рядом расположенные элементы при изучении этого элемента?

За рамками методических исследований остается другое направление на предметном уровне, т.е. предоставление данному элементу большей свободы путем включения его в систему. Как может проявиться элемент в системе? Может ли система более экономным или хотя бы равносильным способом достичь такого же эффекта, как и при использовании элемента прямым воздействием? Эта проблема является сложной, и мы не знаем пока полного ответа на главный вопрос: какова роль интуиции в поиске объемлющей системы для включения элемента в систему? Но отметим, что тренинги в этом направлении позволяют быстрее решить другие новые задачи.

Наблюдения за различными решениями олимпиадных заданий и анализ исследовательских действий учащихся в проекте показывает, что иногда латеральное мышление, боковое видение новых аспектов искомого элемента позволяет получить окончательные решения, достичь которых прямым воздействием затруднительно.

Суть метода можно достаточно просто пояснить, если обратиться к приключенческим фильмам. Если герою фильма сложно достичь цели прямым ходом, то он достигает цели, используя средства маскировки из окружающей среды (макет для отпугивания птиц, стог из снопов ржи, перекатываясь в бочке и т.д.). Осознание роли элемента в системе помогает достичь цели, организуя для этого систему в соответствии с интересами других элементов системы.

Поясним общее направление мысли на геометрической задаче по оклейке куба.

На рис. 1 мы видим косую сетку линий на кубе. Каждая сторона куба делится на три равные части, и проводятся отрезки, соединяющие точки на противоположных сторонах грани куба. При пересечении отрезков получились квадраты и прямоугольные треугольники (почему?). Одну из полос начали заклеивать бумажной лентой (рис. 2).

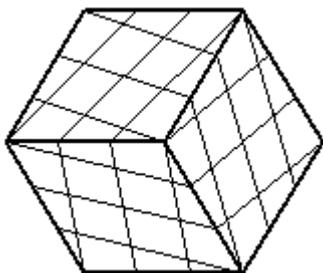


Рис. 1

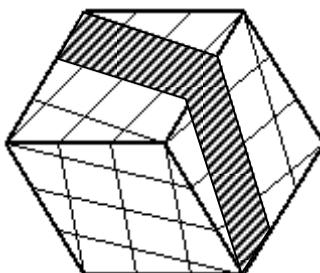


Рис. 2

Почему лента перейдет на вторую грань именно так, как показано, т.е. по данной ранее сетке?

Как она будет продолжена дальше?

Хватит ли одной, достаточно длинной полосы, чтобы оклеить весь куб, или эта лента «заиклится» раньше, т.е. она не накроет все квадратики и треугольники? Возможно, придется отрезать кусок ленты и начать заклеивать новые полосы?

При такой оклейке все квадратики и треугольники будут накрыты по одному разу?

Что же там на невидимых гранях куба, т.е. за горизонтом видимого? Там, где кончается видимое, начинается игра воображения или мы ее подчиним целенаправленной деятельности?

Упростим задачу и начнем изучение куба с более простой сеткой на верхней грани (рис. 3).

Перегибая бумажную полосу на грань BCC_1B_1 , трудно объяснить, почему полоса займет именно то положение, которое предписано кривой сеткой.

Можно изготовить куб из дерева, нанести сетку, наклеить ленту. Она действительно подтвердит предположение, но объяснения по-прежнему нет. Эксперимент с натуральной моделью подтверждает гипотезу и укрепляет уверенность в правоте, но нужно доказательство.

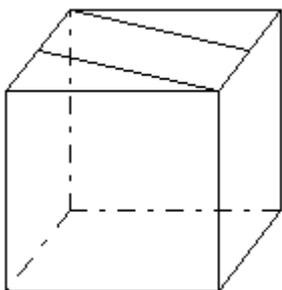


Рис. 3

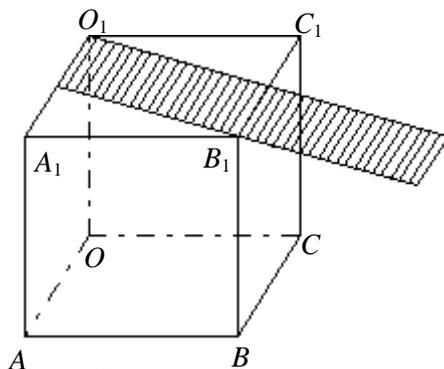


Рис. 4

Пусть лента наклеена на правую боковую грань, тогда ее нужно представлять себе не только как одну ленту, а ленту на грани. Это уже не единичный элемент, а целая система, состоящая из ленты и боковой грани. Ленту можно вернуть в исходное состояние, развернув ее в плоскость верхнего основания. А может и нельзя вернуть, т.к. она приклеена? При возвращении ленты в плоскость верхнего основания вслед за лентой поднимется и правая боковая грань. Грань повернется вокруг прямой B_1C_1 .

Бумажная полоса окажется на повернутом квадрате, согласно рис. 5. Прямоугольный край ленты пересекает отрезок B_1C_1 в точке K . В точке пересечения K образуются равные вертикальные углы, и один край ленты пройдет через вершину квадрата, т.е. контура боковой грани.

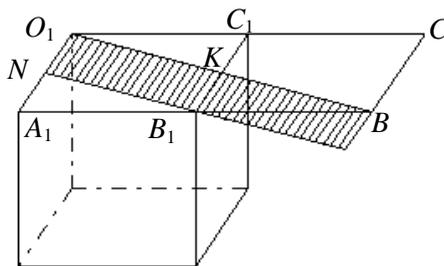


Рис. 5

Достаточно взглянуть на рис. 5, чтобы догадаться о частичном решении задачи. Как объяснить появление мысли о действии с гранью вместо действия с лентой?

Что же помогло догадаться повернуть боковую грань в плоскость верхнего основания?

Видение элемента, т.е. ленты в системе (лента и квадрат).

Если ленту перегибать с одной грани на другую грань, а затем, разгибая, возвращать в исходное положение, не обращая внимание на правую боковую грань, то в верхнем основании второй квадрат не появляется. Работая с лентой как с одним элементом, эвристика о повороте правой грани в плоскость верхнего основания не возникает.

Итак, идея объединения боковой грани с лентой является естественной. Требуется выяснения возникновения мысли о развороте наклеенной ленты в первоначальное положение прямолинейной ленты.

Первое основание для разворота изогнутой ленты — это попытка приклеить ленту на натуральной модели или ментальное представление о возможном перекосе в случае попытки натянуть ленту в другое положение. После неудачной попытки происходит разворот ленты в плоскость верхнего основания.

Второе основание для разворота ленты: если представить, что лента не накрывает полностью куб, то интересно узнать, сколько граней куба накроет лента. Для этого нужно развернуть изогнутую ленту в первоначальное положение.

Идея метода включения элемента в систему проста. Пусть задача решена полностью или частично. Выясняем промежуточное или окончательное положение данного элемента. Он находится в связи с другими элементами геометрической фигуры, т.е. получаем некоторую систему элементов. Пытаемся вернуть данный элемент вместе с системой в исходное положение, наблюдая за изменением всей системы.

Дальнейшее расположение ленты на кубе прослеживается аналогично.

Бумажная полоса пересекает отрезок B_1B , следовательно, она переходит на переднюю грань ABB_1A_1 . Чтобы понять, как она будет заклеивать переднюю полосу, развернем и переднюю грань в плоскость верхнего основания, но так, чтобы передняя грань и правая боковая грань после разворота имели общий отрезок B_1B (рис. 6).

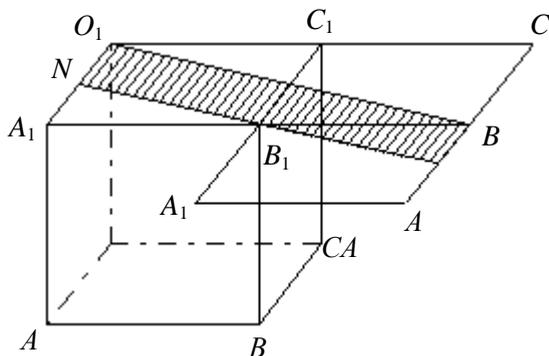


Рис. 6

Переходя далее с одной грани на другую, получим следующую развертку (рис. 7).

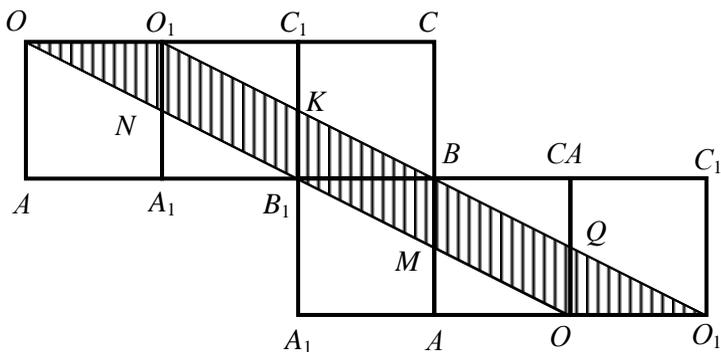


Рис. 7

Из полученной развертки собираем куб. Возникает кольцо на кубе, образованное лентой (рис. 8).

Куб имеет элементы симметрии. Какие из этих элементов симметрии куба отображают это кольцо в кольцо? Как использовать это наблюдение для построения других колец на кубе?

Какую часть составляет площадь кольца от площади поверхности куба? Можно ли это наблюдение использовать для оценки количества колец, необходимых для полной оклейки куба?

Продолжите исследование оклейки куба следующей лентой, прикладывая следующую ленту вплотную к предыдущей ленте на одной грани.

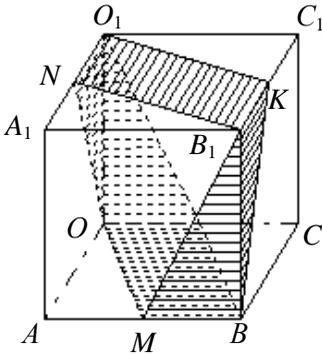


Рис. 8

Проведите исследование оклейки куба с сеткой, приведенной на рис. 1.

Рисунки 1 и 8 можно повторять, варьируя размеры куба, наклон ленты, метод штриховки ленты, поэтому возникает интерес к автоматизации построения этих фигур с помощью компьютерной программы.

Напишите самостоятельно программу построения косоугольной сетки, представленной на рис. 1. Сравните ее со следующей программой «Косая сетка на кубе»:

```
Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
xc = 3000: yc = 3000: a = 1200: b = 1200: pi = 4 * Atn(1)
u = pi / 3
For i = 1 To 3
Line (xc + a + (i - 1) * b / 3 * Cos(u), yc + (i - 1) * b * Sin(u) / 3)-(xc + i * b / 3 *
Cos(u), yc + i * b / 3 * Sin(u))
Line (xc + a + i * b / 3 * Cos(u), yc - i * b * Sin(u) / 3)-(xc + (i - 1) * b / 3 *
Cos(u), yc - (i - 1) * b / 3 * Sin(u))
Line (xc + a - i * a / 3, yc)-(xc + a + b * Cos(u) - (i - 1) * a / 3, yc + b * Sin(u))
Line (xc + a - (i - 1) * a / 3, yc)-(xc + a + b * Cos(u) - i * a / 3, yc - b * Sin(u))
Line (xc + a + i * b * Cos(u) / 3, yc + i * b * Sin(u) / 3)-(xc + a + b * Cos(u) + (i -
1) * b * Cos(u) / 3, yc - b * Sin(u) + b * (i - 1) * Sin(u) / 3)
Line (xc + a + (i - 1) * b * Cos(u) / 3, yc - (i - 1) * b * Sin(u) / 3)-(xc + a + b *
Cos(u) + i * b * Cos(u) / 3, yc + b * Sin(u) - b * i * Sin(u) / 3)
Next i
For t = 0 To b / 3 Step 0.01
Line (xc + a + (b / 3 + t) * Cos(u), yc + (b / 3 + t) * Sin(u))-(xc + (2 * b / 3 + t) *
Cos(u), yc + (2 * b / 3 + t) * Sin(u)), QBColor(9)
Line (xc + a + (b / 3 + t) * Cos(u), yc + (b / 3 + t) * Sin(u))-(xc + a + (b + t) *
Cos(u), yc + (-b + t) * Sin(u)), QBColor(9)
Next t
DrawWidth = 2
Line (xc, yc)-(xc + a, yc)
Line (xc + b * Cos(u), yc + b * Sin(u))-(xc + a + b * Cos(u), yc + b * Sin(u))
Line (xc + b * Cos(u), yc - b * Sin(u))-(xc + a + b * Cos(u), yc - b * Sin(u))
```

```

Line (xc, yc)-(xc + b * Cos(u), yc + b * Sin(u))
Line (xc, yc)-(xc + b * Cos(u), yc - b * Sin(u))
Line (xc + a, yc)-(xc + a + b * Cos(u), yc + b * Sin(u))
Line (xc + a + 2 * b * Cos(u), yc)-(xc + a + b * Cos(u), yc + b * Sin(u))
Line (xc + a, yc)-(xc + a + b * Cos(u), yc - b * Sin(u))
Line (xc + a + 2 * b * Cos(u), yc)-(xc + a + b * Cos(u), yc - b * Sin(u))
End Sub

```

Напишите программу штриховки кольца из ленты на кубе (рис. 8) и сравните ее с программой «**Оклейка куба**».

На куб нанесли сетку в соответствии с рисунком в начале главы. Напишите программу штриховки кольца из ленты на кубе и сравните ее с программой «**Оклейка куба с большим наклоном**».

Эвристики для некоторых задач выстраиваются на основе обратного действия по поиску элемента для заданной системы.

Рассмотрим утверждение.

Если из множества $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ выбрать любые $n + 1$ чисел, то среди них найдутся два взаимно простых.

В пособии (Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. М.: Мир, 2006. С. 150) предлагается решение в две строки.

«Утверждение очевидно, т.к. среди выбранных чисел должны найтись два числа, которые отличаются на 1 и поэтому взаимно просты».

В этом пояснении предполагается, что выбранные $n + 1$ числа можно разложить по ячейкам $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n - 1, 2n\}$ так, что по принципу Дирихле в одной ячейке окажется пара чисел, а поэтому обязательно найдутся два числа, отличающиеся на 1.

Можно сообщить учащимся это решение, как пример хорошей догадки, но, обучая выстраиванию эвристик, мы должны действовать иначе. Обучение должно осуществляться через развитие с выяснением истоков такой догадки, чтобы научить действовать в другой новой ситуации с попыткой применения некоторой системы.

Будем называть произвольные $n + 1$ числа из множества $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ системой чисел, а два взаимно простых числа — элементом этой системы. Очевидно, что эта пара чисел не является фиксированной для различных выборов, а должна быть

динамической. В противном случае можно так осуществить выборку $n + 1$ чисел, чтобы она не содержала эту пару чисел.

Формулировка утверждения указывает, что такая пара в системе есть, поэтому нужно найти такую пару, не зависящую от выборки, причем, не заботясь вначале о том, принадлежит ли она этой выборке, а затем пытаться доказать, что она обязательно содержится в этой выборке.

Итак, мысль должна быть направлена на поиск динамического элемента в нашей системе, т.е. пары взаимно простых чисел. Акцент на паре чисел позволяет быстро найти два натуральных взаимно простых числа, отличающихся на единицу.

После этого на основе принципа Дирихле легко доказывается, что система из $n + 1$ чисел, выбранных из множества $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, обязательно содержит два таких числа.

Мы немного изменили структуру доказательства, сакцентировав внимание на поиске элемента для системы. Идея эта не нова, и она интуитивно применяется в различных доказательствах, но мы часто о ней забываем. Тренинг с использованием акцента на систему и элемент системы позволяет в другой ситуации быстро вспомнить используемый прием, чтобы применить его к решению новой задачи.

§ 23. Формирование целей для решения проблемы

Рассмотрим методику формирования подцелей для достижения главной цели решения задачи.

В олимпиадных заданиях встречаются следующие задачи.

Задача 1. Дан треугольник. Доказать, что существует треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника.

Задача 2. Медианы треугольника равны 9, 12, 15. Чему равна площадь треугольника?

Рассмотрим задачу, являющуюся комбинацией этих задач, и для нее проанализируем различные способы решения.

Задача 3. Дан треугольник ABC . Доказать, что из медиан этого треугольника можно построить треугольник и найти отношение площадей этих треугольников.

Первый способ построения, основанный на центральной роли искомым элементов. Главная цель — сконструировать треугольник, построенный из медиан, и найти отношение площадей.

Начнем построение треугольника из медиан треугольника, используя одну из медиан, например, AA_1 . Пытаемся передвинуть две другие медианы таким образом, чтобы они прилегли к отрезку AA_1 . Получим отрезки A_1N и AK . Точки N и K могут не совпасть (рис. 1).

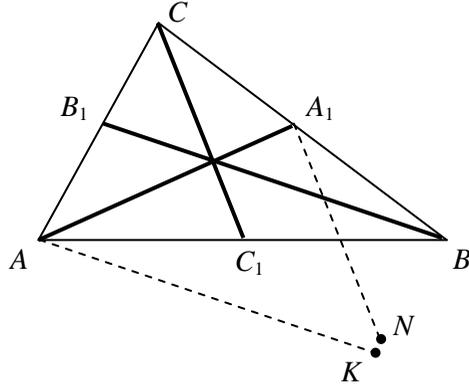


Рис. 1

Отрезки A_1N и AK можно повернуть вокруг соответствующих точек A_1, A , чтобы точки N и K совпали. Но, во-первых, углы поворотов не определены, а во-вторых, в дальнейшем изменение положений этих отрезков затруднит вычисление площади треугольника, образованного медианами. Возникает предположение, что точки N и K совпадут. Уточним траектории концевых точек C_1 и B медиан CC_1 и B_1B при движении.

При параллельном переносе медианы B_1B на вектор $\overrightarrow{B_1A} = \vec{a}$ точка B сдвигается на вектор \vec{a} (рис. 2), поэтому $\overrightarrow{BN} = \vec{a}$. При параллельном переносе медианы CC_1 на вектор $\overrightarrow{CA_1} = \vec{b}$ точка C_1 сдвигается на вектор \vec{b} ,

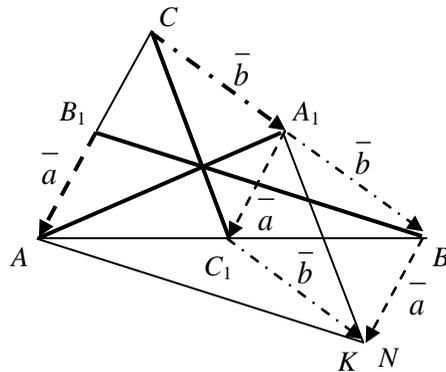


Рис. 2

поэтому $\overline{C_1K} = \bar{a}$. Чтобы доказать, что точки N и K совпадают, нужно доказать, что $\overline{NK} = \bar{0}$ или $\overline{NB} + \overline{BC_1} + \overline{C_1K} = \bar{0}$. Представим вектор $\overline{BC_1}$ в виде суммы $\overline{BC_1} = \overline{BA_1} + \overline{A_1C_1}$. Учитывая равенства $\overline{A_1C_1} = \bar{a}$, $\overline{A_1B} = \bar{b}$, получаем $\overline{NB} + \overline{BC_1} + \overline{C_1K} = -\bar{a} + \overline{BC_1} + \bar{b} = \bar{0}$.

Второй способ можно легко понять, если положить в основу концепцию «Я и среда». В большинстве случаев мы организуем свою деятельность, полагая, что вокруг нас существует сложная среда больших размеров. Мы понимаем, что она объективно существует, независимо от нашего сознания. Чтобы решить некоторую проблему, касающуюся нас, мы вынуждены сами действовать. «Я винтик в этой большой среде и действую, полагаясь на свои возможности и способности».

Второй подход состоит в том, что если я хочу чего-то достичь, то я должен понимать, что я часть этой среды (системы) и поэтому, прежде чем совершить какое-то действие, нужно представить движение всей системы, которое может перевести меня в это положение. Такое действие можно совершить, если система небольших размеров и мое действие согласуется с интересами элементов всей системы. Среду нужно организовать так, чтобы достичь цели.

Чтобы перенести медиану B_1B в точку A , рассмотрим параллельный перенос треугольника ABC на вектор $\overline{CB_1} = \bar{a}$ (рис. 3). Получим треугольник A_2KB_1 , в котором медиана AK равна отрезку B_1B , причем $\overline{BK} = \bar{a}$.

Чтобы перенести медиану CC_1 в точку A_1 , рассмотрим параллельный перенос треугольника ABC на вектор $\overline{CA_1} = \bar{b}$. Получим треугольник $A_3B_2A_1$, в котором медиана A_1N равна отрезку CC_1 , причем $\overline{BB_2} = \bar{b}$.

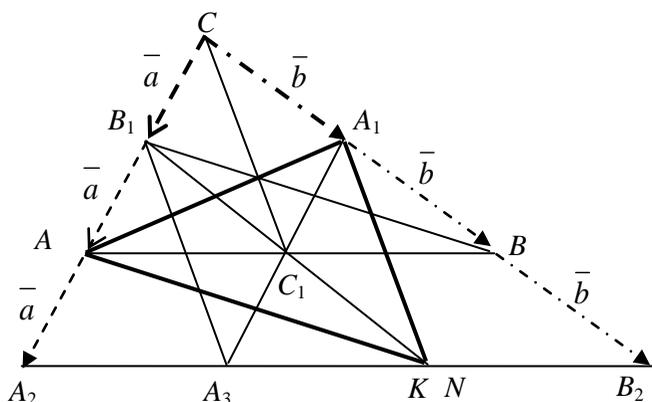


Рис. 3

Вместо последнего параллельного переноса можно применить параллельный перенос треугольника A_2KB_1 на вектор $\overline{B_1A_1}$, который переведет медиану B_1A_3 в медиану A_1N .

Далее доказательство проводится аналогично.

Третий способ. Пусть медианы пересекаются в точке M . Рисунок 4 подсказывает, что естественно рассмотреть треугольник, образованный не полными медианами, а отрезками, являющимися частями медиан. Если выбираем одну треть одной из медиан, например, отрезок MA_1 , то естественно рассмотреть так же треть от каждой медианы. Пусть Q — середина отрезка MC , тогда отрезок MQ равен одной трети медианы CC_1 . В треугольнике MBC отрезок QA_1 является средней линией, а поэтому QA_1 равен одной трети медианы B_1B . Треугольник MA_1Q будет подобным к искомому треугольнику, образованному медианами данного треугольника. Медианы треугольника ABC разбивают его на шесть равновеликих треугольника.

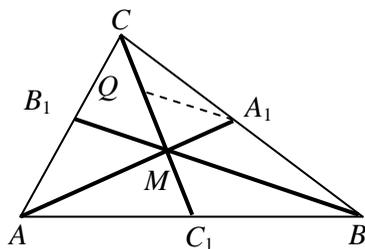


Рис. 4

Медиа QA_1 разбивает треугольник MA_1C на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{\Delta MA_1Q} = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC}$. Для площади S_m треугольника, образованного медианами, получаем

$$S_m = 3^2 S_{\Delta MA_1Q} = \frac{9}{12} S_{\Delta ABC}, S_m = \frac{3}{4} S_{\Delta ABC}.$$

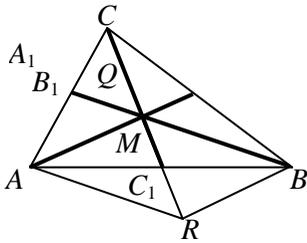


Рис. 5

Четвертый способ. Можно выбрать две трети медианы для построения вспомогательного треугольника (рис. 5). Пусть $MR = 2MC_1$, $C_1 \in [MR]$, тогда треугольник MBR образован отрезками, равными двум третьим от медиан данного треугольника.

Пятый способ. На рис. 6 представлен треугольник AUV , стороны которого вдвое больше медиан данного треугольника.

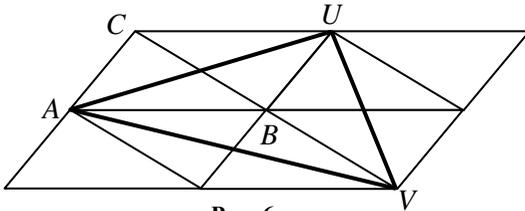


Рис. 6

Третий, четвертый и пятый способы основываются на некотором отступлении от прямой цели — построить треугольник по трем медианам.

Идея состоит во включении именно тех частей медиан, которые диктуются рисунком, но с учетом уменьшения или увеличения в одно и то же число раз, т.е. с учетом соразмерности элементов.

Шестой способ (попытка). Медианы треугольника выражаются через стороны данного треугольника по формулам

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Операция вычисления площадей является в большей степени алгебраической операцией, но следует заметить, что вычисление

площади треугольника, образованного медианами по этим формулам, трудно осуществить.

Рассмотрим другой пример включения элемента в систему для достижения цели.

В профильном курсе по математике изучается:

— уравнение плоскости $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с нормальным вектором $\bar{n}(a, b, c)$;

— уравнение прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\bar{p}(m; n; k)$ [1, с. 367];

— вычисление площади параллелограмма, применяя векторное произведение двух векторов [1, с. 343].

Задача 4. Найти расстояние от точки $A(3; 4; -7)$ до прямой

$$l: \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z + 4}{-1}.$$

Первый способ построения заключается в поиске расстояния. Главная цель — изобразить точку на прямой, т.е. проекцию точки A на прямую l , чтобы вычислить расстояние.

Пусть $H(x; y; z)$ — основание перпендикуляра. Из условия перпендикулярности направляющего вектора $\bar{p}(3; 2; -1)$ и вектора $\overline{AH}(x - 3; y - 4; z + 7)$ следует $\bar{p} \cdot \overline{AH} = 0$ или $3(x - 3) + 2(y - 4) - (z + 7) = 0$, $3x + 2y - z - 24 = 0$.

Точка H принадлежит прямой l , поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению прямой. Используя параметр t , получаем $x = 3t + 2$, $y = 2t$, $z = -t - 4$.

Координаты точки H найдем из системы

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 24 = 0 \\ x = 3t + 2 \\ y = 2t \\ z = -t - 4 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(5; 2; -5) \Rightarrow HA = 2\sqrt{3}.$$

Второй способ основан на включении элемента H в систему. Он часто применяется студентами, т.к. они имеют сформированный навык использования направляющего вектора $\overline{p}(m;n;k)$ прямой в качестве нормального вектора плоскости, перпендикулярной данной прямой.

В нашем случае уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;4;-7)$ и перпендикулярной прямой l , имеет вид $3(x-3)+2(y-4)-(z+7)=0$.

Это уравнение получено более экономным способом, чем в первом случае, где требовалось найти координаты вектора, использовать критерий перпендикулярности вектора, вычислить скалярное произведение векторов.

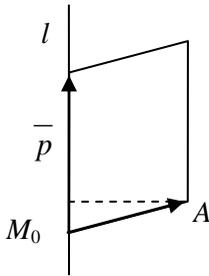


Рис. 7

Во втором способе исчезает лишняя операция по поиску условия перпендикулярности и его вычисления. Включение элемента (точки и перпендикуляра) в систему (плоскость) требует большей широты мышления. В первом способе все усилия сконцентрированы на поиске главного недостающего элемента — основания перпендикуляра, опущенного на прямую.

Второй способ как бы на некоторое время отвлекается от главного элемента, но ведет поиск системы, способной получить главный элемент.

Третий способ. Из уравнения прямой следует, что прямая проходит через точку $M_0(2;0;-4)$. Рассмотрим вектор $\overline{M_0A}(1;4;-3)$ и параллелограмм, построенный на векторах $\overline{M_0A}$ и \overline{p} (рис. 7).

Площадь параллелограмма можно вычислить двумя способами: используя модуль векторного произведения и с помощью умножения основания на высоту параллелограмма $S = \left| \overline{M_0A} \times \overline{p} \right| = \left| \overline{p} \right| \cdot h$.

$$h = \frac{|\overline{M_0 A} \times \overline{p}|}{|\overline{p}|} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \bmod}{\sqrt{9+1+14}} = \frac{|2\bar{i} - 8\bar{j} - 10\bar{k}|}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{3}.$$

Этот способ решения задачи является методом включения элемента в систему с еще большим удалением от главной цели. Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую, рассматривается как элемент системы, являющейся параллелограммом.

Рассмотренные способы частично объясняют мотивацию выбора того или иного метода в структуре решения математической задачи (рис. 8).

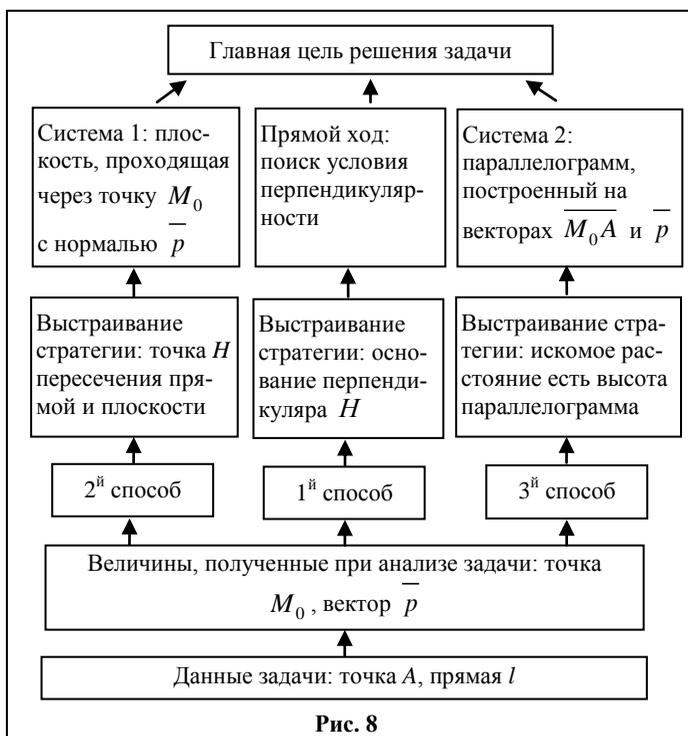


Рис. 8

§ 24. Формирование динамики геометрического образа

1. Методическая система формирования динамики геометрического образа.

Если посмотреть на детей со стороны, когда они пересказывают содержание интересного фильма, то можно убедиться, как активно работает их мышление, совершая оперирования сохраненными образами. Некоторые из них после окончания пересказа содержания начинают добавлять свои импровизации, т.е. происходит трансформация ранее сохраненного образа.

