

*М.Б.Игнатъев, Т.С.Катермина*

**КОНТРОЛЬ И КОРРЕКЦИЯ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ НА ОСНОВЕ  
МЕТОДА ИЗБЫТОЧНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

*Учебное пособие*



Издательство  
Нижевартовского  
государственного  
университета  
2014

**ББК 32.972.11**  
**И 26**

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета  
Нижевартовского государственного университета

*Рецензенты:*

доцент кафедры математики и естественных наук Нижевартовского  
экономико-правового института (филиала) Тюменского государственного  
университета, кандидат физико-математических наук *Н.П.Дмитриев*;  
заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВПО «КемТИПП»,  
доктор технических наук *В.А.Павский*

*Игнатъев М.Б., Катермина Т.С.*

**И 26** **Контроль и коррекция вычислительных процессов в реальном времени на основе метода избыточных переменных:** Учебное пособие. —  
Нижевартовск: Изд-во Нижеварт. гос. ун-та, 2014. — 188 с.

**ISBN 978-5-00047-159-3**

В пособии рассматривается проблема контроля и коррекции вычислительных процессов в реальном времени, что особенно важно для встроенных вычислительных устройств, непосредственно управляющих ответственными объектами. Дается описание метода избыточных переменных. Рассматриваются системы с естественной и искусственной избыточностью, проблема эквивалентности исходных и расширенных систем, вопросы помехоустойчивости исходных и расширенных систем, различные варианты введения и использования избыточности для контроля, диагностики и коррекции, жесткие и гибкие избыточные структуры с большими адаптационными возможностями, сравниваются различные методы использования избыточности. Приведены лабораторные работы, которые позволяют проверить эффективность метода избыточных переменных и имеют большое познавательное значение.

Пособие предназначено для бакалавров, магистров, специалистов и аспирантов по направлениям 050200 «Физико-математическое образование» по курсам «Математические модели» и «Компьютерное моделирование», 230100 «Информатика и вычислительная техника» по курсам «Основы теории управления», «Системный анализ и проектирование информационных систем», а также смежных специальностей в качестве учебного пособия.

**ББК 32.972.11**

**ISBN 978-5-00047-159-3**

© Игнатъев М.Б., Катермина Т.С., 2014  
© Издательство НВГУ, 2014

## ВВЕДЕНИЕ

Кибернетические системы различного назначения содержат в сигналах и структурах избыточность, которая используется для улучшения качества функционирования систем. В одних системах эту избыточность искусственно вводят для обеспечения заданного качества функционирования, в других системах она естественным образом присутствует, и управление такими системами представляет серьезные трудности. К системам первого класса относятся различные вычислительные устройства и процессы, к системам второго класса — роботы-манипуляторы, оснащенные многозвенными механическими «руками» с автоматизированным приводом. Целью настоящей работы является исследование избыточных структур, которые описываются обыкновенными или дифференциальными уравнениями и их аналогами, и разработка регулярного метода введения и использования избыточности в таких системах [7, 8].

Рассматриваемые системы первого и второго класса описываются одноптипными уравнениями, в которых число переменных больше числа уравнений связи. Поэтому важной задачей являлось определение структуры уравнений с неопределенными коэффициентами, которые могут рассматриваться как инструменты управления при достижении различных целей в системах обоих классов, и доказательство эквивалентности исходных уравнений новым уравнениям с избыточностью, что важно для систем первого класса. Этот материал изложен в § 1, 2 и 3 данного пособия.

Выработке единой точки зрения на системы способствовал лингвистический подход, который позволил для систем первого класса определить уровни введения избыточности, а для систем второго класса — иерархическую структуру управления роботами-манипуляторами.

Вычислительная техника в настоящее время является основным средством для решения важных научно-технических, экономических и военных проблем. Качество решения задач зависит в общем случае от вида решаемой задачи /З/, от используемой вычислительной аппаратуры /А/, от применяемого вычислительного метода /М/ и от вида помех /П/:

$$\gamma = \Gamma/3, A, M, P/, \quad (B.1)$$

где  $\gamma$  — качество решения задачи (надежность, точность, помехоустойчивость, быстродействие, удобство программирования и интерпретации полученных результатов и др.).

Помехи различного рода — сбои и отказы вычислительной аппаратуры, наводки и дрейфы в аналоговых машинах, ошибки округления и ошибки от неточных цифровых алгоритмов интегрирования и др. снижают качество решения задач и заставляют искать средства для борьбы с помехами на различных уровнях вычислительного процесса.

Для решения каждой конкретной задачи имеется свое наилучшее сочетание используемой аппаратуры и вычислительных методов [46]. Одно из основных средств достижения заданных показателей качества вычислительного процесса — это введение избыточности на различных этапах его осуществления.