Сочинение сказок перед сном в неосвещенной комнате позволяет включить только представление и исключить лишние факторы, которые могут отвлекать внимание от создания нового образа.

Но часто ли мы предоставляем возможность ученику создать импровизацию на математическую тему?

Основой для такой деятельности может стать методическая система по формированию динамики геометрического образа с помощью компьютера.

Под динамикой геометрического образа мы будем понимать движение геометрического объекта или преобразование из одного состояния в другое состояние объекта, а также любого другого объекта, например, алгебраического, представленного графически на экране компьютера.

Рассмотрим несколько моментов, обосновывающих положительное влияние динамики геометрического образа на обучение и развитие учащихся.

1. *Визуализация* объекта в процессе трансформации объекта:

- включает дополнительные возможности памяти по сохранению объекта;
- преобразование объекта увлекает учащегося, и он старается также быть участником этого процесса; динамика процесса и тенденция учащегося к движению объединяются на основе игровой деятельности;
- возникающие препятствия в представленном динамическом процессе провоцируют мышление на решение возникающих проблем;

- позволяет понять структуру решения (рисунок еще не указывает последовательность прохождения точек траектории). Компьютерное моделирование позволяет увидеть весь процесс достижения максимума или минимума или приближение к ним, если они не достигаются.

2. Компьютерное экспериментирование:

- позволяет выявить особенности рисунков при некоторых значениях параметра и лучше их понять;
- изменение числовых значений, которые не укладываются в предложенную схему, иногда приводит к рисункам, которые трудно вначале объяснить. Более подробный анализ все обосновывает, но снова появляется желание отступить от рекомендованного диапазона числовых значений. Цепочка экспериментов с изменением числовых значений приводит к изменению функциональной зависимости, к видоизменению постановки задачи. Экспериментирование становится источником порождения новых идей и важной составной чертой поисковой деятельности;
- обращение к эксперименту с двумя параметрами позволяет сформировать более общее понимание каждой траектории в семействе полученных траекторий.

Что же добавляет динамика геометрических объектов в компоненты обучения, развития и воспитания?

Цели обучения моделированию динамики геометрического образа определяются, во-первых, важностью познания динамики создаваемого образа, чтобы потом применять полученные навыки в новых условиях, во-вторых, необходимостью формирования творческого мышления на современном этапе обучения.

Содержание обучения изменяется, т.е. добавляется новый элемент описания динамического процесса, характеризуемого некоторым параметром.

Методы обучения требуются дополнить формированием интегративных навыков по математике и информатике. Новые методы должны опираться на психолого-педагогические рекомендации развития творческого мышления. Трансформация объекта является новым действием над объектом, поэтому происходит структурирование поисковой деятельности с четким вычленением объекта

изучения и отношения между объектами в различных положениях, между объектами посредством выполняемого действия.

Результаты обучения в предметном плане получаются более новыми и актуальными, но следует отметить также как важнейший результат совершенствование личности в процессуальном плане. Происходит развитие личности через постижение общих способов деятельности и применения их в новых условиях.

Средства обучения требуют нового инструментария для представления динамики геометрического объекта. Использование компьютера становится необходимым средством обучения и достижения результата.

Диапазон *форм обучения* значительно расширяется. Классические формы дополняются, с одной стороны, элементами, требующими самостоятельности и уединения (работа в библиотеке, в Интернете, дома, чтобы сосредоточиться), а с другой стороны — элементами, требующими обсуждения и дискуссии (консультации, обучение на семинарах и выступление на них, участие в конференциях).

Индивидуальность обучения получает большое поле для деятельности, как в выборе тематики исследования, так и в способах самореализации.

Развитие индивидуальности с помощью динамики геометрического образа осуществляется на основе диалога в связи с возникающими на экране компьютера рисунками.

Пространственный образ формируется наиболее полно, если человек вступает с ним в активные связи и отношения. Структура образа существенно зависит от того, какую сигнальную функцию имеют для человека те или иные свойства воспринимаемого объекта, насколько у субъекта сформированы действия, обеспечивающие выделение в объекте наиболее информационного содержания, опознание, обнаружение его отдельных свойств и признаков.

Трансформация геометрического образа представлена в работах [19, 21].

Приведем новые примеры моделирования динамики некоторых замечательных точек.

2. Динамика точки Жергонна.

Моделирование точки Жергонна осуществлялось в [21]. Рассмотрим новый способ моделирования этой точки, упрощающий

некоторые вычисления, и изучим ее движение при изменении координат одной из вершин треугольника.

Пусть ABC — произвольный треугольник со сторонами b, c и углом t между ними.

Изучим движение точек Жергонна при движении вершины C по окружности, т.е. при изменении угла t .

Для введенной системы координат (рис. 1) $A(0;0)$, $B(c;0)$, $C(b\cos t; b\sin t)$.

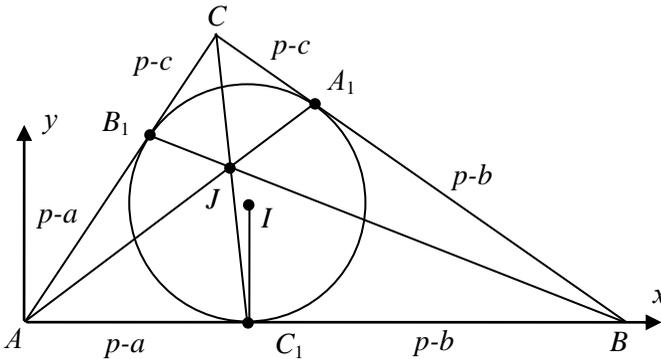


Рис. 1

Точки касания A_1, C_1, B_1 окружности, вписанной в треугольник, удовлетворяют условиям:

$$CA_1 = CB_1, AB_1 = AC_1, BA_1 = BC_1, .$$

Для треугольника со сторонами a, b, c и полупериметром p получаем

$$CA_1 = CB_1 = \frac{a+b-c}{2} = p-c, .$$

$$BA_1 = BC_1 = \frac{a+c-b}{2} = p-b, .$$

$$AB_1 = AC_1 = \frac{b+c-a}{2} = p-a. .$$

Точки касания делят стороны в отношениях

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{p-c}{p-b}, \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{p-b}{p-a}, \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{p-a}{p-c}.$$

Для точки $M(x; y)$, делящей отрезок PQ с концевыми точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ в данном отношении λ , координаты вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Подставляя отношения отрезков, получаем координаты точек касания

$$A_1 \left(\frac{b \cos t (p-b) + c(p-c)}{a}; \frac{b \sin t (p-b)}{a} \right),$$

$$C_1 \ p - a; 0, \ B_1 \ (p-a) \cos t; (p-a) \sin t.$$

Площадь треугольника ABC равна произведению полупериметра треугольника на радиус r вписанной окружности, следовательно

$$r = \frac{bc \sin t}{2p}.$$

Для центра I вписанной окружности получаем координаты

$$I \left(p - a; \frac{bc \sin t}{2p} \right).$$

Составим уравнения прямых, проходящих через вершину и противоположащую точку касания:

$$AA_1 : y = \frac{b \sin t (p-b)}{b \cos t (p-b) + c(p-c)} x,$$

$$BB_1 : \frac{x-c}{(p-a) \cos t - c} = \frac{y}{(p-a) \sin t},$$

$$BB_1 : y = \frac{(p-a) \sin t}{(p-a) \cos t - c} (x-c).$$

Пересечение этих прямых определяет точку Жергонна с координатами:

$$x_j = \frac{(p-a)[b \cos t + (p-b) + c(p-c)]}{b(p-b) + (p-a)(p-c)},$$

$$y_j = \frac{b(p-a)(p-b) \sin t}{b(p-b) + (p-a)(p-c)}.$$

Для визуализации динамики точки Жергонна вначале компьютерная программа на языке QBasic осуществляет построение семейства треугольников, вписанной окружности и точки Жергонна, как пересечения трех отрезков, для случая, когда параметр t меняется от значения $0,01$ до значения $\pi - 0,01$. При движении точки C по окружности треугольник дважды вырождается, когда точка C оказывается на прямой AB , поэтому значения параметра $0^0, 180^0$ нужно исключить при моделировании.

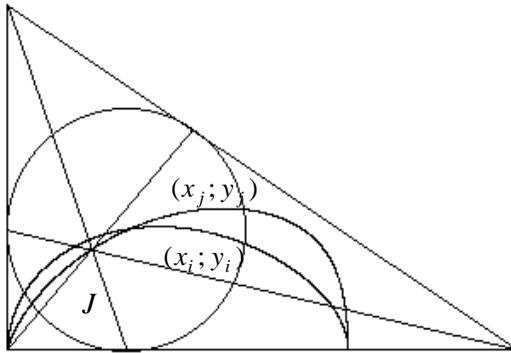


Рис. 2

На рис. 2 построена траектория центра вписанной окружности, траектория точки Жергонна и изображено одно из положений треугольника.

Дискретная динамика точки Жергонна представлена на рис. 3.

Разработайте компьютерную программу движения точки Жергонна и сравните ее с программой «Динамика точки Жергонна».

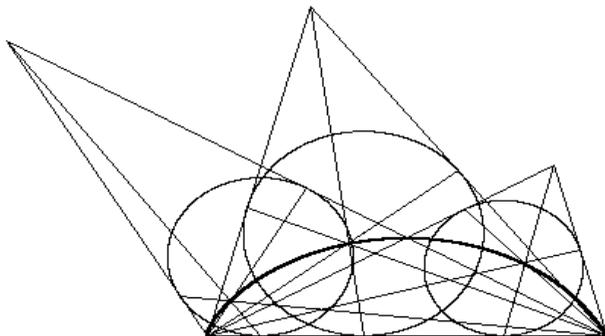


Рис. 3

```

Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
c = 4000: b = 4000: pi = 4 * Atn(1): x0 = 4000: y0 = 1000
  xa = x0: ya = y0: xb = c + x0: yb = y0: Line (xa, ya)-(xb, yb)
For t = pi / 6 To 3 * pi / 4 Step pi / 4
xc = b * Cos(t) + x0: yc = b * Sin(t) + y0
  Line (xb, yb)-(xc, yc): Line (xc, yc)-(xa, ya)
  a = Sqr(b ^ 2 + c ^ 2 - 2 * b * c * Cos(t))
  p = (a + b + c) / 2
  xa1 = (b * Cos(t) * (p - b) + c * (p - c)) / a + x0
  ya1 = b * Sin(t) * (p - b) / a + y0: Line (xa, ya)-(xa1, ya1)
  xc1 = p - a + x0: yc1 = y0: Line (xc, yc)-(xc1, yc1)
  xb1 = (p - a) * Cos(t) + x0: yb1 = (p - a) * Sin(t) + y0
  Line (xb, yb)-(xb1, yb1)
  r = b * c * Sin(t) / (2 * p)
  xi = p - a + x0: yi = r + y0
  m = b * Cos(t) * (p - b) + c * (p - c)
  n = b * Sin(t) * (p - b)
  s = b * (p - b) + (p - a) * (p - c)
  xj = m / s * (p - a) + x0: yj = n / s * (p - a) + y0
  PSet (xi, yi), 11: PSet (xj, yj)
  Line (xb, yb)-(xc, yc), 0: Line (xc, yc)-(xa, ya), 0
  Line (xa, ya)-(xa1, ya1), 0: Line (xc, yc)-(xc1, yc1), 0
  Line (xb, yb)-(xb1, yb1), 0
  For u = 0 To 2 * pi Step 0.001
  PSet (xi + r * Cos(u), yi + r * Sin(u)): Next u
  Line (xa, ya)-(xb, yb): Next t

For t = 0.01 To (pi - 0.01) Step 0.001
  a = Sqr(b ^ 2 + c ^ 2 - 2 * b * c * Cos(t))
  p = (a + b + c) / 2: r = b * c * Sin(t) / (2 * p)

```

```

xi = p - a + x0: yi = r + y0
m = b * Cos(t) * (p - b) + c * (p - c)
n = b * Sin(t) * (p - b)
s = b * (p - b) + (p - a) * (p - c)
xj = m / s * (p - a) + x0: yj = n / s * (p - a) + y0
xt = b / 2 + x0: yt = b * Sqr(3) / 2 + y0
DrawWidth = 1: PSet (xi, yi), QBColor(2)
DrawWidth = 2: PSet (xj, yj), QBColor(3)
Next t
End Sub

```

3. Динамика точки Нагеля.

Моделирование точки Нагеля осуществлялось в [21].

Рассмотрим другой способ моделирования этой точки, упрощающий некоторые вычисления, и изучим ее движение при изменении координат одной из вершин треугольника.

Точка касания A_1 (рис. 4) делит отрезок CB в отношении

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{p-b}{p-c}, \text{ поэтому}$$

$$A_1 \left(\frac{b \cos t (p-c) + c(p-b)}{a}; \frac{b \sin t (p-c)}{a} \right),$$

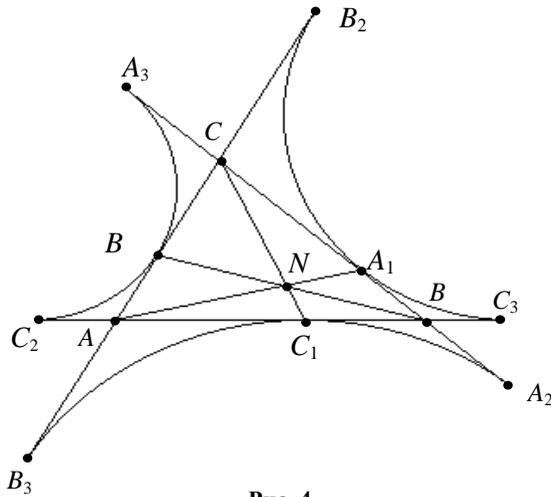


Рис. 4

$$AB_1 = p - c \Rightarrow B_1((p - c) \cos t; (p - c) \sin t), C_1(p - b; 0).$$

Составим уравнения прямых, проходящих через вершину и точку касания вневписанной окружности с противоположной стороной:

$$AA_1 : y = \frac{b(p-c)\sin t}{b(p-c)\cos t + c(p-b)}, \quad BB_1 : y = \frac{(p-c)\sin t}{(p-c)\cos t - c}(x-c).$$

Найдем координаты точки Нагеля $N(x_n; y_n)$, как точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 :

$$x_n = \frac{c(p-b) + b(p-c)\cos t}{p}, \quad y_n = \frac{b(p-c)\sin t}{p}.$$

Для изображения точек касания вневписанных окружностей с продолжениями сторон треугольника найдем вначале отношения, в которых точки касания делят стороны треугольника:

$$\frac{CA_2}{A_2B} = -\frac{p}{p-a}, \quad A_2 \left(-\frac{b\cos t(p-a) - pc}{a}; -\frac{b\sin t(p-a)}{a} \right),$$

$$\frac{CA_3}{A_3B} = -\frac{p-a}{p}, \quad A_3 \left(-\frac{b\cos t}{a} \frac{p-(p-a)}{c}; \frac{b\sin t}{a} \frac{p}{p} \right),$$

$$C_3(p; 0), \quad C_2(-(p-b); 0),$$

$$B_2(p\cos t; p\sin t), \quad B_3(-(p-b)\cos t; -(p-b)\sin t).$$

Для радиусов вневписанных окружностей известны формулы:

$$r_a = \frac{S_{\triangle ABC}}{p-a} = \frac{bc \sin t}{2(p-a)}, \quad r_b = \frac{S_{\triangle ABC}}{p-b} = \frac{bc \sin t}{2(p-b)},$$

$$r_c = \frac{S_{\triangle ABC}}{p-c} = \frac{bc \sin t}{2(p-c)}.$$

Для центров вневписанных окружностей получаем координаты [19, с. 130]:

$$I_a \left(\frac{bc(1+\cos t)}{2(p-a)}; \frac{bc \sin t}{2(p-a)} \right), \quad I_b \left(\frac{bc(\cos t-1)}{2(p-b)}; \frac{bc \sin t}{2(p-b)} \right),$$

$$I_c \left(\frac{bc(1-\cos t)}{2(p-c)}; -\frac{bc \sin t}{2(p-c)} \right).$$

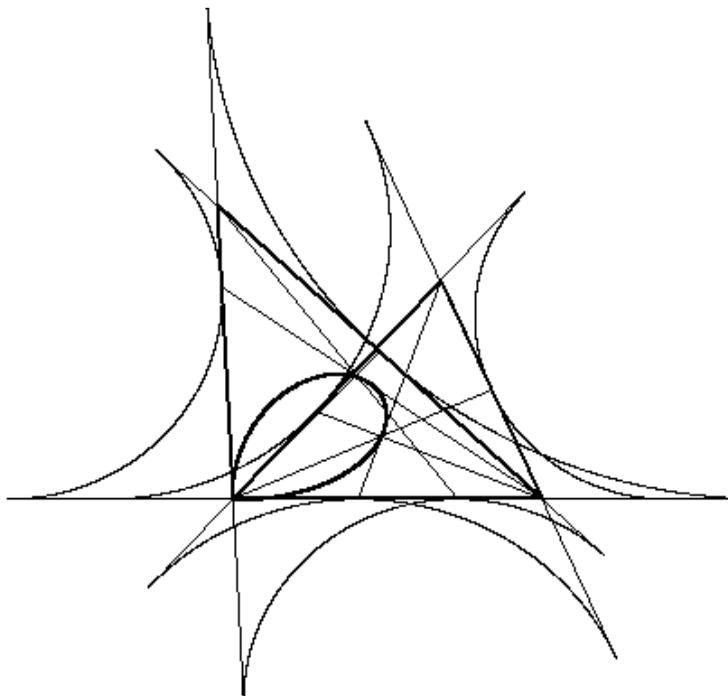


Рис. 5

Рисунок должен содержать дополнительную информацию, которая выступает комментарием к основному содержанию.

На рис. 5 представлена дискретная динамика точки Нагеля, основным содержанием в которой является построение изображения двух положений треугольника и точек Нагеля. Траектория точки Жергонна изображена непрерывной линией, когда угол треугольника изменяется в промежутке $(0; \pi)$. Линии первого плана изображены жирными линиями.

Изображения второго плана — продолжения сторон треугольника от вершин до точек касания, части вневписанных окружностей, а также отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания окружностей со сторонами или продолжениями сторон треугольника. Если изобразить все точки окружности, то часть точек окажется вне экрана, причем изображение всех точек затрудняет восприятие всего рисунка. Достаточно изобразить

те части окружностей между точками касания, которые ближе к сторонам треугольника.

Разработайте компьютерную программу движения точки Нагеля (рис. 5) и сравните ее с программой «Динамика точки Нагеля».

Аналогичные проекты можно разрабатывать для других замечательных точек и исследовать зависимость вида траектории замечательной точки при изменении стороны b .

Учащихся, имеющих способности, нужно развивать на материале, в котором можно реализовать математическое и компьютерное моделирование, например, на цикле задач по созданию динамики геометрического образа. Для одной из замечательных точек треугольника (например, для точки Жергонна) нужно подробно пояснить моделирование, а для других замечательных точек можно организовать разработку системы исследовательских проектов.

Под динамикой геометрического образа мы будем понимать движение геометрического объекта или преобразование из одного положения в другое с изменением структуры.

Рассмотрим несколько моментов, обосновывающих положительное влияние динамики геометрического образа на обучение и развитие учащихся.

Визуализация объекта в процессе его трансформации включает дополнительные возможности памяти по сохранению объекта. Преобразование объекта увлекает учащегося, и он старается быть участником этого процесса. Динамика процесса и тенденция учащегося к движению объединяются на основе игровой деятельности. Возникающие препятствия в представленном динамическом процессе провоцируют мышление на решение возникающих проблем. Визуализация динамики позволяет понять структуру решения, т.к. рисунок еще не указывает последовательность прохождения точек траектории. Компьютерное моделирование позволяет увидеть процесс достижения максимума или минимума или приближение к ним, если они не достигаются.

Компьютерное экспериментирование позволяет выявить особенности и лучше их понять. Изменение числовых значений, которые не укладываются в предложенную схему, иногда приводит

к рисункам, которые трудно вначале объяснить. Более подробный анализ все обосновывает, но снова появляется желание отступить от рекомендованного диапазона числовых значений. Цепочка экспериментов с изменением числовых значений приводит к изменению функциональной зависимости, к видоизменению постановки задачи. Экспериментирование становится источником порождения новых идей и важной составной чертой поисковой деятельности.

Узоры компьютерной графики создают мотивацию к попытке расшифровать алгоритм создания рисунка, к сравнению одних линий с другими, к изучению особенностей рисунка.

Визуальное мышление — это оперирование зрительными образами.

Смотреть — еще не означает видеть закономерность на рисунке. Компьютерная графика стимулирует к поиску функциональной зависимости и выстраиванию эвристик.

Сложный узор на рисунке — это приглашение к диалогу исследователя с рисунком.

Исследователь пытается понять геометрический алгоритм построения узора, а затем выстраивает траектории алгебраизации этого метода, т.е. задания всех объектов рисунка уравнениями или неравенствами, чтобы изобразить на экране компьютера.

Большинство узоров содержит большое число объектов, и часто нужно построить узор с заранее заданными параметрами. Количество объектов в одном направлении фактически не является фиксированным, а зависит от количества рядов на узоре, а иногда и от нескольких параметров.

Таким образом, на узоре нужно определить, какие величины являются существенными при моделировании, а какие нет.

Анализ узора на рисунке проходит несколько этапов. Вначале анализируется узор с целью выявления его композиции, затем с целью определения метрических характеристик элементов простейшего узора, потом с целью его воспроизведения и, наконец, с целью его модернизации.

Построение всего рисунка разбивается на несколько этапов. Вначале выявляется закономерность построения в некотором направлении, в большинстве случаев это горизонтальная полоса или полоса между concentрическими окружностями. Потом

выявляется способ соединения (расширения) таких полос в другом направлении.

Для рис. 6—9 определите закономерности построения рисунков и напишите компьютерные программы.

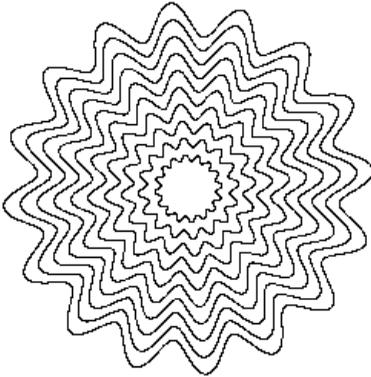


Рис. 6

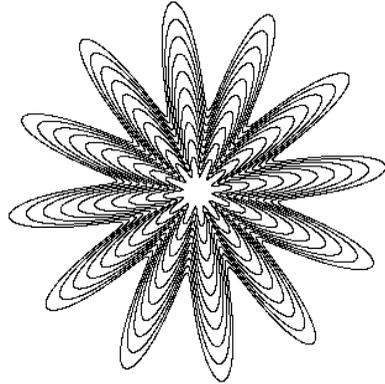


Рис. 7

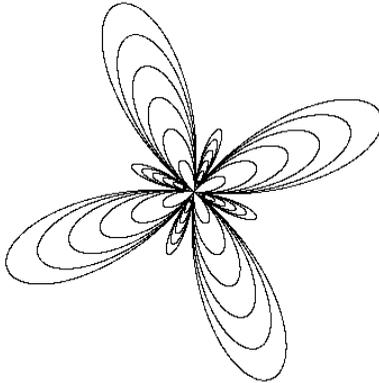


Рис. 8

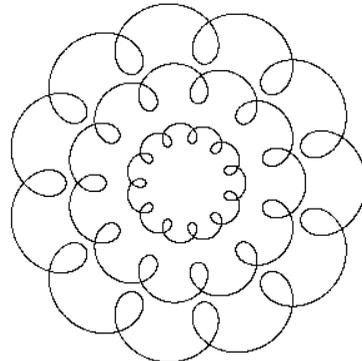


Рис. 9

Подведем итоги по формированию геометрического образа.

С помощью компьютера технологию поиска функциональной зависимости и построения рисунка можно представить в виде следующей схемы:

1) внимательное наблюдение за реальной действительностью или изображением геометрической фигуры;

- 2) анализ фактов, выбор необходимого и достаточного числа параметров для моделирования;
- 3) разработка математической модели, которая позволяет интерпретировать изменение параметров и является достаточно простой;
- 4) разработка алгоритма перехода от математической модели к способу изображения на экране компьютера;
- 5) создание компьютерной программы для данной модели;
- 6) тестирование компьютерной программы и изучение пределов ее применимости;
- 7) адаптация модели к фигуре, находящейся за пределами разработанной модели и, в случае необходимости, модернизация разработанной модели и компьютерной программы.

§ 25. Контрпримеры для развития учебной и поисковой деятельности по математике

1. Актуальность и новизна. Анализ методических работ по развитию логического мышления показывает, что сравнительно мало стоит контрпримеров для опровержения ложных высказываний. В этом разделе представлены два актуальных направления использования контрпримеров.

а) Проведен подробный анализ условия высказывания (посылки). Иногда условие является конъюнкцией двух или трех высказываний, иногда — дизъюнкцией нескольких высказываний. Рассмотрены типичные ошибки, когда учащиеся допускают искажение сложного условия высказывания.

б) Приведены новые интересные примеры, иллюстрирующие различие средних значений величин (арифметического, геометрического, гармонического и квадратичного) для двух величин в трапеции и в треугольнике.

Умение быстро среагировать на ошибку ученика и правильно построить контрпример является мастерством в работе учителя. Наиболее часто в учебно-методической работе используют следующие направления контрпримеров:

- примеры, опровергающие некорректное определение;

— примеры, направленные на уточнение формулировки теоремы, т.е. контрпримеры, опровергающие неправильную формулировку теоремы;

— контрпримеры для уточнения при ошибочном использовании правил логического вывода;

— контрпримеры в связи с поверхностным учетом нескольких свойств, в основе которых лежит ошибочное мыслительное представление или ошибочное комбинирование.

В настоящее время большое внимание уделяется методике формирования поисковой деятельности. Для формирования поисковой деятельности учащихся при решении олимпиадных задач и при разработке исследовательских проектов особое значение приобретает обучение учащихся построению контрпримеров в следующих направлениях:

— контрпримеры для иллюстрации существенной разницы между близкими объектами;

— построение контрпримеров при проведении математического эксперимента;

— построение контрпримеров при выдвижении гипотезы [22, с. 118—125];

— построение контрпримеров при доказательстве гипотезы;

— построение контрпримеров при обобщении гипотезы [22, с. 201—211].

2. Структура ошибок при логическом мышлении.

Для понимания причин ошибок, совершаемых учащимися, необходимо рассмотреть структуру утверждения $A \Rightarrow B$, где A — условие (посылка), B — заключение, \Rightarrow — импликация (следует). Условие A часто в теореме или в определении является сложным высказыванием, например, конъюнкцией двух (трех) высказываний или дизъюнкцией высказываний.

а) Если $A = A_1 \wedge A_2$, то высказывание должно иметь вид $(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B$.

Пример 1. Если $x > 0$ и $y > 0$, то справедлива формула $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Пример 2. Если два числа делятся на натуральное число n , то и их сумма делится на число n .

Пример 3. Если $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива формула:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Пример 4. Если $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции, причем выполняется условие $g(x) \neq 0$, то справедлива формула

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

В примере 4 условие содержит конъюнкцию трех высказываний.

Типичные ошибки можно распределить по следующим классам.

а₁) Потеря одного из высказываний A_1, A_2 , т.е. формулировка либо утверждения $A_1 \Rightarrow B$, либо утверждения $A_2 \Rightarrow B$.

Ошибочное утверждение для примера 3:

Если одно из двух чисел делится на натуральное число n , то и их сумма делится на число n .

Ошибочное утверждение для примера 4:

Если $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива формула:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Потеря одного из условий A_1, A_2 в примерах 1 и 3, как правило, не происходит, т.к. дальнейшая запись заключения теорем симметрична.

Ориентировка для учителя:

Если было сформулировано утверждение $A_1 \Rightarrow B$ вместо утверждения $(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B$, то построение контрпримера осуществляется выбором объекта, удовлетворяющего условию $A_1 \wedge \overline{A_2}$.

а₂) Потеря двух высказываний A_1, A_2 .

Ошибочное утверждение для примера 3:

При дифференцировании суммы двух функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива формула:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Для построения контрпримера к этому утверждению достаточно предъявить две функции, которые не являются дифференцируемыми, но их сумма является дифференцируемой. Например, $f(x) = -|x|$, $g(x) = |x| + 5$. Итак, для построения контрпримера использовано условие $\overline{A_1} \wedge \overline{A_2}$.

а₃) Замена одного из высказываний A_1, A_2 на высказывание A_3 , т.е. формулировка утверждения $(A_1 \wedge A_3) \Rightarrow B$.

Построение контрпримера осуществляется выбором объекта, удовлетворяющего условию $A_1 \wedge (A_3 \wedge \overline{A_2})$.

б) Если $A = A_1 \vee A_2$, то высказывание должно иметь вид $(A_1 \vee A_2) \Rightarrow B$.

Пример 5. Если хотя бы одно из чисел равно нулю, то произведение двух чисел обращается в ноль.

При формулировке утверждения в условии используется дизъюнкция двух высказываний: если первый множитель равен нулю или второй множитель равен нулю.

Пример 6. Если одно из двух целых чисел делится на натуральное число n , то и их произведение делится на число n .

При формулировке этого утверждения в условии закладывается требование, чтобы оба числа были целыми и далее требование, чтобы или первое число делилось на n , или второе число делилось на n .

Типичные ошибки можно распределить по следующим классам.

а₁) Потеря одного из высказываний A_1, A_2 , т.е. формулировка либо утверждения $A_1 \Rightarrow B$, либо утверждения $A_2 \Rightarrow B$.

Ошибочное утверждение для примера 5:

Если число a делится на число n , то и произведение ab делится на n .

Это утверждение справедливо при любом целом b . Оно может быть ложным при некотором дробном значении b (например, при $a = 10, n = 5, b = 0,25$). Может быть справедливым при некотором дробном значении b (например, при $a = 1000, n = 5, b = 0,2$).

Ошибка произошла из-за потери требования того, чтобы оба числа были целыми и замены дизъюнкции двух условий требованием на одно число.

Ориентировка для учителя:

Если было сформулировано утверждение $A_1 \Rightarrow B$ вместо утверждения $(A_1 \vee A_2) \Rightarrow B$, то построение контрпримера осуществляется выбором объекта, удовлетворяющего условию $A_1 \wedge \overline{A_2}$.

а₂) Потеря двух высказываний A_1, A_2 .

Ошибочное утверждение для примера 3:

При дифференцировании суммы двух функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива формула:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Для построения контрпримера к этому утверждению достаточно предъявить две функции, которые не являются дифференцируемыми, но их сумма является дифференцируемой. Например, $f(x) = -|x|, g(x) = |x| + 5$. Для построения контрпримера использовано условие $\overline{A_1} \wedge \overline{A_2}$.

а₃) Замена одного из высказываний A_1, A_2 на высказывание A_3 , т.е. формулировка утверждения $(A_1 \wedge A_3) \Rightarrow B$.

Построение контрпримера осуществляется выбором объекта, удовлетворяющего условию $A_1 \wedge (A_3 \wedge \overline{A_2})$.

3. Примеры для демонстрации существенной разницы между близкими объектами.

Под близкими объектами мы будем понимать два объекта, зависящие от одних и тех же аргументов и принимающие одинаковые значения при некоторых частных значениях аргументов.

В математике и физике используются средние значения для двух положительных величин a и b :

$s_a(a, b) = \frac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое значение;

$s_g(a, b) = \sqrt{ab}$ — среднее геометрическое значение;

$s_h(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое значение;

$s_k(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ — среднее квадратичное значение.

Средние величины удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad (1)$$

причем неравенства превращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a = b$.

Превращение неравенств в равенства создает иллюзию того, что средние значения близки, но проверить, что это не так, можно с помощью соответствующих примеров.

Вводя средние значения величин, мы обязаны пояснить, что для равных значений a и b средние значения совпадают, но потом возникает вопрос о том, насколько средние значения различны, если значения a и b отличаются.

Числовые контрпримеры можно построить, если сделать существенной разницу между двумя величинами a и b .

Полагая $b = 1$, получаем цепочку неравенств:

$$\frac{2a}{a+1} \leq \sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}}.$$

Выбирая a значительно больше 1, т.е. $a \gg 1$, получаем

$$\frac{2a}{a+1} \approx 2, \quad \frac{a+1}{2} \approx \frac{a}{2}, \quad \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} \approx \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

В элективных курсах по математике, информатике и физике сравнение работы алгоритмов осуществляется на основе оценок асимптотики значений функции при стремлении аргумента к бесконечности или к нулю.

Для сравнения среднего гармонического, среднего геометрического, среднего арифметического и среднего квадратичного достаточно сравнить следующие величины:

$$2, \sqrt{a}, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

Например, при $a = 1000000$ получаем четыре числа:

$$2, 1000, 500000, \approx 707000.$$

Эти оценки можно быстро получить, и они достаточно убедительно показывают различие асимптотик средних величин. Далее можно вычислить точные значения этих средних величин для пары чисел 1 и 1000000 и потом сравнить значения, полученные в результате оценок, с точными значениями.

Для учащихся, имеющих склонность к визуальному мышлению на основе геометрических образов, полезно рассмотреть интерпретацию средних величин в трапеции.

1⁰. В трапеции с основаниями a и b длина средней линии равна среднему арифметическому значению длин оснований.

2⁰. В трапеции с основаниями a и b длина отрезка с концами на боковых сторонах, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, равна среднему гармоническому значению длин оснований.

3⁰. В трапеции с основаниями a и b длина отрезка с концами на боковых сторонах, параллельного основанию и делящего трапецию на две равновеликие трапеции, равна среднему квадратичному значению длин оснований.

4⁰. В трапеции с основаниями a и b длина отрезка с концами на боковых сторонах, параллельного основаниям и делящего трапецию на две подобные трапеции, равна среднему геометрическому значению длин оснований.

В различных пособиях эти отрезки для трапеции изображены без пояснения их построения. Если для средней линии (т.е. для среднего арифметического) и для отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей (т.е. среднего гармонического значения) это очевидно, то построения для остальных случаев не совсем очевидны. Необходимость этих построений становится

востребованной, если мы хотим увидеть их различие и порядок расположения.

Убедить читателя в определенной последовательности расположении этих параллельных отрезков можно только наглядным чертежом с последовательностью построений.

Рассмотрим построения для трапеции с основаниями $AB = a$, $DC = b$ и пусть в трапеции боковая сторона перпендикулярна основанию, а высота трапеции также равна a (рис. 1). Пусть M — середина боковой стороны трапеции. Построим среднюю линию MN трапеции. Она равна среднему арифметическому значению оснований.

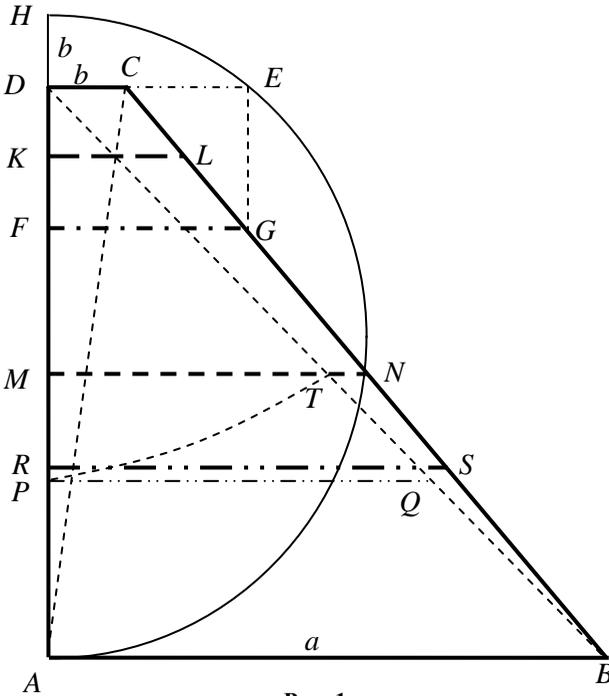


Рис. 1

Через точку пересечения диагоналей AC и BD проведем отрезок KL , параллельный основаниям. Он равен среднему гармоническому значению оснований.

Продолжим боковую сторону AD и построим отрезок DH , равный верхнему основанию b . Построим полуокружность с диаметром AH . В точке D восстановим перпендикуляр DE к диаметру полуокружности, тогда отрезок DE равен $\sqrt{AD \cdot DH}$, т.е. $DE = \sqrt{ab}$.

Спроектируем отрезок DE на трапецию. Получим отрезок FG , равный среднему геометрическому значению оснований.

Чтобы построить среднее квадратичное значение, рассмотрим оценку:

$$\sqrt{\frac{a^2}{2}} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{a}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Отрезок $\frac{a}{\sqrt{2}}$ строим следующим образом.

Из прямоугольного равнобедренного треугольника ABD получаем $BD = \sqrt{2}a$. Средняя линия трапеции делит диагональ BD пополам.

Строим отрезок DP , равный половине диагонали, т.е. отрезку DT , тогда $DP = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Через полученную точку P проводим от-

резок в трапеции, параллельный основанию, тогда $PQ = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Если основание b является достаточно малой величиной по сравнению с основанием a , то среднее квадратичное значение двух оснований будет незначительно отличаться от длины отрезка PQ . Такое значение изображено отрезком RS . Для точного построения такого отрезка укажем последовательность шагов:

- 1) $\sqrt{a^2 + b^2} = AC$;
- 2) Строим квадрат с диагональю AC , тогда длина стороны этого квадрата равна

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}};$$

3) на отрезке HA от точки H откладываем отрезок HR , равный $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$;

4) через точку R проводим отрезок, параллельный основанию трапеции.

Попытаемся найти отрезки в треугольнике, равные средним значениям двух сторон треугольника.

Во-первых, отметим простое свойство.

Теорема. Для двух положительных величин a и b их средние значения заключены между наименьшей из величин a , b и наибольшей из этих величин, т.е.

$$\min(a, b) \leq s_a(a, b) \leq \max(a, b),$$

$$\min(a, b) \leq s_g(a, b) \leq \max(a, b),$$

$$\min(a, b) \leq s_h(a, b) \leq \max(a, b),$$

$$\min(a, b) \leq s_k(a, b) \leq \max(a, b).$$

Для доказательства будем считать, что величины a и b упорядочены. Пусть $a \geq b$. Учитывая цепочку неравенств (1), достаточно доказать:

$$b \leq \frac{2ab}{a+b} \text{ и } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq a.$$

Сравним отношения:

$$\frac{\frac{2ab}{a+b}}{b} = \frac{2a}{a+b} > 1, \text{ следовательно, } b \leq \frac{2ab}{a+b}.$$

Аналогично

$$\frac{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2a^2}} < 1, \text{ следовательно, } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq a.$$

Рассмотрим отрезок CM в треугольнике ABC , где M — произвольная точка на стороне AB . Если точка M перемещается по стороне от точки A до точки B , то длина отрезка CM будет непрерывно изменяться от значения b до значения a . Средние значения также заключены между a и b , поэтому из непрерывности

функции длины отрезка CM следует, что существует четыре такие точки M_h, M_g, M_a, M_k , для которых отрезки CM_h, CM_g, CM_a, CM_k являются, соответственно, средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим и средним квадратичным (рис. 2).

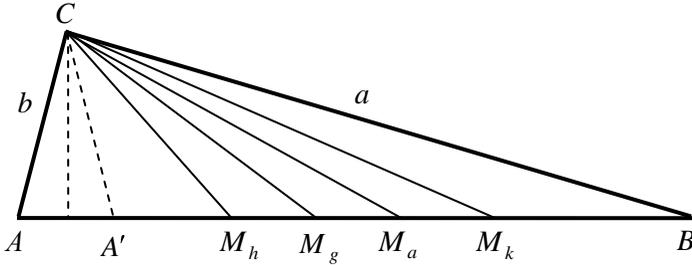


Рис. 2

Если основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB , принадлежит отрезку AB , то построим отрезок CA' , равный отрезку CA . Средние значения больше либо равны длине наименьшей стороны b , поэтому точки M_h, M_g, M_a, M_k расположены на отрезке $A'B$.

Проверим, связаны ли средние значения двух сторон a и b треугольника с медианой, биссектрисой и высотой, выходящими из вершины C .

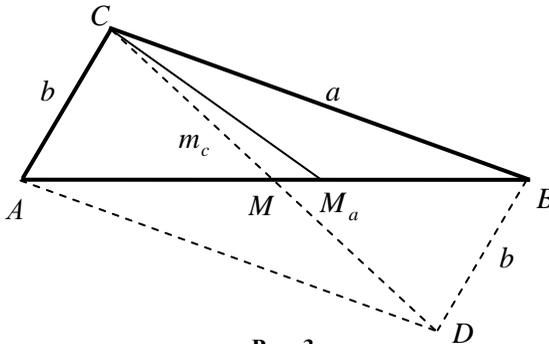


Рис. 3

Пусть CM — медиана треугольника ABC (рис. 3). Чтобы оценить медиану через стороны a и b треугольника, построим параллелограмм $ADBC$, тогда $CD=2m_c$. В треугольнике DBC сумма двух сторон больше третьей стороны, поэтому $a+b>2m_c$, поэтому $m_c < \frac{a+b}{2}$.

Для длины медианы и среднего арифметического получаем оценку

$$CM < \frac{a+b}{2}, \text{ т.е. } CM < s_a(a,b).$$

Следовательно, отрезок CM_a не является медианой и расположен согласно рис. 4, если $a > b$.

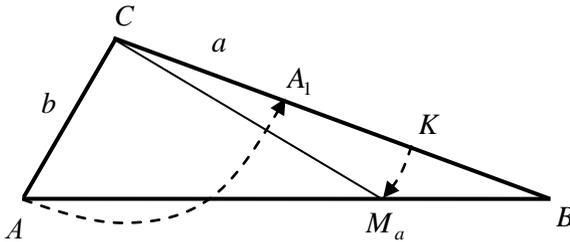


Рис. 4

На рис. 4 приведено точное построение отрезка CM_a , равного среднему арифметическому для двух сторон:

- 1) На стороне CB построим отрезок CA_1 , равный отрезку CA .
- 2) Построим середину K отрезка A_1B (стандартное построение, осуществляется циркулем и линейкой).
- 3) Строим отрезок CM_a , равный отрезку CK .

Пусть CM — биссектриса треугольника ABC . Длина биссектрисы выражается по формуле [3, с. 285]:

$$CM = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b}.$$

Заметим, что в учебнике формула длины биссектрисы при формулировке теоремы приведена с ошибкой, но далее, в процессе доказательства теоремы, получена верная формула.

Для длины биссектрисы и среднего гармонического получаем оценку:

$$CM < \frac{2ab}{a+b}, \text{ т.е. } CM < s_h(a, b).$$

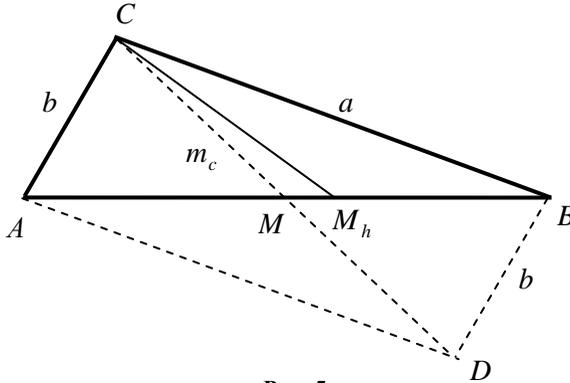


Рис. 5

Следовательно, отрезок CM_h не является биссектрисой и расположен согласно рис. 5, если $a > b$.

Для точного построения отрезка $CM_h = \frac{2ab}{a+b}$ составим пропорцию $\frac{a+b}{b} = \frac{2a}{CM_h}$.

На рис. 6 приведено точное построение отрезка CM_h , равного среднему гармоническому для двух сторон:

- 1) На луче CB построим отрезок BA_1 , равный b .
- 2) Через точки A и A_1 проведем прямую.
- 3) На луче BA_1 построим отрезок BK , равный a .

4) Через точку K проведем прямую, параллельную прямой A_1A , и пусть эта прямая пересекает прямую CA в точке L , тогда $\triangle CA_1A$ подобен $\triangle CKL$. $CL = \frac{2ab}{a+b}$.

5) Построим отрезок CM_h , равный отрезку CL .

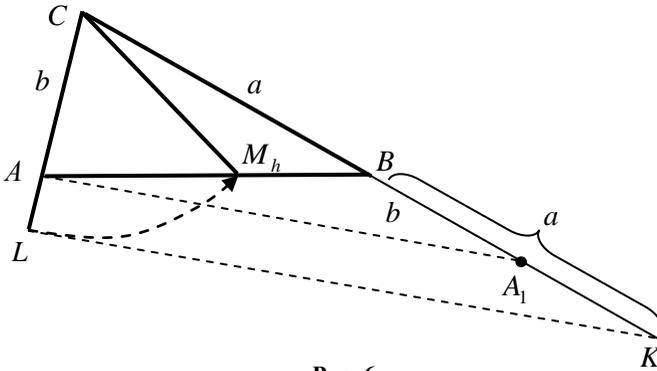


Рис. 6

Из рис. 7 видно, что высота треугольника не связана ни с одним из средних значений, т.к. для любого треугольника высота треугольника не превосходит боковых сторон (перпендикуляр меньше любой наклонной), т.е. $h \leq \min(a, b)$.

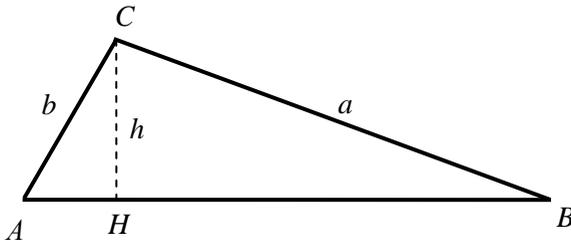


Рис. 7

На рис. 8 приведено построение среднего геометрического значения:

1) На луче, дополнительном к лучу CB , построим отрезок CA_1 , равный b .

- 2) На отрезке BA_1 как на диаметре построим полуокружность с центром O .
- 3) Из точки C восстановим перпендикуляр CK до пересечения с полуокружностью, тогда $CK = \sqrt{ab}$.
- 4) Построим отрезок CM_g , равный отрезку CK .

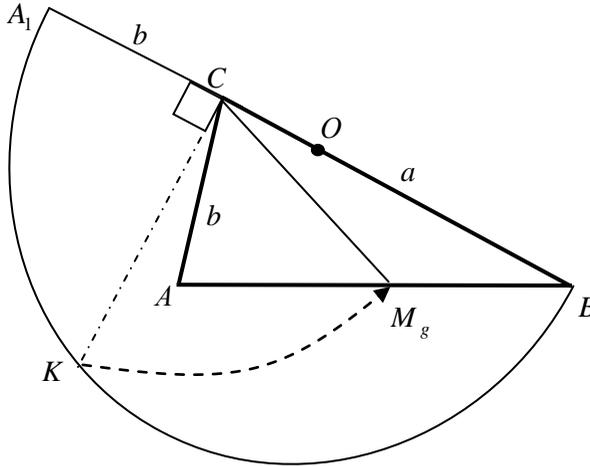


Рис. 8

На рис. 9 приведено построение среднего квадратичного значения:

- 1) На луче, дополнительном к лучу CB , построим отрезок CA_1 , равный b .
- 2) На отрезке BA_1 как на диаметре построим полуокружность с центром O .
- 3) Из точки O восстановим перпендикуляр OK до пересечения с полуокружностью, т.е. проведем радиус OK .
- 4) Построим отрезок CK . Длина этого отрезка равна $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ [2, с. 340].
- 5) Построим отрезок CM_K , равный отрезку CK .

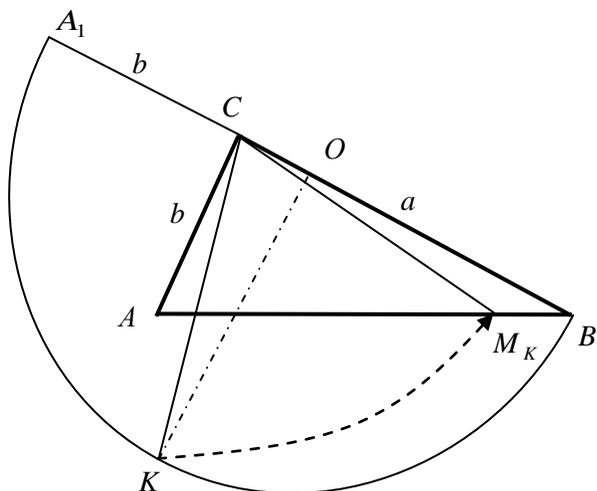


Рис. 9

§ 26. Оценка сложности алгоритма

Время течет на занятиях по информатике, время изменяется, а мы не то чтобы его задержать, но даже измерить или применить для изучения процессов в информатике не пытаемся. Попробуем исправить создавшуюся ситуацию. Определим среднее время выполнения одной операции, изучим правила определения сложности алгоритма. Таким образом, важнейшая техническая характеристика компьютера — тактовая частота — окажется более осмысленным понятием. Сделает один шаг от простого заучивания величины тактовой частоты к оперированию вычислениями с тактовой частотой.

Сложность алгоритма определяется по нескольким характеристикам. Одной из важнейших характеристик является временная оценка сложности алгоритма, а попросту говоря, количество времени для исполнения данного алгоритма. Но это относительное понятие. Например, время выполнения алгоритма на конкретном

компьютере существенно зависит от технических характеристик используемого компьютера. С другой стороны, решая несколько различных задач или одну и ту же задачу несколькими способами на одном и том же компьютере, можно использовать время для определения сложности алгоритма. В теории алгоритмов временно полагают, что данный алгоритм выполняется на некотором абстрактном компьютере, обладающим тем свойством, что каждое действие, определяемое алгоритмом, компьютер выполняет за единицу времени. С этой точки зрения, например, операции сложения, умножения, деления, сравнения и тому подобное выполняются за единицу времени каждая.

Проверим, что же в действительности происходит на реальном компьютере. Все последующие вычисления автором проводились на ноутбуке с тактовой частотой 789 МГц. На компьютерах с другой тактовой частотой результаты будут другие, но идею использования таймера читатель может использовать аналогично.

Компьютерное моделирование осуществлялось на языке Visual Basic.

Для определения времени работы алгоритма мы будем использовать три оператора.

Start = Timer — оператор запуска таймера,

Finish = Timer — оператор остановки таймера,

$t = \text{Finish} - \text{Start}$ — оператор вычисления количества времени работы таймера.

Вначале проверим, умеет ли компьютер вычислять время. Рассмотрим следующую программу

```
Private Sub Command1_Click()  
Start = Timer  
For i = 1 To 1000000000  
Next i  
Finish = Timer  
t = Finish - Start  
Print "Цикл задержки продолжался", t, "сек"  
End Sub
```

Расположим часы с секундной стрелкой (а лучше секундомер) на столе, и как только они покажут определенное число часов, минут и 00 секунд — запустим программу.

Увидев на экране *Цикл задержки продолжался* $t = 23,1875$ сек (на вашем компьютере это время может оказаться другим), срочно фиксируем число секунд на своих часах.

Найденное время выполнения цикла на часах, конечно, будет немного отличаться от времени на экране компьютера, а может и значительно. Если отличие значительно, то опыт нужно повторить, и постепенно вы приблизитесь к экранному времени. Но отличие будет всегда по нескольким причинам. Во-первых, программе нужно время, чтобы, выполнив цикл задержки, напечатать результат. Во-вторых, реакция человека на фиксацию окончания работы цикла и считывания своего результата на часах также требует определенного времени. После определенной тренировки в получении стабильного результата можно даже вычислить среднее значение отставания во времени и учитывать его в следующих экспериментах. Но очевидно, что компьютеру можно доверять.

Если в школе есть несколько компьютеров с различными техническими характеристиками и несколько секундомеров, то можно устроить игровое соревнование под названием «Суд над компьютерами» (рис. 1), а фактически это соревнование по выявлению ученика, наиболее быстро реагирующего на начало и окончание работы цикла.



Рис. 1

Следующая программа состоит из трех блоков.

```
Private Sub Command1_Click()  
a = 999999999: b = 0.0001  
Start = Timer  
For i = 1 To 100000000  
Next i  
Finish = Timer
```

```

t = Finish - Start
Print "Цикл задержки продолжался", t, "сек"

Start = Timer
For i = 1 To 100000000
s = a + b
Next i
Finish = Timer
t1 = Finish - Start
Print "Цикл суммирования продолжался", t1, "сек"

Start = Timer
For i = 1 To 100000000
p = a * b
Next i
Finish = Timer
t2 = Finish - Start
Print "Цикл умножения продолжался", t2, "сек"
End Sub

```

Первый блок замеряет время, необходимое для осуществления цикла задержки. Диапазон цикла от 1 до 100 000 000 с шагом, равным 1, является одинаковым для последующих циклов.

Второй блок замеряет время, необходимое для осуществления цикла суммирования, а третий блок — время, необходимое для осуществления цикла умножения.

Большой диапазон для работы алгоритма выбран так, чтобы компьютер мог зафиксировать достаточное число временных единиц и чтобы повысить точность при определении среднего значения времени выполнения одной операции.

Результаты работы алгоритмов в программе:

Цикл задержки продолжался $t = 2,359375$ с

Цикл суммирования продолжался $t1 = 10,17188$ с

Цикл умножения продолжался $t2 = 10,5625$ с

Время выполнения цикла суммирования и время выполнения цикла умножения приблизительно равны, чего мы и ожидали. Величины t и $t1$, t и $t2$ существенно отличаются, и этому есть следующее объяснение. Цикл задержки является простым счетчиком, а в циклах суммирования и умножения к действию счетчика добавляется выполнение арифметической операции.

Обращаем внимание на то, что при решении задач на суммирование часто рассматривают другую задачу о вычислении суммы

чисел с помощью оператора $S = S + a$. В таких задачах накапливаемая сумма может значительно возрасти при большом числе операций в цикле. Чтобы исключить это влияние, в нашей программе рассматривается сумма одних и тех же слагаемых, и поэтому время, затраченное при выполнении каждого шага, будет одинаковым.

1. Предлагаем вам провести эксперименты с этой программой:

- изменяя вводимые числа a и b ;
- изменяя длину цикла (для меньшей длины цикла процент отличия двух количеств времени будет возрастать);
- сохраняя длину цикла, но меняя начальное значение цикла;
- добавляя аналогичные блоки для операций вычитания и деления.

2. Определите в каждом случае среднее значение времени, затраченное на выполнение одной арифметической операции, учитывая, что их в цикле было совершено 100 000 000.

3. Тактовая частота означает число тактов в секунду. Для выполнения одной операции используется несколько тактов. Определите среднее значение тактов для выполнения одной операции перехода в цикле задержки.

Чтобы определить среднее значение тактов на операцию, умножим число тактов в секунду (тактовую частоту) на количество затраченных секунд на цикл и разделим на число операций в цикле.

4. Определите среднее значение тактов для выполнения каждой арифметической операции. Попытайтесь найти в научно-популярной литературе объяснение, почему для выполнения одной операции нужно несколько тактов.

5. Рассмотрите аналогичные циклы по вычислению квадратного корня, значений тригонометрической функции, экспоненциальной функции, логарифмической функции и проведите соответствующие вычисления.

Полагая снова, что для каждой арифметической операции необходима единица времени, рассмотрим методы определения сложности алгоритмов.

В информатике для этого часто используется два правила определения числа операций: правило произведения и правило суммы.

Для введения правила произведения рассмотрим простую задачу.
Задача 1. Из города A в город B ведут три дороги, а из города B в город C — две дороги. Сколько различных маршрутов существует из города A в город C ?

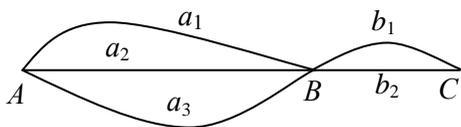


Рис. 2

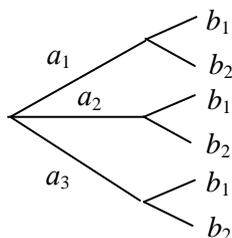


Рис. 3

Схема дорог на рисунке 2 показывает, что в точке A можно выбрать одну из дорог a_1, a_2, a_3 . Зафиксировав свой выбор на первом участке, мы имеем возможность снова в точке B выбрать путь из двух дорог, поэтому получаем 3×2 различных маршрутов: $a_1b_1, a_1b_2; a_2b_1, a_2b_2; a_3b_1, a_3b_2$.

Рисунок 3 наглядно иллюстрирует, сколькими способами можно выбрать различные маршруты.

Рисунок 4 наглядно иллюстрирует следующую простую, но важную идею.

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами и т.д. до k -го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий можно выполнить $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

Сформулированный алгоритм называется *правилом произведения*.

Графическое изображение различных возможностей на рис. 2 и 3 называется деревом или более общим понятием — *графом*. Использование дерева с его разветвлениями позволяет быстро подсчитать число всех возможностей.

Правило произведения используется для определения числа двоичных наборов в информатике,

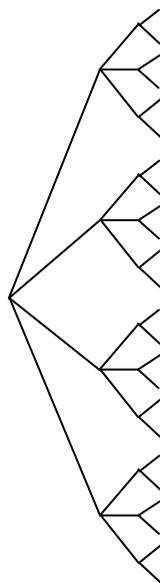


Рис. 4

для подсчета числа булевых функций с определенными свойствами, для определения числа операций во вложенных циклах.

Задача 2. Определите число двоичных наборов, содержащих n разрядов, где $n \geq 1$.

Решение. Для заполнения каждого разряда имеется две возможности — записать 0 или 1. Первый разряд можно заполнить 2 способами, второй разряд — 2 способами и т.д. По правилу произведения получаем $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ — раз}} = 2^n$.

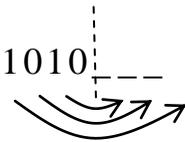


Рис. 5

Задача 3. Определите число двоичных наборов, содержащих n разрядов, где $n \geq 1$, и читаются одинаково слева направо и справа налево.

Решение. Число разрядов нужно разделить пополам (рис. 5). Заполним один разряд в одной части, тогда по симметрии автоматически во второй части появляется соответствующая цифра. Если число n — четное, то необходимо заполнить $n/2$ разрядов, а значит, в этом случае существует $2^{n/2}$ двоичных наборов. Если число n — нечетное, то необходимо заполнить $(n+1)/2$ разрядов, а значит, в этом случае существует $2^{(n+1)/2}$ двоичных наборов. Два случая можно объединить и ответ записать одной формулой, если использовать для числа n понятие целой части числа $[n]$. Например, $[5]=5$, $[2,5]=2$. Итак, единый ответ $2^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$ для любого натурального числа n .

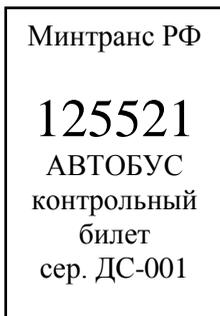


Рис. 6

А сколько существует «счастливых» шестизначных автобусных билетов, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (рис. 6)? Вначале уточните у кондуктора автобуса, напечатан ли в рулоне автобусных билетов билет с номером 000 000. Постановка вопроса вначале кажется абсурдной, т.к. нулевой номер на билете не имеет смысл записывать, но вспомним, что рулон билетов печатается автоматически и в каждом разряде (пусть не одновременно) для некоторых чисел должно

появиться число 0. А тогда почему бы не появиться и числу 000 000?

Задача 4. Булева функция $f(X,Y) = X \vee Y$ на наборах переменных $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ принимает, соответственно, значения $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 1$, поэтому эту функцию можно задать набором ее значений, т.е. (0111) . В этом наборе значений функции столько разрядов, сколько существует наборов переменных. Булеву функцию $f(X,Y) = X \wedge Y$ можно задать набором (0001) . Сколько существует булевых функций от n переменных?

Решение. Сразу отметим, что этот вопрос некорректный. В любой теории вначале выясняется, что понимается под равенством двух объектов. Даже для $n = 1$ можно найти бесконечное множество функции от одной переменной. Например, $X, X \vee X, (X \vee X) \vee X, \dots, X \wedge X, (X \wedge X) \vee X, \dots, \bar{X}$. Некоторые из них совпадают. Но после упрощения получим четыре функции от одной переменной $f(X) = X, f(X) = \bar{X}, f(X) = 0, f(X) = 1$.