С точки зрения обобщенного программирования вычислительный процесс может быть представлен как цепочка следующих преобразований:

$$Я_ч \rightarrow Я_{oc} \rightarrow Я_{пр} \rightarrow Я_м \rightarrow Я_р, \quad (B.2)$$

где  $Я_ч$  — язык человека, на котором формулируется задача;  $Я_{oc}$  — язык основных соотношений (математических зависимостей и формул);  $Я_{пр}$  — язык процессов, программ и блок-схем;  $Я_м$  — машинный язык напряжений и кодов вычислительного устройства;  $Я_р$  — язык результатов вычислений, понятный человеку-оператору.

Представленный таким образом вычислительный процесс состоит из преобразований на каждом из языков и из переводов с одних языков на другие. На каждом из этих этапов действуют помехи: ошибки, которые возникают из-за несовершенства аппаратуры, ошибки численных методов, ошибки программирования [30]. Например, при преобразовании  $Я_{oc} \rightarrow Я_{пр}$  возникают ошибки аппроксимации точных математических формул машинными алгоритмами, а на уровне  $Я_м$  могут действовать сбои и отказы элементов вычислительного устройства.

Ненадежность аппаратуры  $A$  проявляется главным образом на уровне  $Я_м$ . Большинство работ по повышению надежности

вычислительных машин сконцентрировано на решении проблемы повышения надежности именно на этом уровне или вблизи него.

В настоящей работе анализируются возможности повышения качества вычислительного процесса в целом за счет введения избыточности на других уровнях, и прежде всего на уровне основных соотношений  $Y_{oc}$ .

Все методы улучшения качественных показателей, и в частности, надежности, связаны с эквивалентными преобразованиями алгоритмов, формульных зависимостей или схем. Так как в настоящее время еще не разработана алгебра алгоритмов, которая позволяла бы производить эквивалентные преобразования алгоритмов, то естественно обратиться к обычной алгебре и анализу, где такие преобразования выполняются простым и естественным образом, и попытаться разработать метод помехоустойчивого кодирования именно на уровне описания задач языком обычной алгебры и анализа, тем более, что вычислительные машины весьма часто предназначены, в конечном счете, для решения тех или иных задач из обычной алгебры и анализа. Разработанный метод избыточных переменных является попыткой реализовать эти возможности.

Основная идея метода избыточных переменных заключается в следующем. Имеется исходная задача в виде конечных, дифференциальных, разностных или интегральных уравнений, в которых участвуют  $y_i, i = 1, 2, \dots, n$  исходных переменных. Для повышения качества решения предлагается, во-первых, вместо исходных переменных ввести новые переменные  $x_j, j = 1, 2, \dots, l, l > n$ . Переменные  $y_i$  и  $x_j$  могут быть связаны между собой произвольным образом, но обязательно так, чтобы можно было вычислить исходные переменные в функции от новых переменных. Наиболее разработанный вариант — когда  $y_i$  являются линейными функциями от  $x_j$ .

Во-вторых, на новые переменные накладываются дополнительные условия, и вместо исходной задачи с  $n$  переменными решается преобразованная исходная задача, тесно перемешанная с дополнительной задачей, причем в расширенном вычислительном процессе участвуют  $n_1$  переменных. По правильности решения заранее известной дополнительной задачи можно судить о правильности протекания всего вычислительного процесса

в целом и принимать меры по его исправлению в случае обнаружения нарушений. Дополнительные задачи обычно называются контрольными условиями.

С помощью специально выбранных контрольных условий можно косвенно контролировать протекание вычислительного процесса для различных задач, решение которых заранее не было известно. Поэтому важной проблемой, которая рассматривалась в данном пособии, был анализ возможностей контроля с помощью различных видов контрольных условий и на различных уровнях.

Введение избыточности позволяет не только организовать контроль, но и управлять<sup>1</sup> вычислительным процессом как на основании априорных данных о помехах, так и на основании текущего контроля процесса. Поэтому другой важной проблемой были разработка и анализ способов управления — с помощью обратной связи, коррекции вперед, непрерывной и дискретной коррекции, с помощью перестройки структуры избыточной вычислительной системы и др.

Введение избыточности, безусловно, ведет к усложнению вычислительного процесса, но придает ему новые качества контролируемости и корректируемости [6]. Следует подчеркнуть отличие этих качеств от уже установившихся понятий наблюдаемости и управляемости.

Наблюдаемость является необходимым, но недостаточным условием для организации контроля. Точно так же управляемость является необходимым, но недостаточным условием для организации целенаправленной коррекции динамических систем с избыточностью.