Итак, в постановке задачи предполагается, что требуется определить количество существенно различных функций, т.е. которые отличаются на множестве их значений хотя бы в одном разряде.

Как было выяснено в задаче 2, для n переменных существует 2^n наборов аргументов. Столько же существует разрядов при записи набора значений функции. Их нужно заполнить, причем для заполнения каждого разряда имеется две возможности, поэтому число искомых функций равно $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{2^n \text{ раз}} = 2^{2^n}$. Число суще-

ственно различных функций от двух переменных равно $2^{2^2} = 16$, а для трех переменных существует $2^{2^3} = 256$ существенно различных функций.

Важное замечание. Количество изучаемых функций от одной переменной в математике может быть неограниченным. Например, $y = kx$, где k пробегает множество действительных чисел. А в информатике, использующей в основном булевы функции, число функций при фиксированном значении числа переменных

ограничено. Но радоваться рано, т.к. при увеличении числа n переменных число функций растет очень быстро.

Второе важное замечание состоит в том, что мы видим удивительный способ задания функций. Да, мы не боимся использовать эпитет — удивительный. Мы редко оглядываемся назад и анализируем полученный результат. А суть его состоит в том, что любую булеву функцию можно задать набором нулей и единиц. Не обязательно использовать символы логики: дизъюнкцию, конъюнкцию и т.д. Целый класс булевых функций, которые упрощением можно привести к одной функции, можно задать одним набором. С такими наборами легко работать, в то время как функции, записанные символами математической логики, компьютеру сложно узнать, причем некоторые из них, внешне отличающиеся, могут оказаться после упрощения одной и той же функцией. Использование такого способа задания существенно различных функций позволило быстро определить их количество.

Задача 5. Вложенный цикл выполняет n_1 операций во внутреннем цикле и n_2 операций во внешнем цикле. Определите общее число выполняемых операций.

Очевидно, что в этом случае нужно применить правило произведения, и общее число операций равно $n_1 \cdot n_2$.

Программа для иллюстрации правила произведения

```
Private Sub Command1_Click()  
Start = Timer  
For i = 1 To 100000000  
Next i  
Finish = Timer  
ts = Finish - Start  
Print "Простой цикл задержки продолжался", ts, "сек"  
  
Start = Timer  
For i = 1 To 1000000000  
Next i  
Finish = Timer  
tg = Finish - Start  
Print "Десятикратный цикл задержки продолжался", tg, "сек"  
Start = Timer  
For k = 1 To 10  
For i = 1 To 100000000  
Next i, k
```

```

Finish = Timer
tc = Finish - Start
Print "Десятикратный вложенный цикл задержки продолжался", tc, "сек"
End Sub

```

Результаты работы алгоритмов в программе:

Простой цикл задержки продолжался $t_s = 4,96875$ с.

Десятикратный цикл задержки продолжался $t_g = 49,625$ с.

Десятикратный цикл задержки продолжался $t_c = 50,84375$ с.

Правило произведения приблизительно подтверждено на конкретном компьютере.

Правило произведения имеет большое значение и его нужно постоянно учитывать при работе с вложенными циклами.

Пусть во вложенном цикле шаг переменных внешнего и внутреннего циклов является одним и тем же (что часто случается при проведении эксперимента для быстрого изменения программы) и этот шаг объявлен до внешнего цикла, тогда уменьшение шага в n раз приводит к выполнению операций в n^2 раз больше, а значит, и к замедлению работы компьютера в n^2 раз. Если программа содержит вывод на экран результатов вычислений, то их просмотр часто становится необозримым. Оценка сложности алгоритма в этом случае должна выполняться быстро и направлена на предвидение результата до начала запуска программы.

Следующее *правило суммы* очевидно и не требует пояснений.

Пусть программа содержит два блока, следующих друг за другом. В первом блоке требуется выполнить n_1 операций, а во втором блоке — n_2 операций, тогда программа должна выполнить $n_1 + n_2$ операций.

Это правило постоянно используется, когда требуется найти ошибку методом деления пополам. Весь диапазон делится на две части и в одном из полученных поддиапазонов определяется ошибка.

Программа для иллюстрации правила суммы

```

Private Sub Command1_Click()
Start = Timer
For i = 1 To 300000000
Next i
Finish = Timer
t1 = Finish - Start
Print "Первый цикл задержки продолжался", t1, "сек"

```

```

Start = Timer
For i = 300000001 To 900000000
Next i
Finish = Timer
t2 = Finish - Start
Print "Второй цикл задержки продолжался", t2, "сек"
Start = Timer
For i = 1 To 900000000
Next i
Finish = Timer
tg = Finish - Start
Print "Суммарный цикл задержки продолжался", tg, "сек"
Print " ", "Сравним tg=", tg, "и", "t1 + t2 =", t1 + t2
End Sub

```

Результаты работы алгоритмов в программе:

Первый цикл задержки продолжался $t_1 = 15,25$ с.

Второй цикл задержки продолжался $t_2 = 29,75$ с.

Суммарный цикл задержки продолжался $t_g = 44,64063$ с.

Сравним $t_g = 44,64063$ и $t_1 + t_2 = 45$.

Правило суммы приблизительно подтверждено на конкретном компьютере.

Существуют ли другие правила, если известно, что для одного действия требуется выполнить n_1 операций, а для другого действия — n_2 операций. Для компьютеров, решающих сложные задачи с помощью параллельных вычислений, используются следующие два правила.

Правило минимального значения применяется, когда заранее не известно хотя бы одно из чисел n_1, n_2 операций. Этот принцип применяется давно в телевикторинах, когда определяется участник, выполнивший быстрее всех некоторое действие. Покажем применение правила в информатике. Обычно оно применяется в цикле, в котором число шагов не задано, а цикл работает, пока выполняется заданное условие.

Алгоритм может быть эффективным, или время его работы небольшим, если он работает с данными небольшого размера. Например, если граф содержит небольшое число вершин, то нетрудно найти кратчайший путь между двумя данными вершинами, выполнив перебор всех различных маршрутов движения из одной вершины в другую. Задача разбивается на две подзадачи *A* и *B*.

Для решения одной и той же подзадачи A разными методами можно рассмотреть ее решение по двум параллельным каналам (рис. 7).

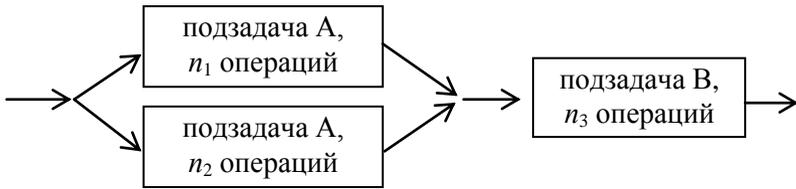


Рис. 7

Например, по одному каналу осуществляется решение задачи для графа алгоритмом Дейкстры, а по другому — полным перебором. После получения самого быстрого решения подзадачи полученные данные передаются на решение второй подзадачи B . В случае для оценки сложности алгоритма решения подзадачи A используется правило минимального значения, т.е. определения $\min(n_1, n_2)$. Для оценки сложности всей задачи применяем далее правило суммы и получаем $\min(n_1, n_2) + n_3$.

Иногда для решения задачи ее разбивают на две части и осуществляют их решение по двум параллельным каналам (рис. 8).

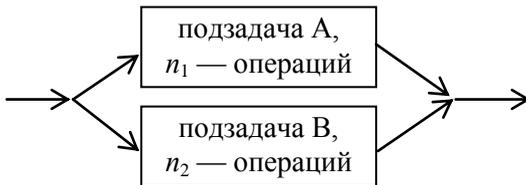


Рис. 8

По одному каналу нужно рассмотреть решение подзадачи A , а по другому — подзадачи B . В этом случае нужно дожидаться решения двух подзадач. Для оценки сложности

алгоритма решения задачи используется *правило максимального значения*, т.е. определения $\max(n_1, n_2)$.

В заключение отметим, что существует второе важное направление использования таймера для фиксации времени при решении реальных физических задач с помощью компьютера, которое осталось за рамками данной статьи.

§ 27. Моделирование графика функции

Практика показывает, что обучение учащихся и студентов часто перегружено многочисленными вычислениями, которые иногда заслоняют основную идею, отрабатываемую в данном задании.

Примером таких заданий является полное исследование функции и построение графика. Большинство примеров в задачниках содержит «хорошие» коэффициенты в условии задачи, т.е. целые или дробные коэффициенты, однако при исследовании функции появляются точки, координаты которых содержат радикалы.

Вычисление значений функции в таких точках требует определенной затраты времени, затем для построения таких точек нужно выполнить округления, чтобы определить расположение точек на числовой оси. Округление чисел отрицательно сказывается на качестве построения чертежа, но самое главное — при этом происходит потеря рабочего времени. После построения приближенных значений координат учащийся обязан указывать на чертеже истинные значения, т.е. иррациональные значения. Назрела необходимость в разработке большого набора заданий, полностью отражающих набор необходимых навыков согласно стандартам обучения по данной теме, но значительно упрощающих вычислительные навыки.

Автор данного пособия не призывает исключить задачи с радикалами из изучения. Учащегося или выпускника вуза нужно подготовить к ситуации, когда возникает необходимость исследования функции в точках, координаты которых содержат радикалы. Преподаватель должен показать пример решения такой задачи с подробными вычислениями, а затем решить еще один пример с аналогичными вычислениями. Но дальнейшая тренировка должна осуществляться на классе задач, не требующих большого времени для вычислений.

В поддержку такого подхода могут выступить следующие аргументы.

1. Стандарты высшего профессионального образования постепенно уменьшают количество часов для изучения высшей математики, сохраняя прежний объем. В этой ситуации лучше решить две задачи с достаточно «хорошими» коэффициентами, чем одну с громоздкими вычислениями.

2. При открытой форме компьютерного тестирования испытуемому предлагаются варианты для ответов с любыми числами, в том числе и с радикалами. В последнее время часто применяется закрытая форма компьютерного тестирования, при которой тестируемый должен самостоятельно ввести ответ в виде числа. В этом случае возникает потребность в формировании банка задач с целочисленными или рациональными числами в ответе.

3. Дифференциация и индивидуализация обучения предполагает выдачу учащимся индивидуальных вариантов с заданиями. Быстрая проверка решений значительно облегчается, если преподаватель имеет средство автоматизированного построения таких графиков и удобный интерфейс их визуализации.

Основная идея в ранее предлагаемых заданиях — по заданному аналитическому заданию построить график функции. Предлагаемая идея в настоящей статье — от геометрических характеристик графика функции к аналитическому заданию по определенному алгоритму и затем к построению графика. Все это должно быть известно преподавателю при составлении банка задач и значительно облегчает как составление задач для индивидуальных заданий, так и их проверку. Учащийся получает аналитическое задание функции для исследования функции и построения графика. Он не знает этих геометрических параметров, но имеет возможность оперировать с целыми числами и более качественно построить график функции.

В основу подбора коэффициентов для графика функции положена визуализация основных геометрических характеристик. В компьютерной программе задаются геометрические параметры, а далее компьютер проводит вычисления, осуществляет построение системы координат, асимптот графика, проектирует точки экстремума на оси координат, печатает на экране компьютера введенные параметры и аналитическое задание функции.

Рассмотрим идею составления алгоритма большого банка задач такого типа.

Пользуясь языком проектирования, сформулируем «техническое задание» на проект. Учащийся должен найти вертикальную и наклонную асимптоты графика, определить интервалы возрастания и убывания функции, найти точки экстремума и определить тип этих экстремумов.

Функция $y = kx + b$ определяет наклонную прямую, а функция $y = \frac{c}{x - a}$ имеет вертикальную асимптоту. Комбинируя эти функции, составим функцию

$$y = kx + b + \frac{c}{x - a}, \quad (1)$$

где k, b, a — целые числа.

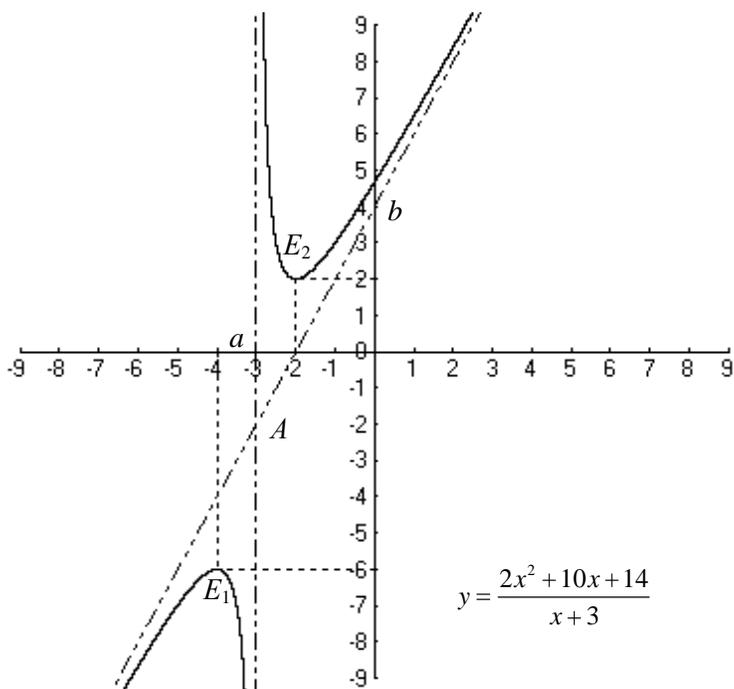


Рис. 1

При $x \rightarrow \infty$ точки графика функции (1) приближаются к наклонной асимптоте, а при $x \rightarrow a$ точки графика приближаются к вертикальной асимптоте. Эскиз графика этой функции строится быстро, и поэтому внешний вид функции нужно изменить, чтобы учащиеся не обнаружили этой закономерности и провели полное исследование функции.

Рассмотрим следующий вид этой функции:

$$y = \frac{kx^2 + (b - ak)x + c - ab}{x - a}.$$

Функция имеет экстремумы в точках

$$x_1 = \frac{ka - \sqrt{kc}}{k} \text{ и } x_2 = \frac{ka + \sqrt{kc}}{k} \text{ при условиях } k \neq 0, kc \geq 0.$$

Чтобы абсциссы точек экстремумов имели рациональные координаты, необходимо выбрать значение выражения kc равным точному квадрату некоторого числа.

Рассмотрим случай $c = kq^2$, где $q \in N$, который обеспечивает целые значения абсцисс, тогда $x_1 = a - q$, $x_2 = a + q$. Эти значения изображаются на оси Ox симметрично относительно точки $x = a$. Параметр q имеет простой геометрический смысл. Он характеризует удаленность точек экстремума от вертикальной асимптоты.

Значения функции

$$y = \frac{kx^2 + (b - ak)x + kq^2 - ab}{x - a}$$

в этих точках, соответственно, равны:

$$y_1(a - q) = ka + b - 2kq, \quad y_2(a + q) = ka + b + 2kq.$$

Если дополнительно потребовать условие, чтобы число k было целым числом, то и ординаты точек экстремума также будут целыми числами.

Асимптоты графика функции пересекаются в точке $A(a; ka + b)$.

Точки $E_1(a - q; ka + b - 2kq)$ и $E_2(a + q; ka + b + 2kq)$ экстремумов функции расположены симметрично относительно точки $A(a; ka + b)$ (рис. 1). В действительности весь график функции (1) симметричен относительно точки A . Если рассмотреть параллельный перенос системы координат в точку A , который определяется формулами $x = x' + a$, $y = y' + ka + b$, то получаем функцию

$y' = kx' + \frac{c}{x'}$. В новой системе координат она определяет линию,

симметричную относительно начала координат, т.к. функция является нечетной.

Симметрия графика позволяет быстро контролировать правильность построения графика.

Используя четыре целочисленных параметра k, b, a, q , можно составить большой банк заданий для индивидуальных работ. Оперирование геометрическими характеристиками позволяет преподавателю на начальной стадии представить предполагаемый чертеж, а затем при построении на компьютере быстро вносить изменения в коэффициенты, используя переносы и растяжения, чтобы график функции наиболее наглядно изображался в системе координат.

Предлагаемая программа «Асимптота и экстремум на графике» написана на языке Visual Basic.

```
Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
k = 2: b = 4: a = -3: q = 1
xc = 5500: yc = 4000 'перенос графика в центр экрана
ko = 300 'коэффициент растяжения графика
m = 9 'количество меток на полуоси
For i = -m To m
Line (i * ko + xc, yc)-(i * ko + xc, 40 + yc) 'построение меток на оси Ox
PSet (i * ko - 100 + xc, yc - 40), QBColor(15)
If i <> 0 Then Print i 'печать координат точек на оси Ox
Line (xc, i * ko + yc)-(40 + xc, i * ko + yc) 'построение меток на оси Oy
PSet (xc - 200, i * ko + yc + 100), QBColor(15)
Print i 'печать координат точек на оси Oy
Next i
Line (-m * ko + xc, yc)-(m * ko + xc, yc)
Line (xc, -m * ko + yc)-(xc, m * ko + yc)
DrawStyle = 4
Line (a * ko + xc, 0)-(a * ko + xc, 8000) 'вертикальная асимптота
Line (-m * ko + xc, (-k * m + b) * ko + yc)-(m * ko + xc, (k * m + b) * ko + yc)
'наклонная асимптота
DrawWidth = 1
For x = -m To a - 0.01 Step 0.0001
y = (k * x ^ 2 + (b - a * k) * x + k * q ^ 2 - a * b) / (x - a)
PSet (x * ko + xc, y * ko + yc) 'точки графика левее вертикальной асимптоты
Next x
For x = a + 0.1 To m Step 0.0001
y = (k * x ^ 2 + (b - a * k) * x + k * q ^ 2 - a * b) / (x - a)
PSet (x * ko + xc, y * ko + yc) 'точки графика правее вертикальной асимптоты
```

```

Next x
DrawWidth = 1: DrawStyle = 2
' проектирование точек экстремума на оси координат
Line ((a - q) * ko + xc, yc)-((a - q) * ko + xc, (k * a + b - 2 * k * q) * ko + yc)
Line (xc, (k * a + b - 2 * k * q) * ko + yc)-_
((a - q) * ko + xc, (k * a + b - 2 * k * q) * ko + yc)
Line ((a + q) * ko + xc, yc)-((a + q) * ko + xc, (k * a + b + 2 * k * q) * ko + yc)
Line (xc, (k * a + b + 2 * k * q) * ko + yc)-_
((a + q) * ko + xc, (k * a + b + 2 * k * q) * ko + yc)
PSet (200, 7600), QBColor(15): Print "k="; k, "b="; b
PSet (200, 7400), QBColor(15): Print "a="; a, "q="; q
PSet (200, 7200), QBColor(15)
Print "y=( "; k; "x^2+( "; b - a * k; ")x+"; k * q ^ 2 - a * b; ")/(x-"; a; " )"
End Sub

```

Программа позволяет работать и с дробными значениями этих параметров. Например, вводя параметры $k = -1/4$, $b = -4$, $a = -3$, $q = 2$, преподаватель видит на экране компьютера построенный рисунок (рис. 2) и напечатанное аналитическое задание:

$$y = -0,25x^2 + (-3,75)x + (-13)/(x - (-3)).$$

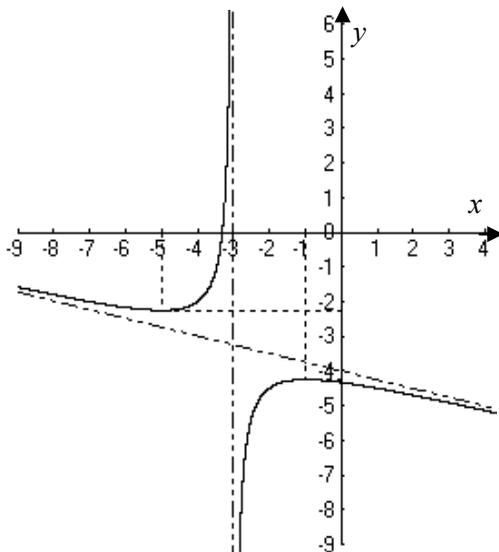


Рис. 2

При выдаче учащимся аналитического задания функции лучше перейти к целым числам

$$y = -\frac{x^2 + 19x + 52}{4(x + 3)}.$$

Координаты точек экстремума в этом случае могут оказаться дробными числами.

Программу можно быстро изменить так, чтобы она изменяла автоматически некоторые геометрические параметры и печатала всю информацию для проверки промежуточных вычислений. Например, координаты точек экстремумов, выражения первой и второй производных.

Данную тематику можно использовать для формирования поисково-исследовательской деятельности.

При формировании поисково-исследовательской деятельности учащихся можно выделить три главных этапа — стадии развития этого процесса:

1. Мотивационно-ориентационная стадия.

Главной целью этого этапа является создание проблемной ситуации, приводящей к необходимости исследования возникшей задачи, формирование положительного отношения и интереса к исследовательской деятельности, создание у учащегося позиции исследователя.

2. Формирующая стадия.

В специальных дидактических условиях осуществляется формирование поисково-исследовательской деятельности. Организуется обучение исследовательским навыкам, оперативный контроль и корректировка исследовательских умений.

3. Стадия «Я — исследователь».

Организуется самостоятельное исследование и осознанный перенос сформированных исследовательских умений в новые условия.

Рассмотрим методику формирования ПИД по математике и информатике с использованием тематики, рассмотренной в этом параграфе.

На первой стадии учащимся предлагается самостоятельно исследовать функцию, являющуюся многочленом третьей степени и имеющую целочисленные координаты точек экстремумов.

Примером такой функции является функция $x^2(a-x)=by$, где $a > 0, b > 0$, задающая первую жемчужную кривую [29, с. 167], если a и b — соответствующим образом выбранные параметры.

При фиксированном значении a и изменяющемся значении параметра b семейство функций достигает экстремальных значений в точках $x=0$ и $x=2a/3$. Точки перегиба семейства функции также имеют одну и ту же проекцию на ось Ox при $x=a/3$ (рис. 3).

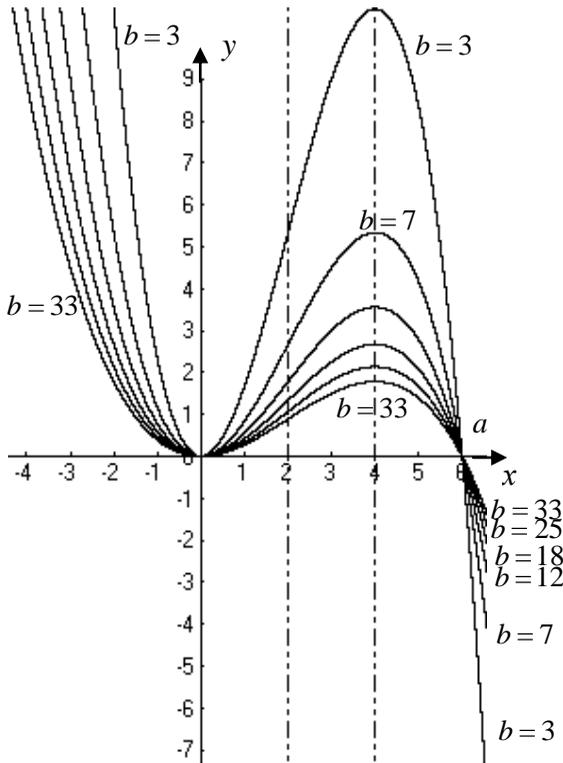


Рис. 3

После этого создается проблемная ситуация о необходимости изменения выражения функции таким образом, чтобы точки экстремума не были видны с первого взгляда в аналитическом задании. Очевидно, что для этого можно применить перенос линии на вектор

$\bar{a}(x_0; y_0)$ с целочисленными координатами. Таким образом, встает задача о моделировании построения линии с тремя произвольными параметрами b, x_0, y_0 при фиксированном значении параметра a .

Первый этап плавно переходит во второй этап — стадию формирования исследовательских навыков под руководством наставника. На этом же этапе поставленная задача расширяется введением изменения четвертого параметра a . Специальная линия, первая жемчужная кривая, имеет две экстремальные точки, абсциссы которых удалены на одно и то же расстояние.

На третьем этапе предлагается решить общую задачу о поиске функций в виде многочлена третьей степени, для которых абсциссы экстремальных точек являются целыми числами.

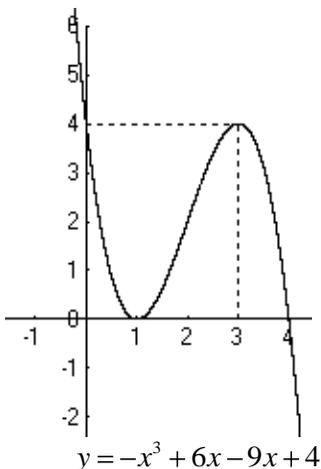


Рис. 4

При выборе целочисленных значений $x = e_1$ и $x = e_2$ вначале появляется производная функции $y' = (x - e_1)(x - e_2)$, при условии, что учащийся разыскивает самую простую форму записи, а затем саму функцию

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{e_1 + e_2}{2}x^2 + e_1e_2x + C,$$

где C — const.

Чтобы значения функции в точках $x = e_1$ и $x = e_2$ были целочисленными или рациональными значениями, можно выбрать функцию в виде:

$$y = \frac{ax^3}{3} - \frac{a}{2}(e_1 + e_2)x^2 + ae_1e_2x + b,$$

где a, b — постоянные (рис. 3).

Программа «**Экстремумы на кубической линии**» имеет вид:

```
Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
e1 = -1: e2 = 2: a = 3: b = 4
xs = 5500: ys = 4000 'перенос графика в центр экрана
```

```

k = 300 'коэффициент растяжения графика
m = 12 'количество меток на полуоси
Line (-m * k + xc, yc)-(m * k + xc, yc)
Line (xc, -m * k + yc)-(xc, m * k + yc)
For i = -m To m Step 1
  Line (i * k + xc, yc)-(i * k + xc, 40 + yc) 'построение меток на оси Ox
  PSet (i * k - 100 + xc, yc - 40), QBColor(15)
  If i <> 0 Then Print i 'печать координат точек на оси Ox
  Line (xc, i * k + yc)-(40 + xc, i * k + yc) 'построение меток на оси Oy
  PSet (xc - 200, i * k + yc + 100), QBColor(15)
  Print i 'печать координат точек на оси Oy
Next i
For x = -m To m Step 0.0001
  y = a / 3 * x ^ 3 - a / 2 * (e1 + e2) * x ^ 2 + a * e1 * e2 * x + b
  PSet (x * k + xc, y * k + yc) 'точки графика
Next x
DrawStyle = 2
' проектирование точек экстремума на оси координат
Y1 = -a / 6 * e1 ^ 3 + a / 2 * e1 ^ 2 * e2 + b
Line (e1 * k + xc, yc)-(e1 * k + xc, Y1 * k + yc)
Line (xc, Y1 * k + yc)-(e1 * k + xc, Y1 * k + yc)
Y2 = -a / 6 * e2 ^ 3 + a / 2 * e2 ^ 2 * e1 + b
Line (e2 * k + xc, yc)-(e2 * k + xc, Y2 * k + yc)
Line (xc, Y2 * k + yc)-(e2 * k + xc, Y2 * k + yc)
PSet (200, 7600), QBColor(15): Print "e1="; e1, "e2="; e2
PSet (200, 7400), QBColor(15): Print "a="; a, "b="; b, "xp="; (e1 + e2) / 2
PSet (200, 7200), QBColor(15)
Print "y="; a / 3; "x^3-("; a / 2 * (e1 + e2); ")x^2+("; a * e1 * e2; ")x+("; b; ")"
End Sub

```

В учебном процессе мы часто обращаем внимание на то, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями. Но следует заметить, что использование этих взаимно обратных операций ограничивается нахождением интегралов и проверкой правильности решения вычислением производной.

В рассмотренной задаче решается важная задача о восстановлении кривой с заданными проекциями экстремальных точек на ось абсцисс.

§ 28. Поиск обратных задач

Итак, нами исследованы различные типы обратных задач, выделены актуальные направления для поиска обратных задач по математике и информатике, представлены методические приемы постановки обратных задач и их решения.

На современном этапе образования большое внимание уделяется креативному обучению, а также процедурному способу поиска информации для решения поставленной задачи.

С целью развития творческого мышления учащихся некоторые авторы предлагают включать в процесс обучения задания с недостающими данными, задания с лишними или противоречивыми данными, задания на конструирование задач, аналогичных данной, на обобщение задачи и ее специализацию и т.п.

Обучение умению обращать внимание на поиск обратных задач и их решение имеет большое методическое значение для подготовки специалиста в предметной сфере, для обучения методам научного поиска, а также большое воспитательное значение.

Поясним воспитательное значение обратных задач на следующем простом примере. Иногда учащийся совершает негативное действие, понимая, что ему не придется нести ответственность перед обществом, так как по результатам этого поступка невозможно определить лицо, совершившее этот поступок. Многие из нас видели, как учащиеся пытаются разбить пустую бутылку о камень или асфальт. Если учащиеся увидели, что на них обратили внимание взрослые, то они прекращают начатый процесс, что свидетельствует о том, что они понимают негативные последствия совершаемого поступка. Отсутствие взрослых дает им полную свободу, так как они считают, что по разбитым осколкам стекла невозможно определить лиц, совершивших этот поступок, или никто не будет заниматься таким мелким расследованием. Формирование ответственности за совершенные поступки должно быть системной задачей в обществе и должно решаться на всех уровнях — в школе, в семье, на улице. В этом русле воспитания находится формирование поиска и решения обратных задач. Решение обратных задач воспитывает ответственность за проведенное действие, способствует формированию общих способов действия, так как каждое действие рассматривается

под углом зрения возможности осуществить обратное действие. Формируется понимание того, что некоторые задачи обратимы, а некоторые оказываются неопределенными. Как по результату действия восстановить условие проведения действия?

В методической науке давно известен метод укрупнения дидактических единиц (УДЕ), в котором концентрированно изучаются прямые и обратные действия. В математике неоднократно акцентировалось внимание на укрупнении дидактических единиц с помощью прямого и обратного действия [30], хотя анализ заданного материала в учебниках показывает, что в большинстве случаев все ограничивается сопоставлением сложения и вычитания, умножения и деления, дифференцирования и интегрирования. Составление обратных задач, использование взаимосвязей и чередующееся противопоставление составляют основу такого метода, и они помогают при подготовке к единому государственному экзамену (ЕГЭ).

Анализ заданий ЕГЭ показывает, что в них часто предлагаются задачи, предполагающие использование обратных операций к операциям, рассмотренным в школьных учебниках. Такие задания ЕГЭ находятся в рамках, очерченных стандартами обучения, но с другой стороны они предполагают мыслительный процесс на более высоком уровне по сравнению с системой мыслительных операций, используемых при обычном обучении. Трудность решения таких заданий состоит в том, что учащийся должен мыслить в двух направлениях. Из арсенала известных действий он должен вспомнить прямую задачу, которая является обратной к операции в задании ЕГЭ. Обратная операция к обратной является прямой операцией. О том, что в задании используется обратная операция к изученной в школьном курсе, конечно, в задании нет явного указания. Таким образом, для поиска прямой операции учащийся должен выстроить сложную цепочку, т.е. восстановить прямую операцию, как обратную к операции, которая предусматривается в задании ЕГЭ.

При подготовке к ЕГЭ часто применяется повторение пройденного материала с ориентацией на тематику ЕГЭ предыдущих лет. Отмечая необходимость повторения материала при подготовке, следует отметить недостаток механического повторения, состоящий в том, что при незначительном изменении условия

задачи в следующем году учащийся испытывает затруднение. Повторение пройденного материала целесообразно вести, применяя систематизацию задач, окидывая все множество единым взглядом и одновременно «раскладывая разнообразные задачи по соответствующим полочкам».

Рассмотрим системный подход к укрупнению дидактических единиц при подготовке к ЕГЭ.

Пусть к некоторому объекту A применяется операция f , в результате которой получается объект B . Объект B будем иногда записывать в виде $f(A)$.

Если известны A и f , а требуется найти B , для которого $B = f(A)$, то будем называть эту задачу прямой.

Если известны операция f и некоторый объект B , а требуется найти объект A , для которого $f(A) = B$, то будем называть такую задачу обратной по восстановлению первоначального объекта.

Если известны объекты A и B , а требуется найти операцию f , для которой $f(A) = B$, то будем называть такую задачу обратной задачей по определению операции.

Прямую и обратные задачи можно интерпретировать как поиск неизвестного элемента в схеме $A \xrightarrow{f} B$ по двум данным элементам.

После решения предложенной прямой задачи возникают естественные вопросы.

1) Если известны исходные данные и данные в ответе, то можно ли восстановить процедуру, используемую для перехода от входной информации к итоговой?

2) Как восстановить исходные данные по найденному ответу, если известна операция?

3) Какие параметры в условии задачи были существенными и можно ли опустить в задаче второстепенные данные?

4) При каких условиях обратная задача разрешима и определена, т.е. имеет единственное решение?

5) При каких условиях обратная задача решается неоднозначно или не имеет решения?

Для достаточно полной представленной схемы вопросов рассмотрим решение некоторых задач.

Для обратных задач можно привести две классификации, положив в основу классификаций различные принципы.

Рассмотрим первую классификацию, учитывая разрешимость задачи и число решений.

Если обратная задача имеет решение, то назовем ее *совместной* (разрешимой). Обратная задача называется *несовместной* (противоречивой), если она не имеет решений.

Совместная задача называется *определенной*, если она имеет единственное решение и называется *неопределенной*, если имеет более одного решения.

Рассмотрим вторую классификацию на основе методического подхода, учитывая субъектный опыт учащегося, решающего задачу.

Обратная задача называется *стандартной*, если прямые задачи такого типа (т.е. обратная к данной обратной) решались при подготовке учащегося.

Стандартная обратная задача решается в обратном направлении, т.е. предполагается, что задача решена, записывается соотношение между данными величинами в задаче и неизвестной величиной с использованием прямой операции. Из полученного отношения определяется неизвестная величина.

Обратная задача называется *полустандартной*, если прямые задачи аналогичного типа решались при подготовке учащегося, но запись соотношения между данными и неизвестными величинами не является однозначной. Требуется дополнительное исследование, чтобы запись прямой операции была конкретизирована.

Обратная задача называется *эвристической*, если знание названия прямой операции не выдает четкого алгоритма ее обращения в обратную сторону. Для решения такой задачи нужно применить эвристики. Логические задачи на перекладывание спичек, на определение фальшивой монеты являются эвристическими, т.к. неизвестно, как осуществлялась прямая операция перекладывания или взвешивания. Одно название операции в этих задачах еще не означает то, как она осуществлялась.

Рассмотрим набор задач по теме «Системы счисления» в информатике.

Произвольное число a , которое будем считать записанным в десятичной системе счисления, можно записать в системе счисления с основанием q в виде:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{10} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_q = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0 + a_{-1} q^{-1} + \dots,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots$ цифры в системе счисления с основанием q , поэтому все эти цифры меньше числа q . Эта форма записи числа называется развернутой.

Для целого числа a используется запись $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_q$.

Таким образом, можно рассмотреть триаду $a, \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_q, q$, состоящую из трех элементов: числа, его формы записи и основания системы счисления. Если отнести эту задачу к рассмотренной ранее схеме, то первоначальным объектом A является данное число a , операцией f является переход от данного числа в десятичной системе счисления к числу в позиционной системе счисления с основанием q , а объектом B является форма записи данного числа, т.е. $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_q$.

По двум элементам триады можно определить третий элемент:

а) Если известны число a и основание q , то форма записи $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_q$ получается известным алгоритмом деления и записи остатков. Решение задач на эту тему общеизвестно. Это прямая задача на момент изучения систем счисления.

б) Если даны форма записи $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_q$ и основание q , то число a находится по известному равенству $a = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0$. Решение задач на эту тему также общеизвестно. Это обратная задача по восстановлению первоначального объекта.

В этом разделе возможны различные вариации. Например, если известна часть цифр в форме записи, то такая задача становится неопределенной.

Задача 1. Перечислите следующие числа $1m3_4$. Это неопределенная задача по первой классификации и стандартная по второй классификации.

В задачниках отсутствуют задачи такого типа, хотя они должны использоваться как пропедевтический материал к более сложным задачам ЕГЭ.

Чтобы ограничить диапазон, в котором нужно выбрать число a , на число a можно накладывать дополнительные условия.

в) Если известны число a и форма записи $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, то основание системы счисления находится решением уравнения $a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0 = a$ относительно неизвестной q . Так как учащиеся должны уметь решать произвольное уравнения второй степени и простейшие уравнения высших степеней, то в некоторых задачах форма записи не превышает либо трех цифр, либо среди цифр встречаются нулевые значения.

Задача 2. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 129 записывается как 1004. Укажите это основание.

Решение. $129 = 1004_q = 1 \cdot q^3 + 0 \cdot q^2 + 0 \cdot q + 4$, $125 = q^3$, $q = 5$.

Эта задача является определенной и стандартной.

Более сложный тип заданий представлен в следующей задаче.

Задача 3. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 22 оканчивается на 4.

Для учащегося в этой задаче основная трудность состоит в определении количества цифр для записи числа с новым основанием.

Из анализа цифр в тексте задачи следует, что основанием является число, которое больше либо равно 5.

Если бы в каноническом разложении числа участвовало слагаемое $a_2 \cdot 5^2$, где $a_2 \neq 0$, данное число должно быть больше либо равно 25, но оно равно 22, поэтому в разложении числа отсутствует такое слагаемое. Аналогично, в разложении не могут участвовать более высокие степени с основанием 5 и степени с большим основанием.

Разложение данного числа по степеням имеет вид $22 = a_1 q + 4$. Следовательно, $a_1 q = 18$. Из разложения числа 18 на множители следуют наборы: $a_1 = 1, q = 18$; $a_1 = 2, q = 9$; $a_1 = 3, q = 6$. Ответ: 6, 9, 18.

При увеличении данного числа в задаче количество цифр возрастает и оценку проводить становится сложнее.

Рассмотрим методический прием, который позволяет упростить оценку количества цифр в развернутой форме представления числа по степеням основания.

Фактически задачи на эту тему составляются таким образом, чтобы в уравнении $(a_n q^{n-1} + a_{n-1} q^{n-2} + \dots + a_1)q = a - a_0$ слагаемое $a_0 - a$ имело делители, тогда основание q определяется как один из множителей числа $a_0 - a$.

Задача 3. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 40 оканчивается на 4.

Решение.

Рассмотрим развернутое разложение $40 = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + 4$ или $36 = (a_n q^{n-1} + a_{n-1} q^{n-2} + \dots + a_1)q$. Учитывая значение $q \geq 5$, находим делители числа 36, т.е. 6, 9, 12, 18, 36 и испытываем их в качестве значений основания:

$$q = 6, 40 = 1 \cdot q^2 + 4, \quad q = 9, 40 = 4 \cdot q + 4, \quad q = 12, 40 = 3 \cdot q + 4,$$

$$q = 18, 40 = 2 \cdot q + 4, \quad q = 36, 40 = 1 \cdot q + 4.$$

Обратные задачи 2 и 3 являются неопределенными и полустандартными. Во-первых, решение задачи приводит к нескольким решениям, а во-вторых, первый шаг по определению количества цифр содержит элемент неопределенности количества цифр. Отметим, что учащийся, анализируя изученные ранее теоретические сведения и условие данной задачи, может выстроить последовательность действий по решению этой задачи.

Обратные стандартные и полустандартные задачи можно разделить на *простые*, осуществляемые в одно действие, и *сложные*, для выполнения которых нужно совершить несколько действий.

Примером сложной определенной задачи на использование обратной операции является следующая задача.

Задача 4. В системе счисления с основанием p выполнено сложение

$$33m5n + 2n443 = 55424.$$

Найдите основание p и цифру n , если m — максимальная цифра в этой системе счисления [16, с. 41].

Задача перестает быть определенной, если снять ограничение: m — максимальная цифра в этой системе счисления. Решение аналогичной задачи без сформулированного ограничения является важным этапом в обучении выделению существенных параметров.

Рассмотрим перспективные направления использования прямой и обратной операций для укрупнения дидактических единиц.

I. В школьном курсе математики изучается арифметическая прогрессия. Вначале вводятся основные понятия: первый член арифметической прогрессии a , разность арифметической прогрессии d , номер члена арифметической прогрессии n , затем находятся формулы для вычисления n -го члена прогрессии, т.е. a_n и суммы n первых членов арифметической прогрессии, т.е. S_n .

Зная первый член прогрессии и разность прогрессии, можно определить любой член прогрессии, т.е. задать всю прогрессию. В школьном учебнике не сформулированы обратные задачи следующего содержания или не оформлены в виде обратных задач.

Можно ли восстановить арифметическую прогрессию по следующим данным: а) d и a_n , б) a и a_n , в) a и S_n , г) d и S_n , д) a_n и S_n ?

Сколько членов арифметической прогрессии нужно задать, чтобы определить a и d ? Заметим, что три числа 2, 8, 20 без указания номеров членов арифметической прогрессии можно истолковать как некоторые члены прогрессии, в одном случае при $a = 2, d = 2$, в другом случае, при $a = 2, d = 6$.

После решения различных задач подобного типа естественным является подведение учащихся к систематизации этих задач по некоторым признакам, т.е. целесообразно составить следующую таблицу:

a_1	d	n	a_n	S_n
+	+	+	?	
+	+	+		?
+	+	?	+	
+	+	?		+
+	?	+	+	
+	?	+		+
?	+	+	+	
?	+	+		+

Здесь «+» означает, что значение величины задано, «?» — значение требуется найти.

Исходя из вопросов, поставленных выше, можно, например, сформулировать следующие задачи:

а) Как, зная три величины, найти четвертую?

б) Какие величины нужно знать для того, чтобы можно было найти остальные? Сколько величин нужно знать для того, чтобы можно было найти остальные?

Если не оставлять в таблице пустых ячеек, можно получить задачи с лишними данными и с противоречивыми данными.

II. Аналогичные обратные задачи можно сформулировать для геометрической прогрессии и привести классификацию задач с помощью таблицы.

III. Пусть дан отрезок. Операцией является нахождение середины отрезка. Обратная задача – восстановить отрезок, для которого эта точка является серединой.

IV. Дан треугольник.

а) Операция — нахождение середин сторон. Обратная задача — Восстановить треугольник, для которого три данные точки являются серединами сторон.

б) Операция — нахождение оснований высот в треугольнике. Обратная задача — Восстановить треугольник, для которого три данные точки являются основаниями высот.

в) Операция — нахождение точек пересечения биссектрис со сторонами треугольника. Обратная задача — Восстановить треугольник, для которого три данные точки являются точками пересечения биссектрис со сторонами треугольника.

V. В школьном курсе изучаются признаки равенства двух треугольников по основным трем элементам. Потом вычисляются вспомогательные элементы треугольника — длины медиан, высот и биссектрис. Целый класс обратных задач можно сформулировать, если в качестве основных элементов выбрать три медианы, две стороны и медиану и т.д.

VI. В правильной многоугольной пирамиде можно определить вспомогательные элементы через основные элементы пирамиды — длину стороны основания, высоту пирамиды и число сторон правильного многоугольника в основании. Снова получаем

класс обратных задач для перехода от вспомогательных элементов к основным элементам пирамиды [7, с. 82].

VII. а) Для функции $y = ax + b$ можно построить несколько точек. Сколько точек на плоскости необходимо взять, чтобы восстановить параметры a и b этой функции?

б) Для функции $y = ax^2 + bx + c$ можно построить несколько точек. Сколько точек на плоскости необходимо взять, чтобы восстановить параметры a , b и c ? Постепенно формируется метод восстановления многочлена Лежандра и многочлена Ньютона по заданной системе точек на плоскости.

VIII. Нахождение наследника по заданному первому члену некоторой зависимости и восстановление предка в биологии, математике [21].

IX. Эвристические задачи с использованием обратной операции. Обратные операции для композиции отображений рассмотрены в пособии [22].

На уроках математики и информатики часто проводятся многочисленные вычисления, которые заслоняют общую структуру задач по данной теме. Формирование навыков формулирования обратных задач и методов их решения является элементом культуры научного подхода к решению задачи системным методом. Поиск обратных задач выделяет операцию как главный элемент в данной проблеме и способствует развитию процедурного компонента образования.

§ 29. Разложение в транзитивный ряд и поиск рекурсии — специфика компьютерной математики

На экране компьютера можно построить одну и ту же геометрическую фигуру в различных местах экрана, используя различные начальные точки построения. Мы воспринимаем такие фигуры как равные, другими словами, как эквивалентные.

Геометрическую фигуру можно построить в экранной системе координат, в которой ось Oy направлена сверху вниз, а можно построить в декартовой системе координат, для которой ось Oy направлена снизу вверх. Такие фигуры мы также воспринимаем как эквивалентные.

Пусть геометрическая фигура определяется с помощью нескольких параметров. Зафиксировав все параметры, можно построить одну фигуру, а если все значения параметров увеличить в одно и то же число раз, то получим новую фигуру, подобную первоначальной. Для большинства задач эта фигура снова эквивалентна первой фигуре.

Таким образом, отношение эквивалентности является естественным отношением для множества изучаемых фигур. К сожалению, проверка того, что данное отношение является отношением эквивалентности, вызывает большие затруднения среди учащихся и студентов. Студенты и учителя также должны видеть за исполнением различных действий роль фундаментального понятия эквивалентности, которое иногда помогает решить задачу или объяснить возникшее затруднение. Выделим различные направления применения отношения эквивалентности в компьютерной математике.

Компьютерная математика имеет ряд особенностей:

1. Для построения четырехугольника на экране компьютера с помощью четырех отрезков нужно указать координаты четырех вершин, т.е. 8 параметров. Если нужно изменить длины сторон, то придется проводить сложные вычисления, чтобы получить нужный четырехугольник. Наиболее естественно ввести 5 геометрических параметров для четырехугольника, далее одну вершину четырехугольника расположить в заданной точке, и одну из сторон расположить на горизонтальной оси. Одной из особенностей компьютерного моделирования является установление соотношения между числом геометрических параметров и числом параметров при компьютерном моделировании.

2. Математическое моделирование, ориентированное под компьютерное моделирование, основывается на дискретном изменении параметров. Например, если нужно построить непрерывную линию, то нужно как предусмотреть дискретное изменение параметра, так и учесть дискретность значений функции.

3. Вычисление равных выражений a и $3a/3$ при одном и том же значении переменной a может привести к различным результатам, поэтому в компьютерной математике для отождествления

двух чисел требуется применять в некоторых случаях дополнительный алгоритм.

В этом случае мышление учащегося вступает в противоречие с базовым суждением о том, что каждый элемент равен сам себе, т.е. нарушается рефлексивное отношение, которое формировалось в течение нескольких лет обучения.

Кстати, мышление учащихся также испытывает естественное затруднение, когда мы увеличиваем значение переменной x на величину h , а записываем в виде равенства $x := x + h$.

4. Правдоподобные рассуждения в математике могут привести к отрицательному результату при компьютерной реализации решаемой задачи [21].

Сформулируем пятое направление о формировании навыков выстраивания этапов разложения задачи в транзитивный ряд подзадач. В действительности, эта проблема свойственна почти любому процессу познания, но в компьютерной математике она имеет ряд уточнений.

Компьютер редко применяется для выполнения одной операции. Хотя в некоторых случаях это удобно. Например, для сравнения двух чисел e^x и 3^3 . Если в выражении e^x основание степени увеличить до 3, а показатель степени уменьшить до ближайшего целого числа, то естественно сравнить это число с числом 3^3 .

Существует класс геометрических задач, в которых требуется с помощью компьютера построить некоторую фигуру, состоящую из большого числа простых геометрических объектов. Выстраивание алгоритма перехода от одного объекта к следующему в последовательности объектов является разложением в транзитивный ряд.

Задача разбивается не просто на более простые, а на ряд задач, связанных между собой таким образом, что данные, полученные на одном этапе, используются как начальные параметры для следующей задачи.

Содержательная задача по математическому и компьютерному моделированию должна включать разработку математической модели изучаемой проблемы на высоком уровне, причем

математическое моделирование должно быть изначально ориентировано на последующее компьютерное моделирование.

На примере большого количества разнообразных геометрических задач можно убедиться, что формулировка задачи осознается из визуального наблюдения представленного рисунка или воображаемого представления трансформации геометрической фигуры.

Оценивая всю фигуру в целом, учащийся пытается найти отправную точку, чтобы выстроить цепочки действий от нее до крайних точек, определяя функциональную зависимость. В этом случае учащийся разбивает поставленную задачу на ряд подзадач, каждая из которых цепляется за следующую. Результат решения очередной подзадачи служит отправной точкой последующей подзадачи.

Компьютерное моделирование в подавляющем большинстве задач использует многократное повторение операций. Поиск алгоритма направлен, прежде всего, на разложение в транзитивный ряд, но особой проблемой является нахождение той эвристики, которая позволяет вместо многократного повторения блока операторов вычисления математических операций и значений функции «зациклить этот процесс», но контролируя число его повторений. Математическое моделирование, ориентированное на рекурсию, — основное направление для последующего компьютерного моделирования в конкретной задаче.

Решение новой задачи основывается либо на поиске соответствующего аналога из числа знакомых задач, либо на разбиении новой задачи на несколько более простых задач и поиске новых способов решения более простых задач. Генерирование идей для поиска различных решений одной задачи по математике или по информатике представлено в [21].

Применим идею транзитивности в бинарном отношении для выяснения структуры разбиения математической задачи на ряд подзадач.

Пусть на множестве определено бинарное отношение ρ . Если элементы x и y связаны отношением ρ , то записывают в виде $x\rho y$.

Бинарное отношение называется транзитивным, если для любых элементов x, y, z из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$.

Переход от двух условий $x\rho y, y\rho z$ к заключению $x\rho z$, т.е. транзитивность бинарного отношения активно используется в школьном курсе математики при доказательстве равенств, при оценке чисел и выражений с помощью неравенств, при доказательстве равенств геометрических фигур и т.д. Востребованность использования транзитивности в информатике особенно ощущается при вычислении длины маршрута на графе. Если требуется решить задачу о поиске минимального маршрута на графе, соединяющего вершины x и w , то нужно выстроить транзитивную цепочку от x до w .

Даже сам процесс доказательства основывается на транзитивности логического вывода. Если из высказывания A следует высказывание B , а из высказывания B следует высказывание C , то из высказывания A следует высказывание C .

Обратный процесс, т.е. выстраивание двух условий $x\rho y, y\rho z$ для данного условия $x\rho z$ применяется значительно реже. Будем говорить в этом случае, что задача $x\rho z$ раскладывается в транзитивный ряд подзадач.

Например, чтобы доказать, что четырехугольник является квадратом при наложении некоторых сложных условий, задачу разбивают на два этапа. Вначале доказывают, что при выполнении некоторой части условий четырехугольник является параллелограммом, а затем, при выполнении другой части условий, доказываем, что параллелограмм является квадратом.

Метод доказательства сложной задачи сводится фактически к поиску математического понятия, которое занимает промежуточное положение между четырехугольником и квадратом.

Этот метод в большинстве случаев применяется, когда ведется поиск решения задачи, начиная с анализа заключения теоремы. Чтобы доказать, что из высказывания A следует высказывание C , ученик самостоятельно должен найти промежуточное высказывание B , которое приближает к доказательству. Иногда вставка одного промежуточного высказывания еще не обеспечивает разложения исходного высказывания в транзитивный ряд.

Попытка доказательства сложной теоремы $A \rightarrow C$ ведется в двух направлениях. При анализе утверждения C ведется поиск утверждения B , из которого следует C , т.е. выстраивается импликация $B \rightarrow C$, но импликация $A \rightarrow B$ еще не выстраивается. При анализе высказывания A постепенно возникает утверждение D , такое, что $A \rightarrow D$. Если высказывания D и B удастся соединить импликацией $D \rightarrow B$ или доказать их равносильность, т.е. $D \leftrightarrow B$, то высказывания выстраиваются в транзитивный ряд $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$.

Аналогичная ситуация возникает в математическом и компьютерном моделировании.

При изучении сложных объектов используются модели. Например, при компьютерном моделировании объектов геометрии Лобачевского используются модель Пуанкаре или модель Кели-Клейна. В морском судоходстве используются картографические проекции, которые являются моделями сферической геометрии.

Терминология в моделях подчинена терминологии на основном объекте. Прямые в модели Пуанкаре изображаются полуокружностями, ортогональными абсолюту, или вертикальными лучами, т.к. для них выполняются аксиомы геометрии Лобачевского. Именно эти полуокружности и лучи называются прямыми в модели.

Кратчайшей линией на географической карте называется образ кратчайшей линии на сфере, хотя учащиеся должны понимать, что кратчайшей линией на плоскости, соединяющей две точки, является отрезок. Сама кратчайшая линия на сфере часто называется сферическим отрезком. Измерение расстояний на географической карте осуществляется на основе проектирования соответствующего понятия со сферы. Новое понятие как бы складывается из двух транзитивных действий: определить кратчайшую на сфере и потом найти ее образ на карте. В этом случае имеем разложение сложного понятия в транзитивный ряд двух более простых понятий.

Хорошо успевающие учащиеся, изучающие элективный курс, довольно быстро привыкают к транзитивному оперированию понятием.

В компьютерном моделировании часто приходится повторять некоторое действие определенное число раз. Исходными данными

для очередного действия в большинстве случаев являются результаты вычислений на предыдущем этапе. Если действие нужно повторить многократно, или его нужно повторить, но заранее неизвестно число повторений, тогда разложение в транзитивный ряд заменяется применением рекурсии по сформулированному алгоритму.

Выделим в использовании транзитивности три направления:

1. Умение проверять, следует ли из двух высказываний $xру, урз$ высказывание $xрз$.
2. Умение расчленять высказывание (действие) $xрз$ на два более простых высказывания (действия) $xру, урз$.
3. Умение разработать алгоритм для применения рекурсии.

А) разложение математической задачи в транзитивный ряд подзадач.

На рис. 1 для произвольного треугольника ABC построена окружность ω , вписанная в треугольник. Затем построено три семейства окружностей $\omega_A, \omega_B, \omega_C$. Каждое семейство окружностей, убегающих в угол, касается соответствующих сторон угла. Одна из окружностей каждого семейства касается вписанной окружности.

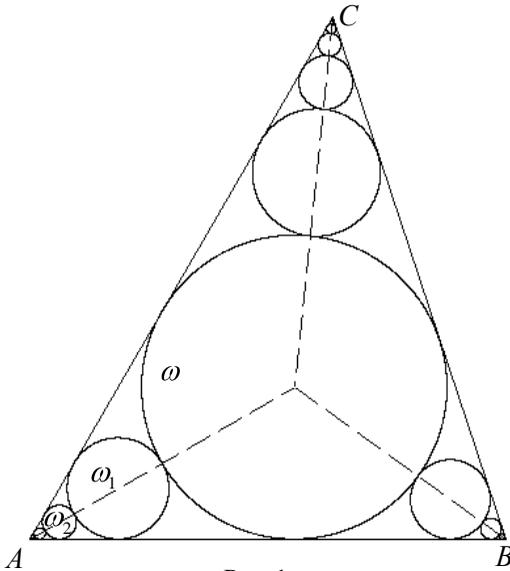


Рис. 1

Как смоделировать этот рисунок, если дан треугольник ABC ?
 Конкретизируем данную задачу.

Для треугольника ABC со сторонами b , c и углом $\angle BAC = \alpha$ требуется построить три семейства окружностей, убегающих в углы треугольника.

Будем считать, что каждое из семейств окружностей начинается от вписанной окружности.

Разбиваем исходную задачу $T \rightarrow \{\{\omega_i\}_A, \{\omega_j\}_B, \{\omega_k\}_C\}$ для одного семейства на две подзадачи.

а) $T \rightarrow \omega$ — Дан треугольник T . Требуется построить вписанную окружность ω .

б) $\omega \rightarrow \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ — Пусть построена вписанная окружность ω . Требуется продолжить построение семейства окружностей.

Вначале надо построить окружность ω_1 , касающуюся вписанной окружности ω и стороны угла.

Задачу можно снова разбить на две подзадачи, но так как число убегающих окружностей еще не определено (на экране компьютера мы видим быстрое убывание радиусов окружностей и визуальное узнавание окружностей заканчивается быстро), то нужно искать метод рекурсии, чтобы автоматизировать дальнейшие рассуждения, переходя к аналогиям.

Для треугольника ABC со сторонами b , c и углом α сторона BC равна

$$BC = a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}.$$

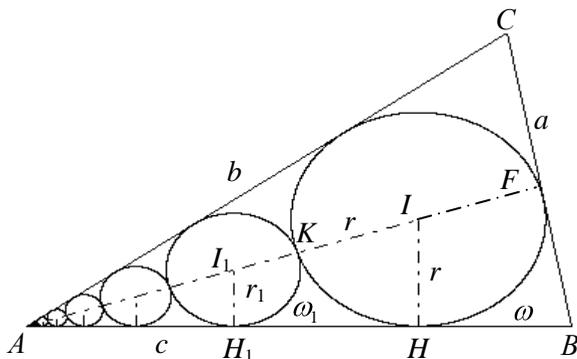


Рис. 2

Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен

$$r = \frac{bc \sin \alpha}{a + b + c}.$$

Из прямоугольного треугольника AHI определим длину отрезка AI

$$AI = r / \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Пусть биссектриса AI угла A пересекает окружность ω в точках K и F .

Окружность $\omega_1(I_1, r_1)$ с центром I_1 и радиусом r_1 подобна окружности $\omega(I, r)$ с центром I и радиусом r с коэффициентом подобия $k = \frac{AF}{AK} = \frac{AI - r}{AI + r}$ или $k = \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) / \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)$.

Радиус окружности ω_1 равен

$$r_1 = r \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) / \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right). \quad (1)$$

Следующая окружность ω_2 расположена по отношению к сторонам AB и AC и к окружности ω_1 так же, как окружность ω_1 расположена по отношению к сторонам AB и AC и к окружности ω . Следовательно, зависимость (1) можно распространить на последующие пары касающихся окружностей. В этот момент происходит понимание того, что вместо аналогичного выписывания радиусов можно поручить компьютеру применять аналогию, используя коэффициент сжатия.

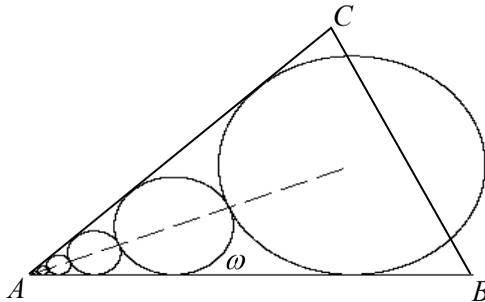


Рис. 3

Используя цикл для последующего уменьшения радиусов окружностей, можно быстро построить семейство окружностей, убегающих в угол. Напишите компьютерную программу построения рис. 1 и сравните с программой «**Окружности, убегающие в угол**».

Следует заметить, что выбор начальной точки для выстраивания транзитивного ряда имеет значение. Если в качестве начальной окружности семейства выбрана окружность ω , касающаяся двух сторон треугольника (рис. 3), то попытка построить все окружности семейства будет иногда обречена на неудачу.

В учебном пособии [25] приведены многочисленные примеры различных методов применения рекурсии в задачах на построение математического паркета.

В задачах на построение математического паркета переход к следующей фигуре, т.е. размножение фундаментальной области, выполняется методом параллельного переноса в двух направлениях, но реализуется это различными способами.

В методе наследственных свойств рекурсией является построение наследника на основе данного отношения и предшествующей фигуры [21].

Разбиение сформулированной проблемы в транзитивный ряд более простых подзадач свойственно любому процессу познания. В компьютерной математике процесс многократного применения транзитивности нужно подвести к использованию рекурсии.

В методической литературе разработка проекта по математике и информатике предусматривает выполнение ряда этапов. При решении новой задачи по математике и информатике также нужно выстроить последовательность этапов ее решения.

В этом исследовании предпринята попытка переформулировать выделение этапов решения конкретной задачи на языке, естественным образом связанном с математикой и информатикой.

§ 30. Раскрытие секрета математического фокуса

Способность преподавателя быстро составить задачу и молниеносно производить математические действия вызывает восторг у учащихся. Это можно использовать, чтобы заинтриговать

учащихся и направить их мыслительную деятельность на раскрытие метода таких вычислений. Раскрытие секрета математического фокуса формирует мотивацию поиска функциональной зависимости.