Как только люди начали вычислять, встал вопрос о контроле вычислений, и у бухгалтеров сложились свои приемы контроля вычислений, основанные на некоторых свойствах чисел. Гаусс полагал проблему контроля вычислений важной, но не представляющей особого труда. С появлением численных методов решения дифференциальных уравнений, со времен Адамса и Леверрье, вопрос о контроле вычислений зазвучал в полную силу.

---

<sup>1</sup> Управление — осуществление совокупности мероприятий, направленных на поддержание или улучшение функционирования управляемого объекта.

А.М.Ляпунов и Н.Г.Четаев вплотную подошли к этой проблеме при исследовании динамических систем. В связи с развитием вычислительной техники вопросы контроля вычислительных процессов приобрели особую остроту, так как для многих задач требовалось получать решение на длительных интервалах времени и при исследовании очень сложных систем уравнений, и так как вычислительные машины стали использоваться для целей управления.

Возможности использования избыточности для борьбы с помехами были впервые осознаны в технике связи еще в 30-е годы, с появлением и развитием теории информации получило дальнейшее развитие понятие избыточности. Термин «избыточность» был введен в русскую техническую литературу при переводе классической работы К.Шеннона в 1953 г. Н.А.Железновым, с именем которого тесно связана разработка проблемы избыточности в информационных системах.

Следующий шаг в разработке способов использования избыточности — применение в ЦВМ дискретных кодов, позволяющих обнаруживать и исправлять некоторые сбои и отказы аппаратуры. Однако большинство используемых в технике связи кодов не годятся для применения в ЦВМ, так как они не являются инвариантными по отношению к арифметическим операциям. Таким свойством обладают арифметические коды. Любой арифметический код задает контрольные соотношения, сводящиеся к вычислению остатков от деления заданного числа на одно или несколько фиксированных чисел, называемых модулями. В системах остаточных классов рассматриваются такие арифметические коды, в которых не только контрольные соотношения, но и основное число задается с помощью остатков по некоторым модулям. Кодирование в остаточных классах является важным средством для повышения надежности цифровых машин. Метод избыточных переменных может рассматриваться как способ функционального кодирования, а получающиеся при этом коды-функции оказываются инвариантными относительно операций, определенных в структуре машины.

## ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИЗБЫТОЧНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ (МИП)

Автоматические информационные системы предназначены для достижения определенных целей или для решения определенных задач. Если различные внутренние или внешние мешающие факторы препятствуют достижению цели, то вводят избыточность на том или иной уровне. Избыточность определяется по отношению к структуре или алгоритму минимальной сложности. Можно различать системы одноцелевые и многоцелевые. Природа и характер использования избыточности в этих системах во многом отличаются. В одноцелевых системах, которые главным образом рассматривались при исследовании использования избыточности, избыточность вводится в структуру, в сигналы или алгоритмы минимальной сложности для обеспечения необходимой точности, надежности или помехоустойчивости, при этом улучшение качественных показателей достигается за счет дополнительных затрат аппаратуры или времени.

В системах многоцелевых имеется естественная избыточность, которая определяется тем, что такие системы предназначены для выполнения многих заданий, и при выполнении каждого из заданий появляется избыточность в числе степеней свободы, объеме памяти и т.д. В одних системах, таких как УЦВМ, стремятся использовать появляющуюся избыточность за счет одновременного выполнения заданий, организуют вычислительные системы с разделением времени между пользователями.

В других многоцелевых системах, таких как манипулятор, наличие избыточных степеней свободы, во-первых, вызывает трудности в управлении системой, во-вторых, позволяет повысить точность и надежность выполнения заданий.

Целью настоящей работы не является анализ различных много- и одноцелевых систем с избыточностью, который примыкает к общей теории систем, в работе рассматривается вопрос об использовании избыточности, во-первых, в одноцелевых системах — вычислительных процессах для решения конечных и дифференциальных уравнений и их дискретных аналогах, и, во-вторых, в многоцелевых системах типа манипулятор. Эти две большие



задачи объединены общностью используемого математического аппарата и родством технических идей.

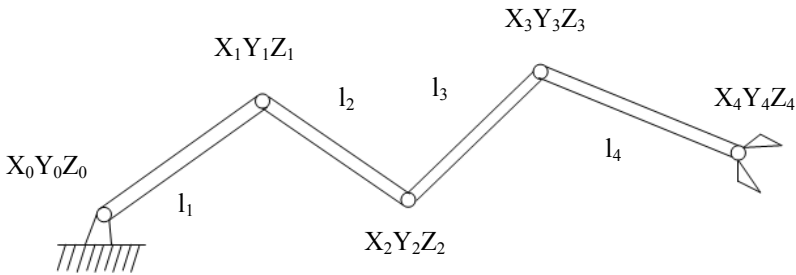
## § 1. Системы с естественной и искусственно введенной избыточностью

В живой природе встречается множество систем, в которых один какой-либо орган предназначен для решения многих разнородных задач. Например, человеческая рука является весьма универсальным инструментом.