Если только призывать учащихся найти функциональную зависимость, то в большинстве случаев это не произойдет, т.к. необходимы определенные условия — создание интереса к проблеме и мотива к математическим действиям, формирование определенной теоретической базы и простейших навыков исследования.

Одним из способов формирования мотива к исследовательским действиям является метод дразнящего эксперимента. Каждому из шести учащихся предлагается решить по одной задаче. Заключается пари о том, что преподаватель устно проведет вычисление площадей шести различных криволинейных трапеций быстрее, чем шесть учащихся, вычисляя площади этих фигур по отдельности по одной задаче. Проводимое соревнование создает мотивацию среди учащихся к раскрытию секрета фокуса математической деятельности учителя.

Для криволинейных трапеций, ограниченных параболой, можно получить несколько простых и интересных числовых выражений, которые легко запоминаются при визуальном представлении этих фигур.

При вычислении площади фигуры, ограниченной двумя линиями, применяется следующий алгоритм:

1. Построить линии и найти точки пересечения линий.
2. Подставить в формулу для вычисления площади

$$S = \int_a^b f_2(x) - f_1(x) dx$$
 выражения функциональной зависимости

линий $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в определенной последовательности и указать пределы интегрирования.

3. Найти неопределенные интегралы от функций.
4. Подставить верхний и нижний пределы интегрирования и завершить вычисление площади.

Домашняя методическая подготовка преподавателя состоит в выделении наглядных параметров для двух линий, оперируя которыми в уме, можно быстро вычислить площадь фигуры.

В качестве двух линий выбирается парабола и прямая или две параболы.

Преподаватель выбирает три параметра, чтобы задать параболу и прямую линию, не параллельную ни одной из осей координат, а затем быстро в уме вычисляет площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой.

Соревнование имеет подготовительный этап, на котором преподаватель предлагает учащимся назвать любые три числа, не равные нулю. Чтобы дальнейшие вычисления были несложными, три числа лучше выбрать небольшими по модулю. Если названные числа оказались неравными, то можно ограничиться одной тройкой чисел, а если некоторые числа совпадают, то можно предложить учащимся дополнительно назвать тройки чисел.

Пусть учащиеся предложили числа 3, -4 и 5.

Для трех чисел преподаватель быстро составляет шесть различных задач.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $3x - 4y + 12 = 0$, $y = -\frac{3}{20}x^2 - x - 20$,

б) $3x + 5y - 15 = 0$, $y = -\frac{3}{20}x^2 - x - 20$,

в) $5x - 4y + 20 = 0$, $y = -\frac{5}{12}x^2 + x - 12$,

г) $5x + 3y - 15 = 0$, $y = -\frac{5}{12}x^2 + x - 12$,

д) $-4x + 5y + 20 = 0$, $y = -\frac{4}{15}x^2 - 8x + 15$,

е) $-4x + 3y + 12 = 0$, $y = -\frac{4}{15}x^2 - 8x + 15$.

На втором этапе учащиеся и преподаватель начинают одновременно вычисления площадей указанных фигур.

Пока учащиеся решают задачу по определенному алгоритму, учитель выписывает на листок бумаги ответы.

а) $\frac{3 \cdot (-4)^2}{6 \cdot 5} = \frac{8}{5}$, б) $\frac{3 \cdot 5^2}{6 \cdot |-4|} = \frac{25}{8}$, в) $\frac{5 \cdot (-4)^2}{6 \cdot 3} = \frac{40}{9}$,

$$\text{г) } \frac{5 \cdot 3^2}{6 \cdot |-4|} = \frac{15}{8}, \text{ д) } \frac{|-4| \cdot 5^2}{6 \cdot 3} = \frac{50}{9}, \text{ е) } \frac{|-4| \cdot 3^2}{6 \cdot 5} = \frac{6}{5}.$$

Запись ответов приведена в подробном виде. Многие преподаватели могут ее сократить и быстрее записать ответы.

Условия задач представлены в виде, удобном для построения графиков. Проводимые эксперименты показывают, что преподаватель завершает вычисления раньше учащихся. Некоторые учащиеся интересуются у преподавателя секретом вычисления, а другие готовы поспорить, что смогут самостоятельно открыть секрет, т.е. надо от конкретных чисел перейти к решению задач в общем виде.

Исследуем методическую основу, которую преподаватель применяет для подведения различных задач под одну формулу вычисления. Обозначим через (c, x_1, x_2) тройку чисел, предложенную учащимися для при- меров.

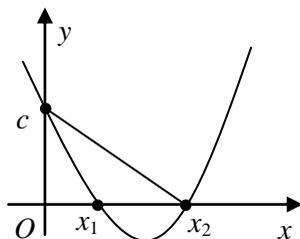


Рис. 1

Рассмотрим одну из парабол, которая пересекает ось Ox в точках $x = x_1$ и $x = x_2$, а ось Oy — в точке $y = c$ (рис. 1). Уравнение параболы имеет вид:

$$y = \frac{c}{x_1 x_2} (x - x_1)(x - x_2) \quad (1)$$

или

$$y = \frac{cx^2}{x_1 x_2} - \frac{cx}{x_2} - \frac{cx}{x_1} + c.$$

Учащиеся изучают квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ в течение четырех лет, с восьмого по одиннадцатый класс, но нужно констатировать, что параметризация этой линии, т.е. коэффициенты почти не иллюстрируются геометрически. Имеется единственная связь коэффициентов с координатами вершины параболы, но она не является взаимно однозначной, так как тройке коэффициентов сопоставляется пара координат вершины.

Предложенная параметризация (1) параболы является геометрической, т.к. все параметры c, x_1, x_2 визуальны иллюстрируются как координаты определенных точек пересечения с осями, хотя форма записи функции имеет свои недостатки. Во-первых, функция имеет более сложный вид записи с дробным коэффициентом, чем привычное выражение $y = ax^2 + bx + c$, а во-вторых, не всякая парабола пересекает ось Ox , поэтому не все параболы на плоскости можно задать таким уравнением. Таким образом, выделен класс парабол, для которых можно быстро составить уравнение и быстро вычислить площадь, ограниченную параболой и прямой, на основе мыслительных операций с геометрическими параметрами.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки пересечения параболы с осями координат, т.е. через точки $(x_2, 0)$ и $(0, c)$.

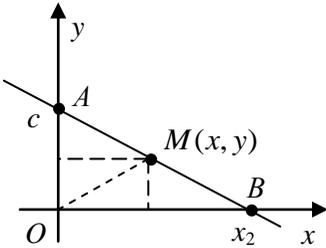


Рис. 2

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$ на прямой AB . Для площадей треугольников AOM , OMB и OBA выполняется равенство:

$$S_{\Delta AOM} + S_{\Delta MOB} - S_{\Delta AOB} = 0 \quad (2)$$

или

$$cx + x_2y - cx_2 = 0. \quad (3)$$

Этот вывод справедлив только для случая, когда величины c, x_2, x, y являются длинами отрезков, а значит, положительными числами, но для учителя, представляющего этот рисунок визуальны, это уравнение составляется быстро. Для распространения этого частного случая на остальные случаи нужно либо расширить

Преподаватели, знакомые с уравнением прямой линии в отрезках $\frac{x}{x_2} + \frac{y}{c} = 1$, могут переписать это уравнение в виде $cx + x_2y - cx_2 = 0$.

Приведем простой геометрический вывод последнего уравнения без ссылки на уравнение прямой в отрезках (рис. 2).

понятие площади, используя отрицательные числа, либо изменить равенство (2) для других расположений точек A , B и M и, используя модули чисел, получить снова равенство (3).

Для преподавателя полный вывод уравнения не является обязательным, т.к. если уравнение прямой составлено для двух точек, то оно справедливо и для остальных точек.

Существует третий способ, который избавляет от перечисления других расположений точек.

В школьных учебниках геометрии сформулированы два важнейших утверждения. Через две точки проходит единственная прямая. Всякое уравнение первой степени определяет некоторую прямую на плоскости. Итак, равенство (3) справедливо для координат точек A и B , поэтому оно задает прямую AB .

Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой:

$$\begin{aligned}
 S &= \left| \int_0^{x_2} \left(c - \frac{cx}{x_2} - \left(\frac{cx^2}{x_1x_2} - \frac{cx}{x_2} - \frac{cx}{x_1} + c \right) \right) dx \right| = \left| \int_0^{x_2} \left(-\frac{cx^2}{x_1x_2} + \frac{cx}{x_1} \right) dx \right| = \\
 &= \left| \left(-\frac{cx^3}{3x_1x_2} + \frac{cx^2}{2x_1} \right) \Big|_0^{x_2} \right| = \left| -\frac{cx_2^2}{3x_1} + \frac{cx_2^2}{2x_1} \right| = \left| \frac{cx_2^2}{6x_1} \right|, \quad S = \left| \frac{cx_2^2}{6x_1} \right|.
 \end{aligned}$$

Наличие модуля при вычислении интеграла объясняется тем, что заранее неизвестно, какая из линий (прямая или парабола) ограничивает полученную плоскую фигуру сверху.

В формуле площади фигуры используются только геометрические параметры, что позволяет быстро вычислять ее площадь. Быстрота счета преподавателя объясняется тем, что он использует

известную ему формулу $S = \frac{cx_2^2}{6|x_1|}$, а учащиеся вычисляют

площадь по приведенному алгоритму.

Если данные параметры (c, x_1, x_2) различны, то можно составить шесть различных задач, меняя геометрический смысл этих параметров.

Следует отметить, что при решении предложенных задач с конкретными числами учащиеся визуально видят на рисунке точки с конкретными координатами. Рисунок создает мотивацию к обозначению координат точек пересечения переменными

и повторному решению этой же задачи с введенными параметрами. Переход от конкретных данных к поиску функциональной зависимости происходит без нажима со стороны преподавателя, т.е. естественным путем в связи с попыткой раскрытия секрета фокуса.

Учащиеся стремятся не только разгадать секрет фокуса, но продемонстрировать его овладение перед другими учащимися. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить показать фокус в параллельном классе школы.

Демонстрация фокуса не должна превращаться в простой пересказ функциональной зависимости, открытой кем-то ранее. Учащийся должен самостоятельно открыть несколько простых зависимостей. Но простую зависимость другие учащиеся могут

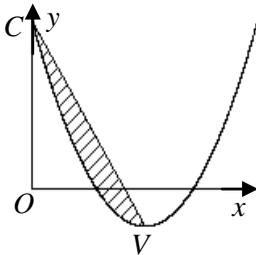


Рис. 3

быстро разгадать или при вычислении площади совершат математические действия быстрее, чем сам «фокусник». В этом случае простую зависимость нужно немного зашифровать, т.е. «завернуть конфетку в бумажку». Подготовка ученика к проведению фокуса является важным воспитательным моментом со стороны преподавателя, обучает ученика элементам педагогического мастерства.

Рассмотрим несколько примеров, использование параметров в которых позволяет быстро вычислять площади криволинейных фигур.

а) Для параболы $y = ax^2 + bx + c$ найдем координаты вершины параболы $V(-b/(2a), c - b^2/(4a))$.

Парабола пересекает ось Oy в точке $C(0, c)$.

Уравнение прямой CV : $y = \frac{b}{2}x + c$.

Площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой CV (рис. 3), равна

$$S = \left| \int_0^{-\frac{b}{2a}} \frac{b}{2}x + c - (ax^2 + bx + c) dx \right| = \frac{|b^3|}{48a^2}.$$

Итак, для трех чисел a, b, c составляем уравнение параболы, уравнение прямой VC , проходящей через вершину параболы и точку пересечения параболы с осью Oy , и быстро вычисляем площадь искомой фигуры.

б) Пусть ось параболы совпадает с осью Oy , вершина параболы находится в начале координат (рис. 4). Если парабола проходит через точку $B(m, n)$, где $m > 0, n > 0$, то парабола имеет уравнение:

$$y = \frac{n}{m^2} x^2.$$

Площадь криволинейного треугольника OAB , ограниченного параболой, осью Ox и вертикальной прямой $x = m$, равна

$$S_{\text{крив.}\Delta OAB} = \int_0^m \frac{n}{m^2} x^2 dx = \frac{nx^3}{m^2} \Big|_0^m = \frac{mn}{3}.$$

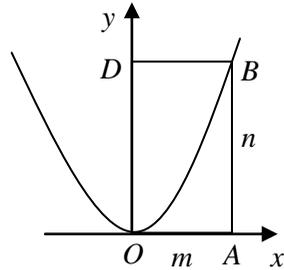


Рис. 4

Площадь криволинейного треугольника OAB равна трети от площади прямоугольника $OABD$, сторона которого расположена на оси параболы.

Если построить аналогичную параболу с вершиной в точке B , с осью на прямой BA и ветви которой направлены вниз, то в прямоугольнике $OABD$ получим криволинейный треугольник BDO с такой же площадью (рис. 5).

Площадь фигуры, ограниченной двумя параболой, равна трети от площади прямоугольника.

Парабола $y = \frac{n}{m^2} x^2$ пересекает отрезок AD в точке K с абсциссой $x_K = \frac{\sqrt{5}-1}{2} m$. Проверьте,

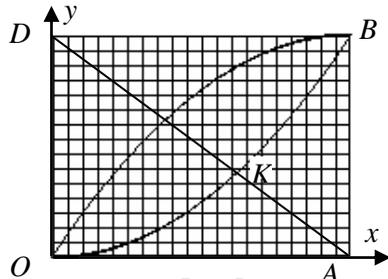


Рис. 5

что точка K делит отрезок DA в золотом отношении, т.е.

$$\frac{DK}{KA} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Площадь криволинейной фигуры можно приближенно вычислить, если наложить прямоугольную сетку. Вначале подсчитаем число квадратов, которые целиком размещены в фигуре, затем выделим пары квадратов, группируя которые, можно получить площадь, приближенно равную одному квадрату. Сравните экспериментально на рис. 5 площадь криволинейной фигуры с площадью прямоугольника.

Третий способ определения площади фигуры, ограниченной двумя параболами:

$$y = \frac{n}{m^2} x^2, \quad y = -\frac{n}{m^2} x^2 + \frac{2nx}{m},$$

использует непосредственное вычисление определенного интеграла

$$\int_0^m \left(-\frac{n}{m^2} x^2 + \frac{2nx}{m} - \frac{n}{m^2} x^2 \right) dx = \frac{mn}{3}.$$

В этой задаче используется два параметра, и площадь фигуры вычисляется моментально.

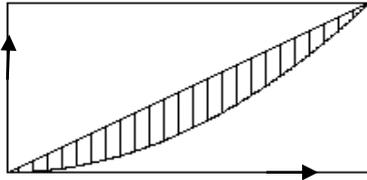


Рис. 6

в) Диагональ прямоугольника делит криволинейный двуугольник, образованный двумя параболлами, на две равные части, поэтому площадь фигуры, ограниченной параболой и диагональю прямоугольника, равна одной шестой от площади прямоугольника (рис. 6). Этот факт легко запоминается при визуальном представлении соответствующего чертежа и позволяет быстро как составлять условия задач, так и вычислять площадь.

г) Для параболы выполняется оптическое свойство (рис. 7). Лучи, выходящие из фокуса F , после отражения от параболы (по закону угол падения равен углу отражения) направлены параллельным пучком вдоль оси параболы. Напишите программу построения бильярдных траекторий для параболы и сравните ее с программой «Математический бильярд для параболы».

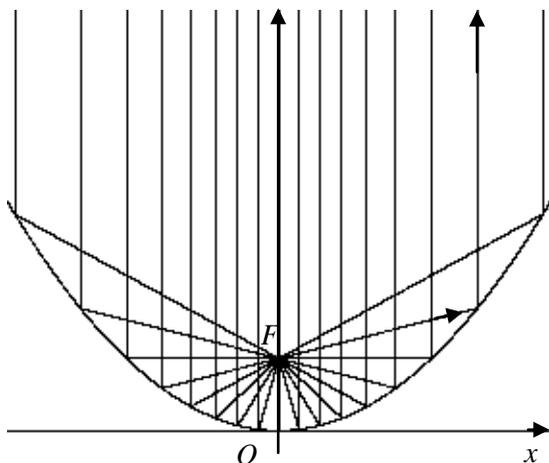


Рис. 7

Параболу можно определить геометрически, как множество точек, равноудаленных от данной точки F , называемой фокусом, и от данной прямой l , называемой директрисой (рис. 8).

Если начало координат совпадает с вершиной параболы, полуось Oy направлена вдоль оси параболы и не пересекает директрису, то парабола имеет уравнение $x^2 = 2py$. Величина p называется *фокальным параметром* параболы и имеет простой геометрический смысл — это расстояние от фокуса F до директрисы l . Для фокуса получаем координаты $F(0, p/2)$.

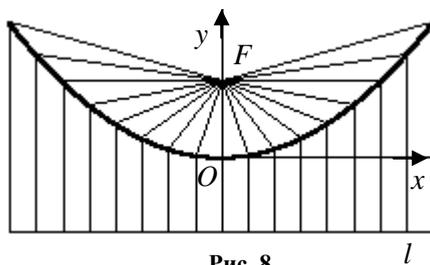


Рис. 8

Если через фокус параболы провести хорду MN параболы, перпендикулярную оси параболы, то концевые точки параболы имеют координаты $M(-p, p/2), N(p, p/2)$. Длина хорды MN равна $2p$ (рис. 9). Получаем второе геометрическое значение фокального параметра параболы. Фокальный параметр параболы равен половине длины хорды, проходящей через фокус параболы перпендикулярно ее оси.

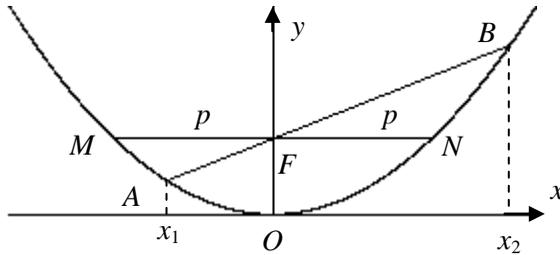


Рис. 9

Рассмотрим произвольную хорду AB параболы, проходящую через фокус параболы. Пусть $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, где $x_1^2 = 2py_1$, $x_2^2 = 2py_2$. Векторы $\overline{FA}(x_1, y_1 - p/2)$, $\overline{FB}(x_2, y_2 - p/2)$ — коллинеарные, поэтому

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1 - p/2}{y_2 - p/2} \quad \text{или} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2/2p - p/2}{x_2^2/2p - p/2}.$$

Абсциссы концевых точек произвольной хорды, проходящей через фокус параболы, удовлетворяют равенству $x_1x_2 = -p^2$, причем произведение не зависит от наклона хорды.

Ординаты концевых точек произвольной хорды, проходящей через фокус параболы, удовлетворяют равенству $y_1y_2 = p^2/4$, причем произведение не зависит от наклона хорды.

Уравнение прямой AF , проходящей через фокус, имеет вид:

$$y = \frac{(x_1^2 - p^2)}{2px_1}x + \frac{p}{2}.$$

Площадь области, ограниченной параболой и хордой AB , равна

$$S = \left| \frac{p^3}{4x_1} + \frac{py_1}{4} + \frac{p^5}{12y_1^3} + \frac{y_1^3}{12p} \right| = \left| \frac{p(x_2 - x_1)}{4} + \frac{x_2^3 - x_1^3}{12p} \right|.$$

После формирования понятия фокального параметра параболы можно выяснить связь коэффициентов в уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$ с геометрическими величинами.

Параметр c является ординатой точки пересечения параболы и вертикальной оси Oy .

Производная функции, определяющей параболу, равна

$$y'(x) = 2ax + b, \text{ поэтому } b = y'(0).$$

Параметр b равен тангенсу угла наклона касательной к параболе в точке пересечения параболы с вертикальной осью Oy .

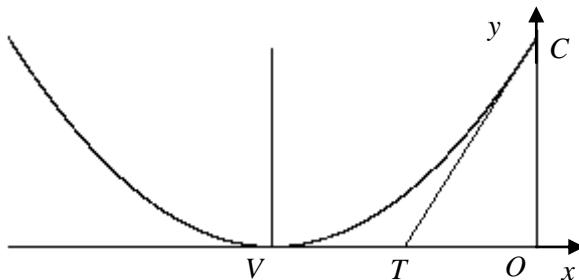


Рис. 10

Сравнивая уравнения парабол $y = ax^2$ и $x^2 = 2py$, получаем $a = \frac{1}{2p}$, где величина $2p$ равна длине хорды параболы, проходящей через фокус параболы, перпендикулярно оси параболы.

д) Рассмотрим параболу $y = a(x - x_v)^2$, вершина которой $V(x_v, 0)$ расположена на оси Ox . Парабола пересекает ось Oy в точке $C(0, ax_v^2)$. Угловым коэффициентом касательной, проведенной к параболе в точке C , равен $-2ax_v$. Пусть касательная пересекает ось Ox в точке $T(x_T, 0)$. Из прямоугольного треугольника OTC получаем $x_T = x_v / 2$.

Доказано свойство. Касательная, проведенная к параболе $y = a(x - x_v)^2$ в точке C , делит отрезок OV пополам.

Это свойство можно доказать другим способом. Составим уравнение касательной к параболе в точке C :

$$y = -2ax_v x + c.$$

Найдем координаты точки T на касательной при условии $y = 0$, т.е. $T(x_v / 2, 0)$.

Площадь криволинейного треугольника VCT равна

$$S_{\Delta VTC} = S_{\Delta VOC} - S_{\Delta TOC} = \frac{1}{3}OV \cdot OC - \frac{1}{2}OT \cdot OC.$$

$$S_{\Delta VTC} = \left| \frac{1}{3}x_V ax_V^2 - \frac{1}{2} \frac{x_V}{2} ax_V^2 \right|, S_{\Delta VTC} = \frac{|ax_V^2|}{12}.$$

После геометрического метода вычисления площади криволинейного треугольника VCT полезно применить другой способ: с помощью вычисления определенного интеграла.

Для составления математического фокуса загадывается пара чисел a и x_V . Для предложенных параметров составляются уравнение параболы и уравнения прямых VT и TC . Требуется определить площадь криволинейного треугольника VCT .

§ 31. Геометрические задачи с игровой костью

Игральная кость (ИК) применяется в детских играх для определения числа шагов продвижения по маршруту карты. В этом случае ИК способствует развитию навыков устного счета.

Второе направление применения ИК — иллюстрация задач теории вероятностей. При каждом бросании ИК вероятность выпадения определенного числа очков одна и та же, поэтому задачи по определению вероятности некоторого события с ИК можно решать различными способами — по формуле Бернулли и по определению вероятности.

Третье важное применение ИК — развивающие задачи по формированию пространственного воображения.

Четвертое направление связано с интегративными задачами по установлению межпредметных связей: в математике и физике — по определению центра тяжести и моментов ИК, в математике и информатике — на построение изображений игровой кости в заданной проекции.

Задачи с игровой костью способствуют развитию пространственного воображения. Они формируют умение мысленно представить различные положения предмета и изменения его положения относительно различных точек отсчета, умение привязать

стандартное представление расположения очков к частично представленному изображению по трем видимым граням, умение оперировать преобразованиями куба и логически обосновывать нахождение образа грани или прообраза грани, развивают навыки быстрого устного счета.

У точно изготовленной игральной кости (ИК) центр тяжести должен находиться в центре куба.

Пусть число очков на ИК обозначено нанесением краски на гранях в виде кругов. Будем считать, что толщина краски для всех кругов одинакова, тогда масса краски на каждой грани должна быть одинаковой и поэтому площади кругов в каждой грани должны быть равными. Если R_1 — радиус круга в грани, содержащей один круг, и R_n — радиус круга в грани, содержащей n кругов, то $\pi R_1^2 = \pi n R_n^2$, поэтому

$$R_n = \frac{R_1}{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

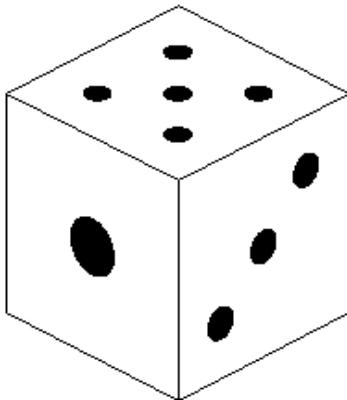


Рис. 1

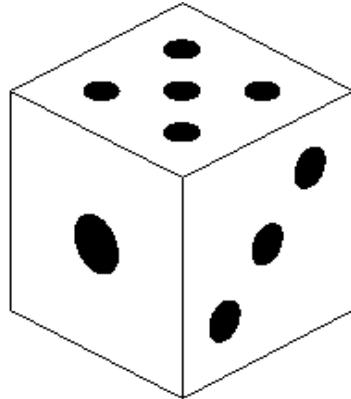


Рис. 2

На рис. 1 построены круги на гранях с учетом зависимости (1).

Краска на гранях стирается, поэтому наиболее естественно для обозначения числа очков сделать углубления в виде шарового сегмента и нанести краску. Чтобы центр тяжести куба не сместился из центра куба, массы вырезанных шаровых сегментов на каждой

грани должны быть равны. Будем считать, что углубления в гранях вырезаются в форме полушара и масса краски не оказывает влияния на расчеты, тогда из равенства

$$\frac{2\pi R_1^3}{3} = n \frac{2\pi R_n^3}{3}$$

получаем условие на радиусы

$$R_n = \frac{R_1}{\sqrt[3]{n}}. \quad (2)$$

На рис. 2 построено изображение игральной кости с соблюдением размеров по формуле (2). Размеры радиусов полусфер на правых и верхних гранях двух кубов визуально различаются.

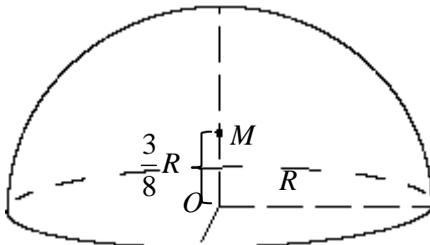


Рис. 3

Центр тяжести полушара (рис. 3) расположен на оси симметрии полушара и отстоит от центра основания полушара на расстоянии $3R/8$ (в конце этого пункта приведены формулы вычисления центра тяжести для полушара и более общей фигуры — шарового сегмента). Радиусы

полушаров, расположенных на двух противоположных гранях, — различные. Если найти центр тяжести полушара, расположенного на передней грани, и центр тяжести шести полукругов, расположенных на задней грани, то центры тяжести этих систем шаров не являются симметричными точками относительно центра шара. Аналогично для любой другой пары противоположных граней. При указанном способе вырезания полушаров центр тяжести игральной кости не расположен в центре куба.

Перейдем к проблеме нумерации граней.

Свойство 1. Сумма очков на противоположных гранях куба равна 7.

Если известно число очков на какой-то видимой грани, то это свойство позволяет быстро и однозначно восстановить число очков на противоположной грани. В большинстве случаев видны

три грани куба, поэтому число очков на каждой невидимой грани определяется однозначно.

Расположим куб так, чтобы на передней грани оказалось одно очко, тогда на задней грани окажется 6 очков.

На одной из четырех остальных гранях находится 3 очка. Повернем куб вокруг оси, проходящей через центры передней и задней граней, так, чтобы 3 очка оказались на правой грани. На левой боковой грани окажется 4 очка.

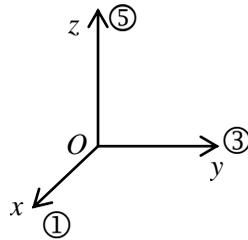


Рис. 4

На верхней грани куба окажется 5 очков или 2 очка. Если на верхней грани окажется 5 очков, то нумерацию игральной кости будем называть правой. Изучение систем координат в школьном курсе математики происходило в следующем порядке: числовая ось x , декартова система координат на плоскости $xу$, декартова система координат в пространстве $xуz$. Запоминание расположения осей в правой системе координат связывают с движением правого винта, т.е. при повороте винта от оси Ox к оси Oy по наименьшему углу направление ввинчивания винта указывает направление оси Oz .

Правая система нумерации ИК образована по следующему правилу: для положительных направлений осей выбраны нечетные числа, и эти числа увеличиваются при переходе от оси x к оси y и при переходе от оси y к оси z . (рис. 4). Расположение очков на гранях ИК, представленное на рис. 2, будем называть левой нумерацией очков на ИК.

Итак, обосновано, что существует только две нумерации ИК, удовлетворяющих свойству 1. Будем в дальнейшем предполагать, что на игральной кости установлена правая нумерация.

Кубическая форма игральной кости удобна тем, что обеспечивает полное равноправие всех граней. Такой многогранник легко изготовить даже в домашних условиях. Он легко перекачивается по сравнению с правильным тетраэдром, а другие правильные многогранники (октаэдр, икосаэдр и додекаэдр) быстро укатываются от места падения.

Правую нумерацию иногда запоминают по трем следующим граням (рис. 5). Обход граней с числом очков 1, 2 и 3 совершается

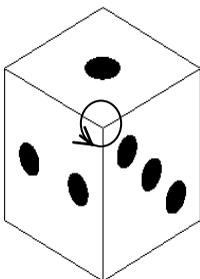


Рис. 5

вокруг вершины куба против направления вращения часовой стрелки.

Игральная кость иногда располагается так, что видны очки только на двух гранях. Как определить число очков на правой боковой грани, если видны только передняя и верхняя грани?

На рис. 6 видно на верхней грани 5 очков, а на передней грани 4 очка.

Первый способ — методом поворота куба в исходное состояние, представленное на рис. 2.

Анализируя число очков на передней грани, делаем вывод о том, что на противоположной, задней грани расположено 3 очка. Удерживая в памяти нечетные числа 5, 3, пытаемся определить

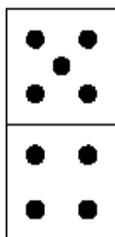


Рис. 6

положение грани с одним очком. Если повернуть куб вокруг оси, проходящей через центр верхней и нижней граней в направлении вращения часовой стрелки, то грань, содержащая 3 очка, окажется правой гранью. Вспоминая комбинацию на рис. 2, получаем, что на передней грани окажется 1 очко. Возвращая куб в первоначальное положение, получаем, что на правой грани расположено 1 очко.

Второй способ — используя правую систему координат. Мы снова предполагаем, что зритель находится напротив грани, где изображены 4 очка. На задней грани расположено 3 очка, поэтому направляем из центра к задней грани ось

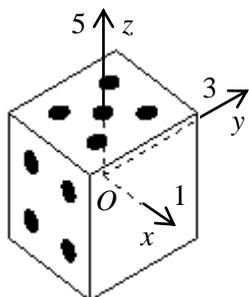


Рис. 7

Oy (рис. 7). На верхней грани расположено 5 очков, поэтому направляем из центра к верхней грани ось Oz . Строим ось Ox для правой системы координат, которая и укажет число очков в правой боковой грани. Основным навык в этом методе — определить направление третьей оси правой системы координат. Вместо оперирования с переменными x , y , z можно использовать оперирование с осями (в виде стрелок) и числами 1, 3, 5.

Третий способ — вращение куба вокруг диагонали куба или оперирование с числами 1, 2, 3 в вершине куба. Анализируя число очков на видимых гранях, находим вершину, в которой находятся числа 1, 2, 3. В действительности определим только два из трех указанных чисел. На рис. 8 расположение чисел следующее: 2 расположено на нижней грани, а 3 — на задней грани. Обход вершины должен совершаться в следующем порядке: 1, 2, 3 в направлении, противоположном вращению часовой стрелки. Определяем положение недостающего числа на грани.

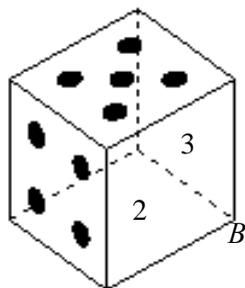


Рис. 8

Четвертый способ — оперирование с развертками куба.

Если мысленное оперирование поворотами куба затруднено, то можно привлечь наглядное пособие — развертку куба. Для первоначального положения куба с правой ориентацией, представленного на рис. 2, выполняется развертка. Для быстрого оперирования числами очков на развертке лучше изображать не расположение кругов, а цифры, обозначающие число очков на гранях (рис. 9).

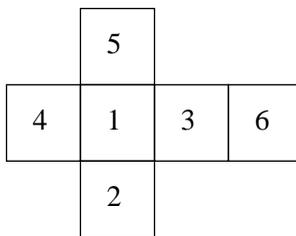


Рис. 9

При повороте куба вокруг оси, проходящей через центры верхнего и нижнего основания, боковые грани вращаются, а на развертке происходит циклическая перестановка цифр (рис. 10).

Нужно приготовить аналогичные развертки. Во второй развертке на верхней и нижней гранях расположена пара чисел 4 и 3 (рис. 11), а в третьей развертке — также пара чисел 6 и 1 (рис. 12).

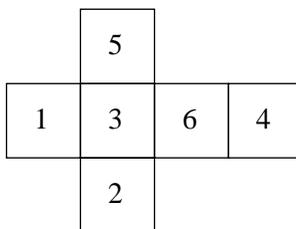


Рис. 10

Сформулируем правило выбора развертки. Определяем ось вращения, которую пересекают две противоположные грани куба, и выбираем развертку, в которой в первом и в третьем рядах расположены соответствующие грани. Во втором ряду развертки определяем слева и справа от видимой передней грани необходимое число очков.

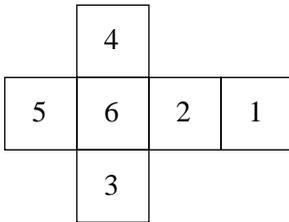


Рис. 11

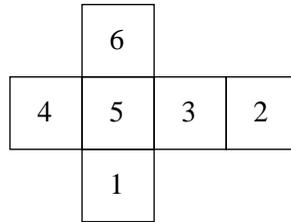


Рис. 12

Мысленное оперирование с кубом мы свели к более простому знаковому образу, к развертке куба, которую нужно предварительно приготовить.

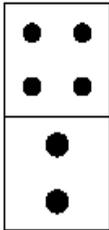


Рис. 13

4.1. Для закрепления различных методов оперирования пространственными объектами решите аналогичную задачу об определении числа очков на правой грани игральной кости с правой ориентацией, представленной на рис. 13.

4.2. На рис. 14 два куба соприкасаются по граням. Найдите сумму очков на соприкасающихся гранях.

4.3. На рис. 15 два куба имеют общее ребро и указано число очков на некоторых гранях. Определите сумму очков на четырех гранях этих кубов, проходящих через общее ребро кубов.

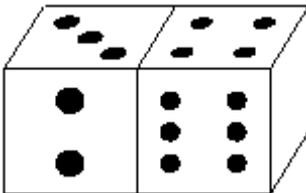


Рис. 14

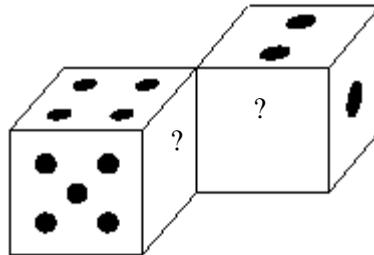


Рис. 15

4.4. Дан куб с ребром, равным a , и с левой маркировкой числа очков на гранях и дана прямоугольная сетка, в которой сторона наименьшего квадрата также равна a . (рис. 16).

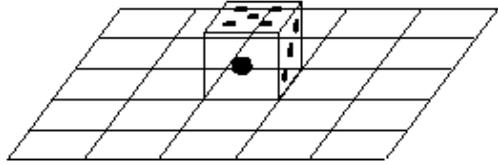


Рис. 16

Куб поставлен в центр прямоугольной сетки. Перекатыванием куба по сетке на один шаг назовем поворот куба вокруг ребра нижнего

основания на угол 90° таким образом, чтобы куб коснулся сетки другой гранью. На рис. 17 отмечено число очков на нижней грани

в первоначальном положении и число очков после одного перекатывания. Можно считать, что куб оставляет на квадратах сетки след числа очков нижнего основания. Сколько таких перекатываний на один шаг из первоначального положения можно совершить по сетке? Расставьте следы, т.е. число очков, на тех квадратах, в которые можно перекатить куб из центрального квадрата на один шаг.

		2		
		1		

Рис. 17

Введем новое понятие. Расстоянием между двумя клетками прямоугольной сетки назовем минимальное число перекатываний, которое необходимо совершить, чтобы перекатить куб с одной клетки на другую клетку. Между двумя клетками может иногда существовать несколько различных маршрутов одинаковой длины. Например, если общими точками двух квадратов является одна вершина, то существует ровно два маршрута для перехода из одной клетки в другую. Расставьте следы куба при перекатываниях на два шага, на три шага. Некоторые квадраты разделите диагоналями на два треугольника и запишите следы для различных маршрутов.

Определим положение центра тяжести шарового сегмента с высотой h и радиусом R (рис. 18).

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{m} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$z_c = \frac{1}{m} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

— координаты центра тяжести геометрического тела V с плотностью $\rho(x, y, z)$ и массой m .

Для геометрического тела с постоянной плотностью формулы упрощаются

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_V x dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_V y dx dy dz, \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz.$$

В этих формулах V означает как величину объема, так и геометрическое тело, по которому ведется интегрирование.

Шаровой сегмент имеет ось вращения, поэтому центр тяжести расположен на этой оси.

Шаровой сегмент (рис. 18) является цилиндрическим телом, ограниченным снизу костью $z = R - h$, сверху — полусферой $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а боковая цилиндрическая поверхность вырождается в окружность радиуса $\sqrt{2Rh - h^2}$.

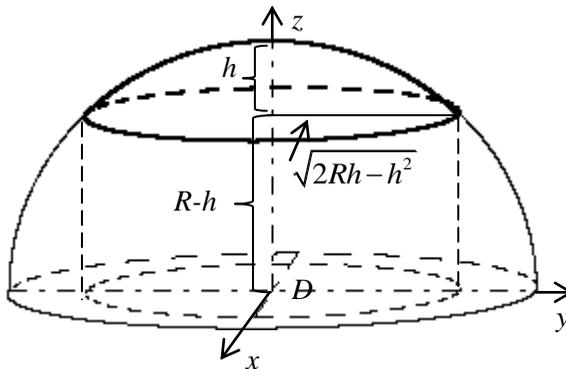


Рис. 18

Пусть D — проекция шарового сегмента на плоскость Oxy .
Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V z dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{R-h}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z dz = \iint_D \frac{z^2}{2} \Big|_{R-h}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy = \\
 &= \frac{1}{2} \iint_D [R^2 - x^2 - y^2 - (R-h)^2] dx dy = \frac{1}{2} \iint_D 2Rh - h^2 - x^2 - y^2 dx dy.
 \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \iint_D (2Rh - h^2 - r^2) r d\varphi dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} [(2Rh - h^2)r - r^3] dr = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(2Rh - h^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} d\varphi = \pi \left(r^2 \frac{2(2Rh - h^2) - r^2}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2Rh-h^2}}. \\
 I &= \frac{\pi h^2 (2R - h)^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим второй способ вычисления этого интеграла.

Пусть σ — сечение шарового сегмента плоскостью (рис. 19), перпендикулярной оси Oz , лежащей на высоте z , причем $R - h < z < R$. Это сечение является кругом радиуса $\sqrt{R^2 - z^2}$.

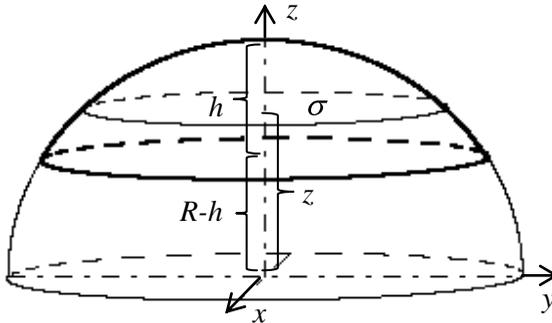


Рис. 19

$$I = \iiint_V z dx dy dz = \int_{R-h}^R z dz \iint_{\sigma} dx dy = \pi \int_{R-h}^R R^2 z - z^3 dz =$$

$$= \pi \left(\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right)_{R-h}^R = \frac{\pi}{4} (2R^2 z^2 - z^4)_{R-h}^R. I = \frac{\pi h^2 (2R-h)^2}{4}.$$

Объем шарового сегмента равен $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$.

Апplikата центра тяжести шарового сегмента равна

$$z_c = \frac{\pi h^2 (2R-h)^2}{4} : \frac{\pi h^2 (3R-h)}{3}, \quad z_c = \frac{3(2R-h)^2}{4(3R-h)}.$$

Найдем расстояние от центра тяжести до плоскости основания шарового сегмента:

$$d = z_c - (R-h), \quad d = \frac{h(4R-h)}{4(3R-h)}.$$

Если $h = R$, т.е. шаровой сегмент является полушаром, то $d = \frac{3}{8}R$.

Задание для самостоятельного исследования.

1. Продолжите исследование по определению центра тяжести и моментов инерции игральной кости.
2. Разработайте компьютерные программы построения изображений куба с соблюдением размеров вырезаемых углублений. Для вырезаемых углублений изобразите основания сферических полукругов, т.е. круги на гранях куба.

Справочный материал по элементарной математике

1. Таблица квадратов чисел.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881
11	12100	12321	12544	12769	12996	13225	13456	13689	13924	14161
12	14400	14641	14884	15129	15376	15625	15876	16129	16384	16641
13	16900	17161	17424	17689	17956	18225	18496	18769	19044	19321
14	19600	19881	20164	20449	20736	21025	21316	21609	21904	22201
15	22500	22801	23104	23409	23716	24025	24336	24649	24964	25281

Извлечение квадратного корня по таблице.

Например, $\sqrt{8} = \sqrt{8,00} \approx \sqrt{7,84} = 2,8$, поэтому $\sqrt{8} \approx 2,8$.

$\sqrt{80} = \sqrt{80,00} \approx \sqrt{79,21} = 8,9$, поэтому $\sqrt{80} \approx 8,9$.

2. Таблица простых чисел. Число 1 — не простое и не составное.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997
1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163
1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249
1259	1277	1279	1283	1289	1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321
1327	1361	1367	1373	1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439
1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601

1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693
1697	1699	1709	1721	1723	1733	1741	1747	1753	1759	1777	1783
1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877
1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053	2063	2069

3. Формулы сокращенного умножения и комбинаторика.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{—}$$

бином Ньютона.

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ — факториал числа n .

$P_n = n!$ — число перестановок из n элементов.

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ — число размещений из n элементов по k элементов. Число размещений с повторениями из n элементов по k равно $\overline{A_n^k} = n^k$.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k .

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad C_n^{k+1} = C_n^k \frac{n-k}{k+1}, \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Для любых конечных множеств A, B, C выполняются равенства

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \quad \text{где } |A| \text{ — число элементов множества } A.$$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ — формула перекрытий, формула включения и исключения.

4. Прогрессии.

$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ — арифметическая прогрессия. $a_{k+1} = a_k + d$ для любого номера $k \geq 1$. d — разность арифметической прогрессии. $a_n = a_1 + d(n-1)$ — n -й член прогрессии.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]}{2} n \quad \text{— сумма } n \text{ первых членов}$$

прогрессии.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ — геометрическая прогрессия. $a_{k+1} = a_k \cdot q$ для любого номера $k \geq 1$. q — знаменатель геометрической прогрессии, $q \neq 1$. $a_n = a_1 q^{n-1}$ — n -й член прогрессии. $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ — сумма n первых членов прогрессии.

$S_n = \frac{a_1}{1-q}$ — сумма бесконечно убывающей прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ при $|q| < 1$.

5. Квадратный трехчлен.

$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$,

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$x_v = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы, $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

$ax^2 + bx + c \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$, если $a > 0$. Равенство достигается при $x = -\frac{b}{2a}$.

$ax^2 + bx + c \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$, если $a < 0$. Равенство достигается при $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $a + b + c = 0$, то число 1 — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $a - b + c = 0$, то число (-1) — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были расположены по разные стороны от заданного числа m , необходимо и достаточно выполнения условия $a f(m) < 0$ (рис. 1).

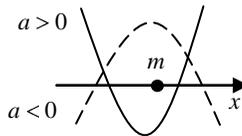


Рис. 1

Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были расположены по разные стороны от данного отрезка $[m, n]$ (рис. 2), необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} a f(m) < 0, \\ a f(n) < 0. \end{cases}$$

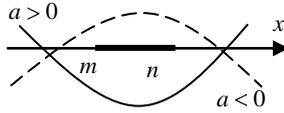


Рис. 2

Для того чтобы различные корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были больше заданного числа m (рис. 3), необходимо и достаточно выполнения

$$\text{условий } \begin{cases} D > 0, \\ a f(m) > 0, \\ x_b > m. \end{cases}$$

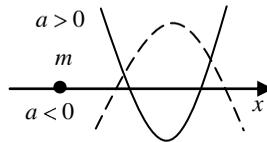


Рис. 3

Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были меньше заданного числа m (рис. 4), необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a f(m) > 0, \\ x_b < m \end{cases}$$

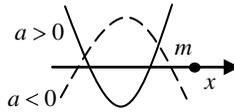


Рис. 4

Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были расположены на данном интервале (m, n) , необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ m < x_b < n, \\ a f(m) > 0, \\ a f(n) > 0. \end{cases}$$

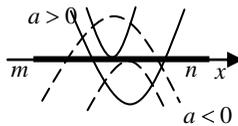


Рис. 5

6. Показательная и логарифмические функции.

$$a^m a^n = a^{m+n}, a^m : a^n = a^{m-n}, a^{m^n} = a^{mn}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^0 = 1, a \neq 1.$$

$\log_a b = x, a^x = b$ или $a^{\log_a b} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$ — определение логарифма.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \log_a x^p = p \log_a x, \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

$\log_{g(x)} f(x)$ и $g(x) - 1$ $f(x) - 1$ имеют одинаковые знаки.

$f(x)^{g(x)} - f(x)^{h(x)}$ и $f(x) - 1$ $g(x) - h(x)$ имеют одинаковые знаки.

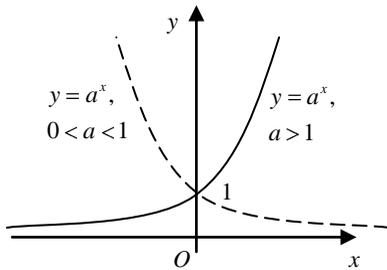


Рис. 6

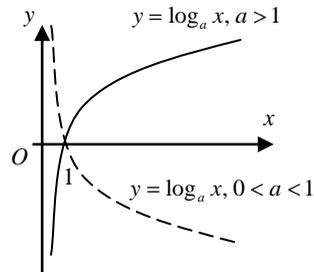


Рис. 7

7. Графики функций.

$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ — модуль (абсолютная величина) числа x .

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

$$|-x| = |x|, |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|},$$

$$-|x| \leq x \leq |x|, |x + y| \leq |x| + |y|, \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$|f| + |g| = f + g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0, \\ g \geq 0. \end{cases}$$

$$|f| + |g| = f - g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0, \\ g \leq 0. \end{cases}$$

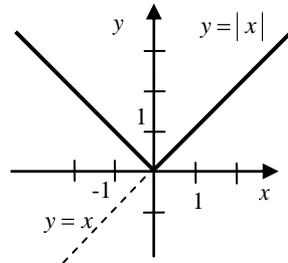


Рис. 8

x — целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее число x (рис. 9).

$x = x - x$ — дробная часть числа x (рис.10),

$$2,7 = 2, \quad 0,5 = 0, \quad -0,3 = -1, \quad 2,7 = 0,7, \quad 0,5 = 0,5, \quad -0,3 = 0,7.$$

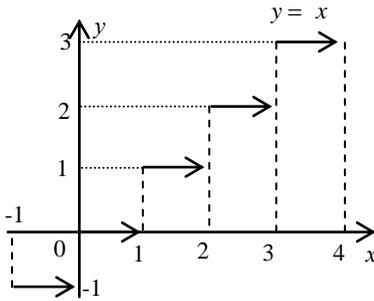


Рис. 9

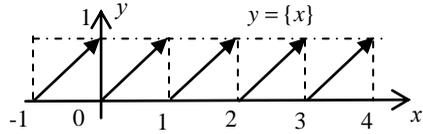


Рис. 10

Из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразований можно получить графики следующих функций:

- 1) $y = f(x - a)$ сдвигом графика $y = f(x)$ вдоль оси ox на величину a ;
- 2) $y = f(x) + b$ сдвигом графика $y = f(x)$ вдоль оси oy на величину b ;
- 3) $y = mf(x)$ растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси oy в m раз;
- 4) $y = f(kx)$ растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси ox в $1/k$ раз;
- 5) $y = -f(x)$ симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси ox ;
- 6) $y = f(-x)$ симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси oy ;
- 7) $y = |f(x)|$ симметричным отображением всех ветвей графика $y = f(x)$, расположенных в полуплоскости $y \leq 0$, относительно оси ox (ветви графика в полуплоскости $y \geq 0$ остаются на месте);
- 8) $y = f|x|$ часть графика $y = f(x)$, расположенная в полуплоскости $x \leq 0$, заменяется на симметричную часть графика, расположенную в полуплоскости $x \geq 0$.

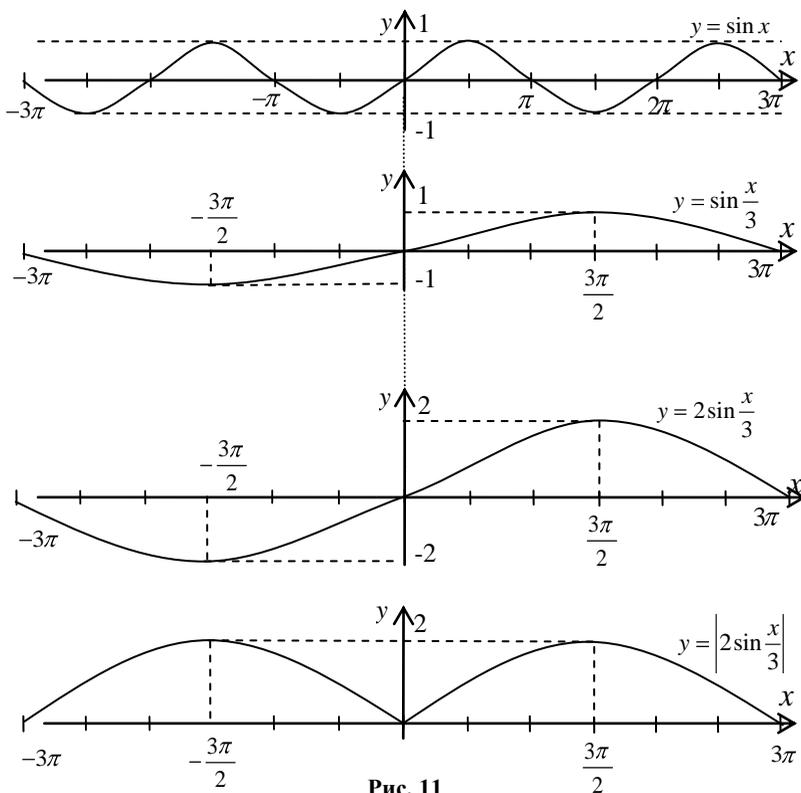


Рис. 11

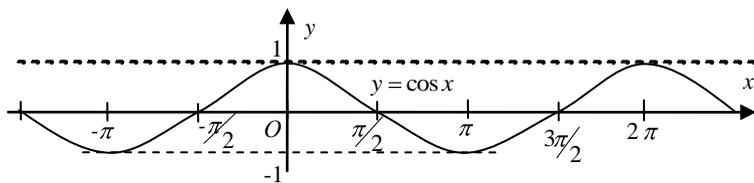


Рис. 12

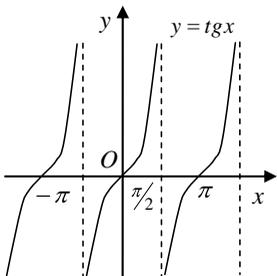


Рис. 13

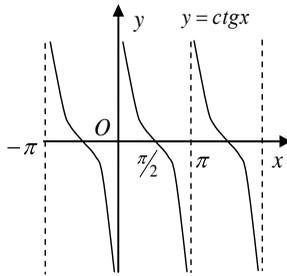


Рис. 14

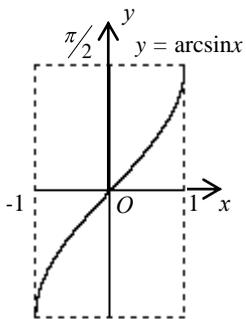


Рис. 15

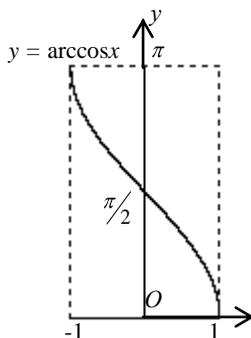


Рис. 16

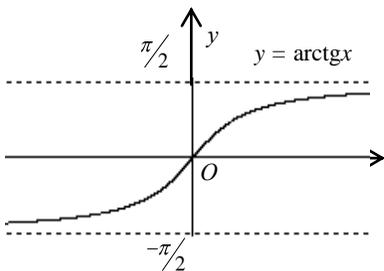


Рис. 17

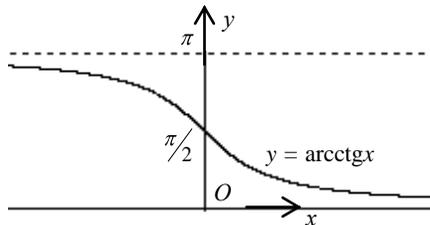


Рис. 18

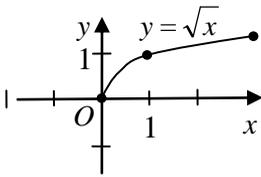


Рис. 19

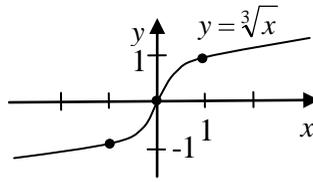


Рис. 20

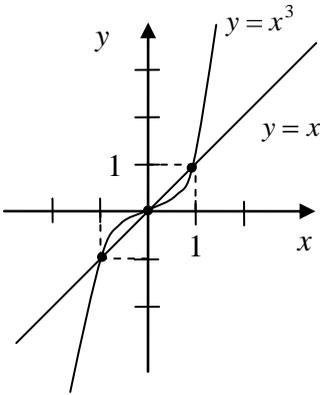


Рис. 21

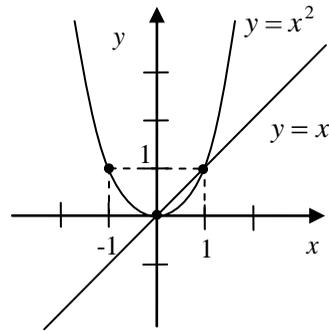


Рис. 22

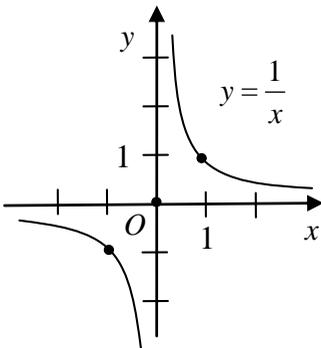


Рис. 23

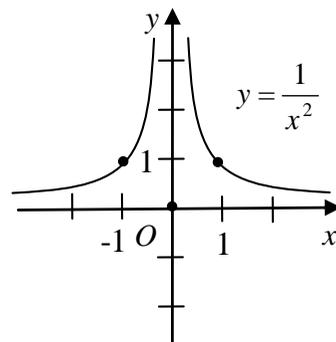


Рис. 24

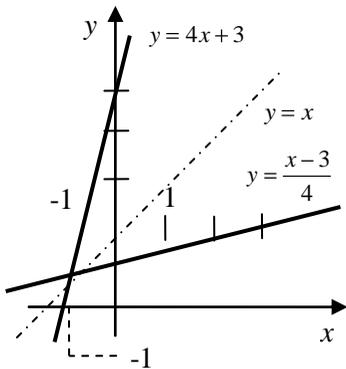


Рис. 25

Графики функции $y = f(x)$ и обратной к ней функции $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$. Функции $y = 4x + 3$ и $y = (x - 3)/4$ взаимно обратные и их графики на рис. 25 симметричны относительно прямой $y = x$.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если область определения D_f функции симметрична относительно нуля и для любого значения $x \in D_f$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если область определения D_f функции симметрична относительно нуля и для любого значения $x \in D_f$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси oy , а график нечетной функции — относительно начала координат.

График четной функции симметричен относительно оси oy , а график нечетной функции — относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любых значений $x \in D_f$, $(x - T) \in D_f$, $(x + T) \in D_f$ и выполняются равенства $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. Основным периодом функции называется наименьшее положительное число, обладающее указанным свойством.

Для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно:

- 1) найти точки экстремума, в которых $f'(x) = 0$;
- 2) вычислить значения функции в точках экстремума и на концах отрезка;
- 3) выбрать наибольшее или наименьшее значения функции.

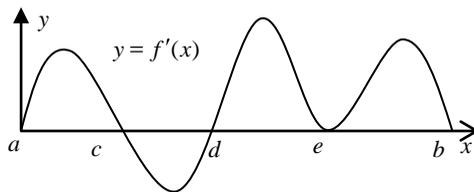


Рис. 26

Функция $y = f(x)$ (рис. 26) имеет экстремумы в точках $x = c$ и $x = d$, т.к. $f'(c) = 0, f'(d) = 0$ и, проходя через эти точки, производная меняет знак. В точке $x = c$ функция достигает максимума, а в точке $x = d$ — минимума.

Функция $y = f(x)$ (рис. 27) не имеет экстремума на отрезке $[a, b]$. В точке $x = a$ функция достигает наибольшего значения, а в точке $x = b$ — наименьшего значения, т.к. она убывает на интервалах (a, c) и (c, b) . На отрезке $[a, b]$ функция не возрастает.

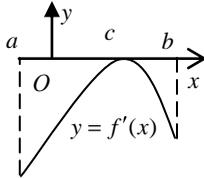


Рис. 27

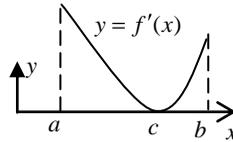


Рис. 28

Функция $y = f(x)$ (рис. 28) не имеет экстремума на отрезке $[a, b]$. В точке $x = a$ функция достигает наименьшего значения, а в точке $x = b$ — наибольшего значения, т.к. она возрастает на интервалах (a, c) и (c, b) . На отрезке $[a, b]$ функция не убывает.

8. Многочлены, уравнения, неравенства.

Схема Горнера деления многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ на $(x - c)$

	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = b_0c + a_1$	$b_2 = b_1c + a_2$		$b_{n-1} = b_{n-2}c + a_{n-1}$	$f(c) = b_{n-1}c + a_n$

Результат деления

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{x - c} = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1} + \frac{f(c)}{x - c}.$$

Теорема Виета. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — корни многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, тогда

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$

$$a_3 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n), \quad \dots, \quad a_n = (-1)^n x_1x_2 \dots x_n.$$

Теорема о рациональных корнях уравнения

Пусть $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ — уравнение с целыми коэффициентами.

Если число $x = \frac{p}{q}$ является корнем уравнения, где p и q — целые числа и дробь

несократима, то p есть делитель a_n , а q — делитель a_0 .

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a \geq 0, b \geq 0$. Равенство достигается только при $a = b$.

$a + \frac{1}{a} \geq 2$, где $a > 0$. Равенство достигается только при $a = 1$.

$|x| \geq a$, где $a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \\ x \leq -a \end{cases}$, $|x| \leq a$, где $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}, \quad \sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \text{ — определена} \\ \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}, \quad \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{f(x)} \geq \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{f(x) + g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \cap D_g \\ \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ f(x) + g(x) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} \geq \sqrt[3]{f(x) + g(x)} \Leftrightarrow f(x)g(x) \cdot f(x) + g(x) \geq 0$$

Решение в целых числах уравнения $ax + by = c$ с целыми коэффициентами $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

Если (x_0, y_0) — некоторое решение этого уравнения в целых числах, то все решения имеют вид $x = x_0 - bt, y = y_0 + at$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Все решения можно записать также в виде $x = x_0 + bt, y = y_0 - at$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Симметрия в алгебраических задачах:

Если в уравнении $F(x, y) = 0$ функция $F(x, y)$ симметрична относительно переменной y , т.е. $F(x, -y) = F(x, y)$ и уравнение имеет решение (x_0, y_0) , то уравнение имеет также решение $(x_0, -y_0)$. Если в задаче требуется найти единственное решение, то для этого необходимо выполнение условия $-y_0 = y_0$, т.е. $y_0 = 0$.

Свойства функции:

А) Если уравнение $f(x) = 0$ имеет решение, а функция $f(x)$ — непрерывна и убывающая (возрастающая), то уравнение имеет единственное решение (рис. 29).

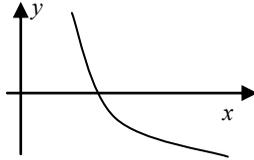


Рис. 29

Б) Если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$, то на интервале (a, b) существует решение уравнения $f(x) = 0$.

Метод мини-максов:

Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функции $f(x), g(x)$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{cases} f(x) \leq A \\ g(x) \geq A \end{cases}, \text{ то уравнение равносильно системе } \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}.$$

9. Треугольник, параллелограмм и трапеция.

Сумма внутренних углов $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (рис. 30).

Полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Высота $h_c \perp AB$.

Медиана m_c делит сторону AB на два равных отрезка $AM = MB$. Биссектриса l_c делит угол на два равных угла $\angle ACL = \angle LCB$.

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta.$$

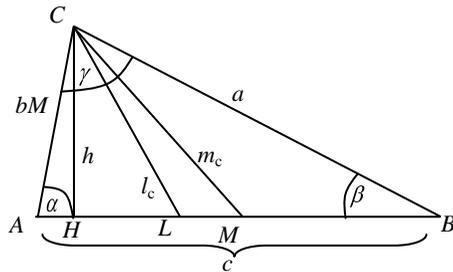


Рис. 30

Площадь треугольника $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ch_c = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = pr = \frac{abc}{4R}$.

r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — формула Герона.}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \text{ — теорема косинусов.}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \text{ — теорема синусов.}$$

В параллелограмме (рис. 31) сумма квадратов сторон равна сумме квадратов его диагоналей, т.е. $2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2$.

Площадь параллелограмма $S = AB \cdot h = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$.

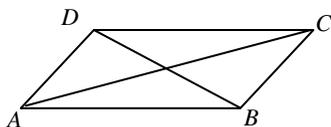


Рис. 31

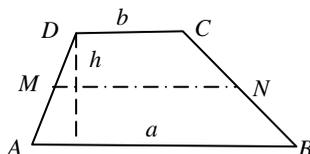


Рис. 32

Средняя линия трапеции (рис. 32) $MN = \frac{a+b}{2}$.

Площадь трапеции $S = (a+b)h/2$.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с внешним углом.

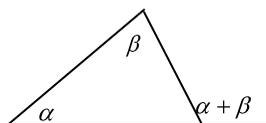


Рис. 33

10. Прямоугольный треугольник.

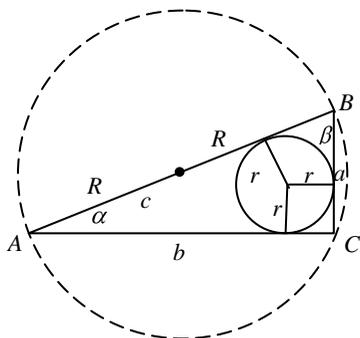


Рис. 34

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a = c \sin \alpha = c \cos \beta,$$

$$b = c \sin \beta = c \cos \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}, \cos \beta = \frac{a}{c}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы. Радиус описанной окружности $R = c/2$ (рис. 34).

Радиус окружности, вписанной в треугольник $r = (a+b-c)/2$. $S = \frac{ab}{2} = ch_c$.

11. Произвольный четырехугольник.

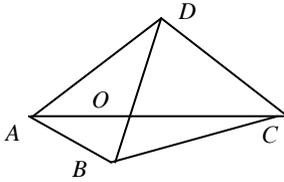


Рис. 35

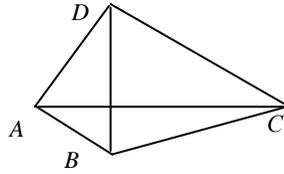


Рис. 36

$$\frac{BO}{OD} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} \quad (\text{рис. 35}).$$

$$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + DC^2 = BC^2 + AD^2 \quad (\text{рис. 36}).$$

Теорема Птолемея. В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность (рис. 37), произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ [3, № 893].

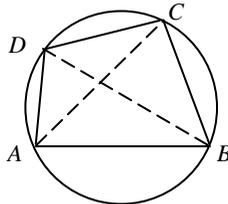
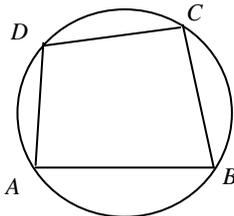


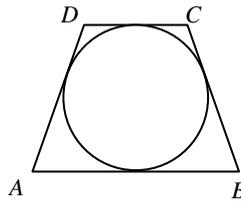
Рис. 37

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ — площадь произвольного четырехугольника, равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$$

Рис. 38



$$AB + DC = AD + BC$$

Рис. 39

12. Замечательные точки треугольника.

Три медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины. $CM : MC_1 = 2 : 1$ (рис. 40).

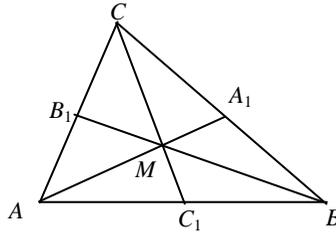


Рис. 40

$AC_1 = C_1B, BA_1 = A_1C, CB_1 = B_1A$. Точка M называется центром тяжести треугольника ABC . Медиана $m_a = AA_1 = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$ [2, № 1009].

$$S_{\Delta AMC_1} = S_{\Delta C_1MB} = S_{\Delta BMA_1} = S_{\Delta A_1MC} = S_{\Delta CMB_1} = S_{\Delta B_1MA}.$$

Три биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности (рис. 41).

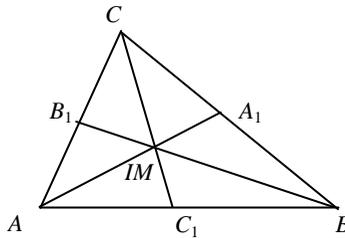


Рис. 41

Биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $CA_1 : A_1B = AC : AB$ [2, № 535].

$$CI : IC_1 = AC : AC_1 \text{ т.к. } AI \text{ — биссектриса в } \Delta CAC_1.$$

$$CI : IC_1 = BC : BC_1 \text{ т.к. } BI \text{ — биссектриса в } \Delta CBC_1.$$

Точка пересечения биссектрис делит биссектрису в отношении (считая от вершины треугольника), равном отношению суммы двух прилежащих сторон к противолежащей стороне $CI : IC_1 = (a + b) : c$.

$$\text{Биссектриса } AA_1 \text{ треугольника равна } l_a = \frac{2bc \cos \frac{\angle A}{2}}{b + c} \text{ [3, № 1200].}$$

Прямые AA_1, BB_1, CC_1 , содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке H , называемой ортоцентром треугольника (рис. 42). Треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями высот треугольника ABC , называется ортотреугольником для данного треугольника ABC (рис. 43). Высоты данного треугольника ABC являются биссектрисами углов ортотреугольника, т.е. $\angle B_1C_1A_1 = \angle CC_1A_1$, $\triangle AC_1H \sim \triangle AA_1B$, $\triangle AC_1H \sim \triangle AA_1B$, $\triangle AC_1H \sim \triangle CC_1B$
 $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

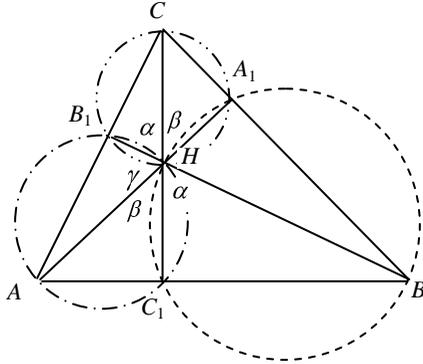


Рис. 42

Вокруг четырехугольников VA_1HC_1 , CA_1HB_1 , AC_1HB_1 можно описать окружности.

$\triangle AC_1B_1$ подобен $\triangle ACB$ с коэффициентом подобия $\cos A$.

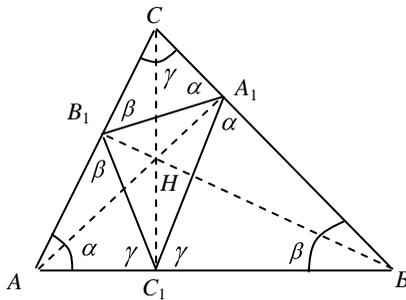


Рис. 43

$\triangle BA_1C_1$ подобен $\triangle BAC$ с коэффициентом подобия $\cos B$.

13. Треугольник, вписанная и описанная окружности.

Центр I вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 треугольника.

Центр I вписанной окружности равноудален от сторон треугольника, т.е. $IA_0 = IB_0 = IC_0 = r$. $AC_0 = AB_0, BA_0 = BC_0, CA_0 = CB_0$.

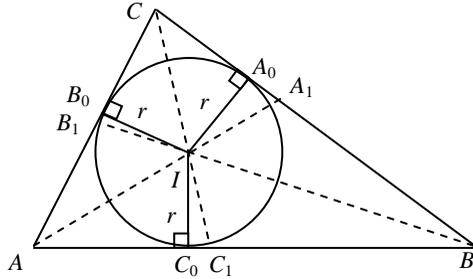


Рис. 44

Площадь треугольника $S = \frac{r(a+b+c)}{2} = r \cdot p$.

Радиус вписанной окружности $r = \frac{ab \sin \angle C}{a+b+c}$. $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

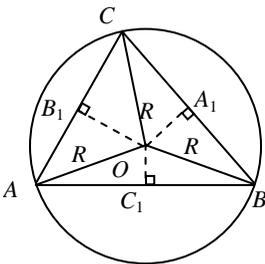


Рис. 45

Центр O окружности, описанной около треугольника ABC , является точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (рис. 45), т.е. прямых, OA_1, OB_1, OC_1 где $AC_1 = C_1B, BA_1 = A_1C, CB_1 = B_1A$.

Центр O описанной окружности равноудален от вершин треугольника, т.е. $OA = OB = OC_1 = R$.

Площадь треугольника $S = \frac{abc}{4R}$.

14. Окружность и правильные многоугольники.

Длина окружности $C = 2\pi R$, R — радиус.

Площадь круга $S = \pi R^2$.

Длина стороны правильного n -угольника, вписанного в окружность,

$a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ (рис. 46).

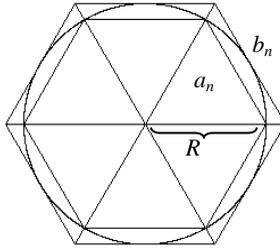


Рис. 46

Длина стороны правильного n -угольника, описанного около окружности,
 $b_n = 2R \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

В правильном треугольнике со стороной a : $a = R\sqrt{3}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,
 $R = 2r$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$, $S = 3r^2\sqrt{3}$.

В квадрате со стороной a : $a = R\sqrt{2}$, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$, $a = 2r$, $S = a^2 = 2R^2$.

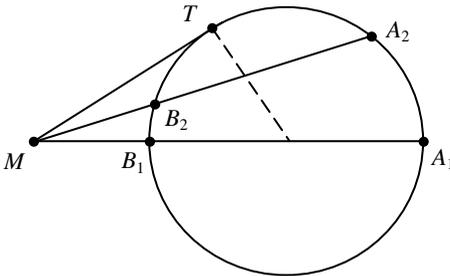


Рис. 47

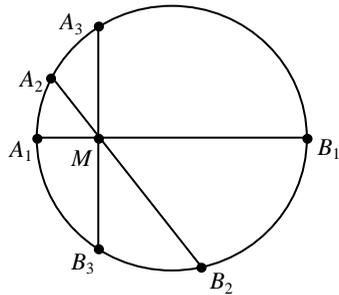


Рис. 48

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = MT^2 \text{ (рис. 47)}$$

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = MA_3 \cdot MB_3 \text{ (рис. 48)}$$

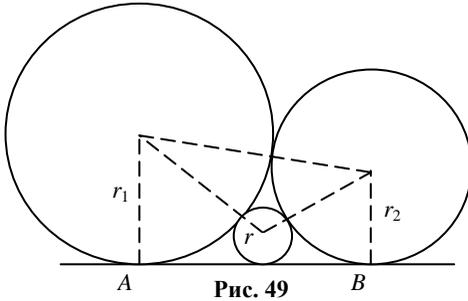


Рис. 49

$$AB = 2\sqrt{r_1 r_2},$$

$$\sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$

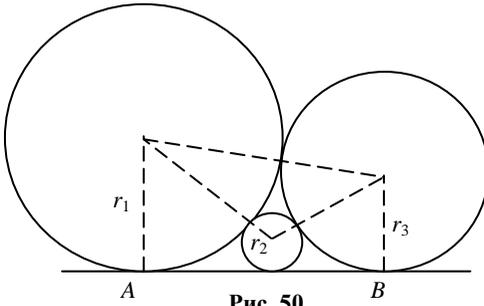


Рис. 50

$$\sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}$$

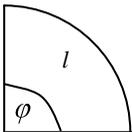


Рис. 51

Длина дуги окружности (рис. 51) $l = Rn^\circ = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$.

Площадь сектора $S = \frac{R^2 \varphi}{2} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$.

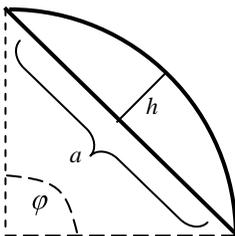


Рис. 52

Высота сегмента (рис. 52) $h = R \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right)$.

Площадь сегмента $S = \frac{R^2 \varphi}{2} \pm S_\Delta$, где φ — радианная мера угла, n° — градусная мера угла.

$$\triangle AHC \sim \triangle CHB, \quad \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB} = \frac{AC}{CB},$$

$$\triangle AHC \sim \triangle ACB, \quad \frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CB} = \frac{AC}{AB},$$

$$\triangle AHC \sim \triangle ACB, \frac{CH}{AC} = \frac{HB}{CB} = \frac{CB}{AB}, \angle ACB = 90^\circ, h = \sqrt{ab} \text{ (рис. 53).}$$

Вписанный угол в два раза меньше центрального угла, опирающегося на ту же самую дугу.

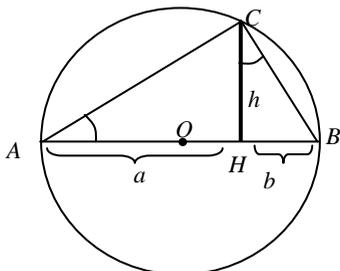


Рис. 53

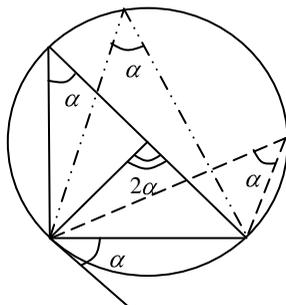


Рис. 54

Острый угол между хордой и касательной, вменяющий дугу, в два раза меньше центрального угла, опирающегося на эту же дугу (рис. 54).

15. Площади и объемы.

Объем пирамиды $V = \frac{Sh}{3}$, где S — площадь основания, h — высота.

Объем усеченной пирамиды $V = \frac{h}{3} S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2$, где S_1, S_2 — площади оснований, h — высота.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды $S_{\text{бок}} = \frac{Pa}{2}$, где P — периметр основания, a — апофема.

$S_{\text{бок}} = \frac{S}{\cos \varphi}$, где S — площадь основания, φ — величина двугранного угла при стороне основания.

Объем конуса $V = \frac{Sh}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, где S — площадь основания, h — высота.

Объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$, R, r — радиусы оснований.

Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{бок}} = \pi r l$, где l — образующая конуса, r — радиус основания.

Объем шара $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, R — радиус шара.

Площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$.

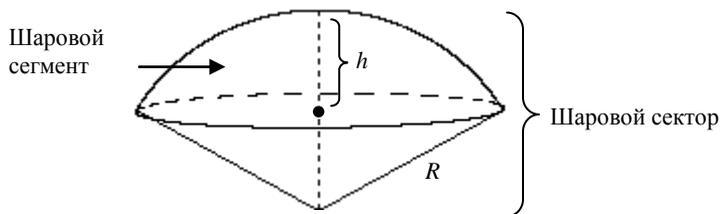


Рис. 55

Объем шарового сегмента $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$ (рис. 55).

Площадь сегментной поверхности $S = 2\pi Rh$, h — высота шарового сегмента.

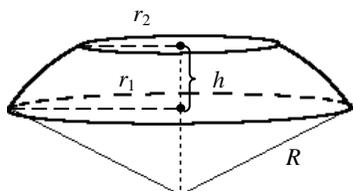


Рис. 56

Объем шарового сектора $V = \frac{2\pi}{3} R^2 h$.

Площадь поверхности сектора $S = \pi R (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$, где h — высота шарового сектора.

Объем шарового пояса (слоя) (рис. 56)

$$V = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2),$$

Площадь шарового пояса $S = 2\pi Rh$, h — высота шарового пояса.

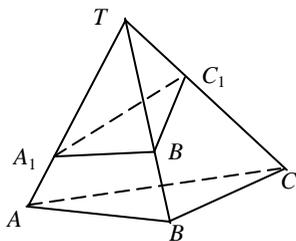


Рис. 57

$$\frac{V_{ABCT}}{V_{A_1B_1C_1T}} = \frac{TA \cdot TB \cdot TC}{TA_1 \cdot TB_1 \cdot TC_1} \quad (\text{рис. 57}).$$

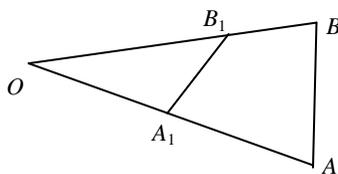


Рис. 58

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OA_1B_1}} = \frac{OA \cdot OB}{OA_1 \cdot OB_1} \quad (\text{рис. 58}).$$

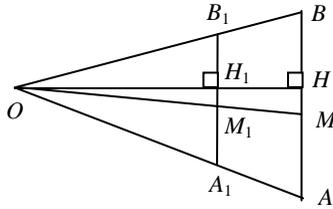


Рис. 59

Отношение площадей подобных фигур равно отношению квадратов соответствующих линейных элементов $\frac{S_{OAB}}{S_{OA_1B_1}} = \frac{OA^2}{OA_1^2} = \frac{OH^2}{OH_1^2} = \frac{OM^2}{OM_1^2}$ (рис. 59).

Отношение объемов подобных фигур равно отношению кубов соответствующих линейных элементов (рис. 60)

$$\frac{V_{ABCT}}{V_{A_1B_1C_1T}} = \frac{TA^3}{TA_1^3} = \frac{TH^3}{TH_1^3} = \frac{TM^3}{TM_1^3}.$$

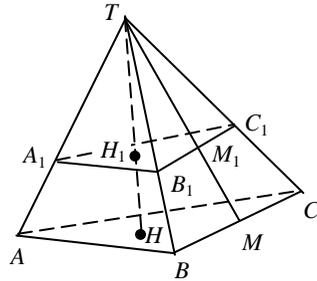


Рис. 60

16. Некоторые теоремы и равенства из геометрии.

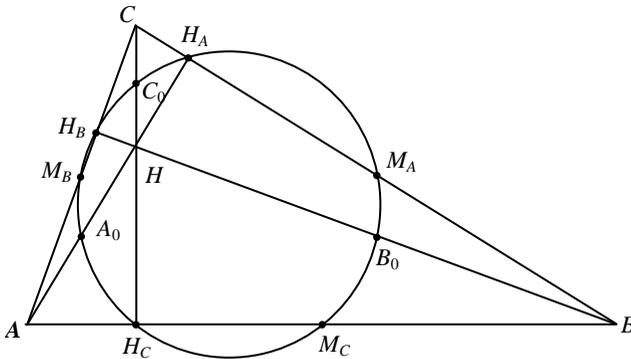


Рис. 61

В любом треугольнике ABC (рис. 62) середины сторон M_A, M_B, M_C , основания высот треугольника H_A, H_B, H_C и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника H с вершинами треугольника, т.е. точки A_0, B_0, C_0 , расположены на одной окружности. Окружность называется окружностью девяти точек, окружностью Эйлера [3, № 895].

В любом треугольнике ABC (рис. 62) точка пересечения медиан M , точка пересечения высот H и центр O описанной окружности расположены на одной прямой, называемой прямой Эйлера, причем [3, № 910].

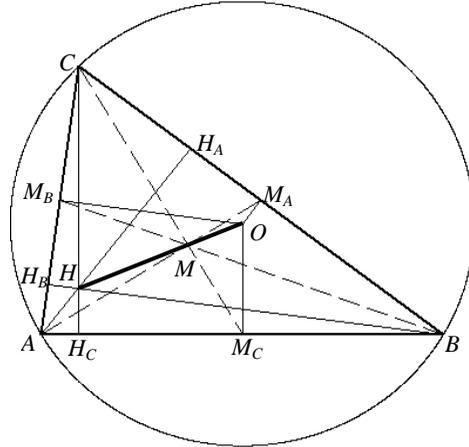


Рис. 62

В любом треугольнике (рис. 63) радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством $d^2 = R^2 - 2Rr$ [3, № 894].

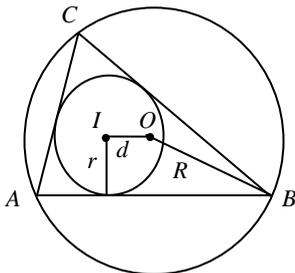


Рис. 63

Для правильного тетраэдра с ребром a (рис. 64) площадь поверхности

$$S_{\text{пол.}} = \sqrt{3}a^2, \quad \text{объем} \quad V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3, \quad \text{высота}$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{3}a, \quad \text{радиус вписанной сферы}$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12}a, \quad \text{радиус описанной сферы} \quad \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

Для двугранного угла $\varphi = \angle BKS$ между двумя гранями выполняется равенство

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}.$$

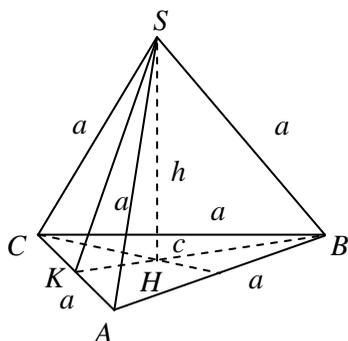


Рис. 64

17. Тригонометрия.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2};$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}; \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi, \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \quad \text{где } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

19. Производная и интеграл.

$$c f(x)' = c f'(x), \quad f + g' = f' + g', \quad f \cdot g' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$c' = 0, \quad x' = 1, \quad x^n' = nx^{n-1}, \quad \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$e^x' = e^x, \quad a^x' = a^x \ln a, \quad \ln x' = \frac{1}{x}, \quad \log_a x' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$\sin x' = \cos x, \quad \cos x' = -\sin x, \quad \operatorname{tg} x' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{ctg} x' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \operatorname{arcctg} x' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Геометрический смысл производной $f'(x)$ — тангенс угла наклона с осью ox касательной в точке $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$, т.е. $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$.

$y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$ — уравнение касательной к линии $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) .

Физический смысл производной $s'(t)$ — скорость материальной точки, если путь определяется по закону $s = s(t)$ и t — время. $s''(t)$ — ускорение.

$$\int f(x) dx' = f(x), \quad \int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \quad \int f + g dx = \int f dx + \int g dx, \text{ где } c \text{ — const.}$$

$$\int 0 dx = C, \quad \int dx = x + C, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C, \quad \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0, \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

$\int u dv = uv - \int v du$ — интегрирование по частям;

$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ — интегрирование заменой переменной.

а) Вычисление площади фигуры

Площадь криволинейной трапеции (рис. 65), ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), слева и справа, соответственно, — прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу — отрезком $[a; b]$ оси ox вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

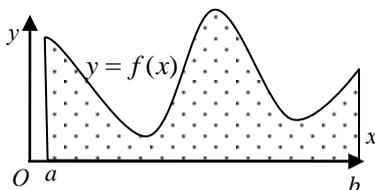


Рис. 65

б) Вычисление объема

Объем тела вращения (рис. 66), полученного при повороте криволинейной трапеции (ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и

осью ox) вокруг оси ox , равен $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

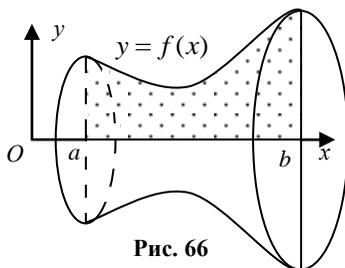


Рис. 66

Заключение

После знакомства с решаемыми задачами в проектах, читатель, наверное, осознал, что он включался в процесс познания посредством интегрированного объединения элементов математики и информатики. В организации учебно-познавательного процесса реализован интегрированный подход через различные формы учебной и поисковой деятельности. Когнитивная визуализация посредством компьютерной графики активизировала цели познания, расширяла содержание решаемой проблемы в проекте, формировала интегрированные методы работы. Приобретаемые знания и навыки были направлены на развитие мыслительных действий, а значит, формировали читателя, как исследователя и творца социально значимых объектов.

Существуют ли другие нерешенные задачи или известные задачи, которые можно решить новыми методами? Начнем с простой постановки проблем, а потом Вы их расширите.

1. Рассмотрите схему вашего города. Какие закономерности на схеме можно обнаружить в расположении объектов. Как оценить коэффициент застройки территории? Как автоматизировать процесс нахождения контура города (выпуклой оболочки), если объекты заданы в виде прямоугольников и кругов на плоскости?

2. Математическое и компьютерное моделирование кратчайшей линии на поверхности тетраэдра, соединяющей две данные точки. Моделирование кратчайшего контура на тетраэдре, проходящего через данную точку и охватывающего одну или две вершины. Моделирование периодических траекторий на тетраэдре.

3. Математическое и компьютерное моделирование проекций сферы, не рассмотренных в этом пособии.

4. Математическое и компьютерное моделирование пирамидальных чисел.

5. Моделирование полета в различных полях тяготения.

6. Математическое и компьютерное моделирование аperiodического паркета.

7. Начните с изучения некоторых компьютерных программ в папке **«Программы формируют визуальный образ»** и разработайте математическую модель представленного объекта.

Литература

1. *Александров А.Д.*, Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия 10, 11 классы. М.: Просвещение, 1992.
2. *Атанасян Л.С.* Геометрия Лобачевского: Кн. для учащихся. М.: Просвещение, 2001.
3. *Атанасян Л.С.* Геометрия: Учебник для 7—9 классов. М.: Просвещение, 2006.
4. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 2.
5. *Болл У.*, Коксетер Г. Математические эссе и развлечения М.: Мир, 1986.
6. *Воеводин В.В.*, Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
7. *Габович И.Г.* Алгоритмический подход к решению геометрических задач. М.: Просвещение, 1996.
8. *Гарднер М.* Математические новеллы. М.: Мир, 1974.
9. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Изд-во «Вербум-М», «Академия», 2003.
10. *Далингер В.А.*, Костюченко Р.Ю. Аналогия в геометрии: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001.
11. *Калошина И.П.* Психология творческой деятельности: Учеб. пособие. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
12. *Коксетер Г.С.М.*, Грейцер С.Л. Новые встречи с геометрией М.: Наука, 1974.
13. *Окулов С.* Программирование в алгоритмах. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
14. *Перепелкин Д.И.* Курс элементарной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
15. *Пойа Дж.* Математическое открытие. Решение задачи: основные понятия, изучение и преподавание. М.: Мир, 1970.
16. *Семакин И.Г.* Информатика. Задачник-практикум: В 2 т. / Под ред. И.Г.Семакина, Е.К.Хеннера. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 1999. Т. 1.
17. *Сечеи Д.* Геометрия. М.: АСТ, 2006.
18. *Совертков П.И.* Задачи по топологии и геометрия метрических пространств: Учеб. пособие. Нижневартовск: Изд-во НГГУ, 2010.
19. *Совертков П.И.* Занимательное компьютерное моделирование в элементарной математике: Учеб. пособие. М.: Гелиос АРВ, 2004.
20. *Совертков П.И.* Модели геометрии Лобачевского: Учеб. пособие. Омск: РИО ОмГПУ, 2007.

21. *Совертков П.И.* Моделирование в интегративном проекте по математике и информатике. Элективный курс: Метод. пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.
22. *Совертков П.И.* Некоторые направления развития поисковой деятельности учащихся по математике и информатике: Учеб. пособие. Сургут: РИО СурГПУ, 2007.
23. *Совертков П.И.* Проектирование поисково-исследовательской деятельности учащихся и студентов по математике и информатике: Монография. Сургут: РИО СурГПИ, 2004.
24. *Совертков П.И.* Сургутские олимпиады по математике. Сургут: Изд-во Центра развития образования, 2008.
25. *Совертков П.И., Назин А.Г.* Моделирование в интегративном проекте по математике и информатике. Элективный курс: Учеб. пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2012.
26. *Совертков П.И., Назин А.Г.* Моделирование в интегративном проекте по математике и информатике. Элективный курс: Практикум. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2012.
27. *Франгулов С.А., Совертков П.И., Фадеева А.А., Ходот Т.Г.* Сборник задач по геометрии: Учеб. пособие. М.: Просвещение, 2002.
28. Четвертая Соросовская олимпиада школьников 1997—1998. М.: МЦНМО, 1998.
29. *Шикин Е.В., Франк-Каменецкий М.М.* Кривые на плоскости и в пространстве. Справочник. М.: ФАЗИС, 1997.
30. *Эрдниев П.М.* Преподавание математики в школе. М.: Просвещение, 1980.

Учебное издание

Совертков Петр Игнатьевич

**ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ
ПРОЕКТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ**

Методическое пособие

Редактор *Т.А.Фридман*
Компьютерная верстка *А.З.Насибуллиной*

Изд. лиц. ЛР № 020742. Подписано в печать 10.09.2013. Формат 60×84/16
Бумага для множительных аппаратов. Гарнитура Times
Усл. печ. листов 21,25. Тираж 300 экз. Заказ 1406

*Отпечатано в Издательстве
Нижевартовского государственного университета
628615, Тюменская область, г.Нижевартовск, ул.Дзержинского, 11
Тел./факс: (3466) 43-75-73, E-mail: izdatelstvo@nggu.ru*