Механические руки манипуляторов тоже предназначены для выполнения многих работ, поэтому их кинематические схемы содержат значительно большее число степеней свободы, чем то, которое необходимо для выполнения какой-либо одной работы. На рис. 1 изображена кинематическая схема руки манипулятора, где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты шарниров. Каждый шарнир обычно имеет одну или две угловых степени свободы, изменяя которые с помощью автоматизированного привода, изменяют положение конечной точки руки-схвата с инструментом так, чтобы выполнить ту или иную работу — завинтить гайку, взять предмет и перенести его в заданное место и т.п. Для выработки сигналов, управляющих приводами руки манипулятора, необходимо построить ее математическую модель. Система алгебраических уравнений с переменными-координатами шарниров и может быть такой моделью:

$$\begin{aligned}(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 &= l_1^2, \\(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= l_2^2, \\(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 &= l_3^2, \\(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 + (z_3 - z_4)^2 &= l_4^2,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $l_i, i = 1, 2, 3, 4$  — длины соответствующих стержней.



**Рис. 1. Кинематическая схема руки манипулятора**

Определение координат шарниров в функции от координат схвата  $x_4, y_4, z_4$ , которые обычно задаются с верхнего уровня управления, и составляет главную задачу управления манипулятором. Для ее решения необходимо решать систему уравнений (1.1), в которой число переменных больше числа уравнений связи. Если в качестве переменных рассматривать угловые координаты в шарнирах, то опять-таки ситуация останется прежней — в математической модели число уравнений связи будет меньше числа переменных.

Анализ различных многоцелевых систем типа манипулятор показывает, что они описываются системами конечных уравнений, в которых число переменных больше числа уравнений:

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = 1, 2, \dots, m, m \leq n. \quad (1.2)$$

Разница в числе переменных и числе уравнений  $n-m$  называется *естественной избыточностью систем типа манипулятор*.

Рассматриваемые нами однофункциональные системы предназначены либо для решения систем конечных уравнений типа (1.2), либо для решения обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), x_i(0) = x_{i0}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

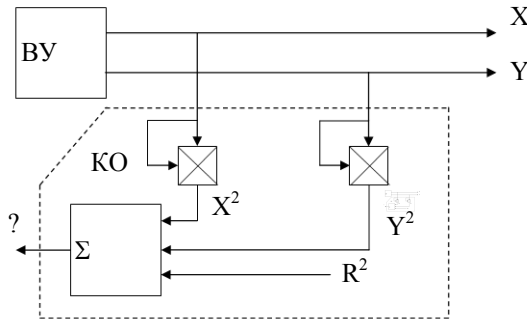
либо для решения смешанных систем этих типов. В такие системы искусственно вводят избыточность для улучшения качества вычислительного процесса. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Многие задачи описываются уравнениями (1.2, 1.3). Вычислительные процессы для решения этих уравнений реализуются на цифровых и аналоговых вычислительных машинах и устройствах и протекают при наличии различных помех, сбоев и отказов. Поэтому возникает необходимость контролировать вычислительный процесс и корректировать его в зависимости от результатов контроля.

Вычислительные устройства предназначены для решения тех или иных уравнений, и поэтому логично контролировать их по тому, как эти уравнения решаются. Например, если требуется воспроизвести окружность:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (1.3a)$$

— такая задача часто встречается при программном управлении станками [26] — то резонно проверять работу такого вычислительного устройства (рис. 2) по выполнению функции (1.3a), т.е. выработанные устройством величины  $x$  и  $y$  в виде напряжений или числовых кодов должны поступать в контрольный орган КО, где они должны возводиться в квадрат, складываться, и результат должен сравниваться с величиной  $R^2$ . Если результат сравнения равен 0, то вычислительное устройство работает правильно, если же разница между ними выходит за пределы допустимого, то это свидетельствует о неисправности устройства, и его надо корректировать. Такой способ контроля можно назвать контролем по воспроизводимой функции.



**Рис. 2. Схема вычислительного устройства с контролем по вычислительной функции**

Оценим возможности такого контроля. Во-первых, оценим сложность вычислительного устройства и контрольного органа. Как известно, окружность может воспроизводиться при решении дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x \quad (1.4)$$

с начальными условиями  $x(0)$  и  $y(0)$ , удовлетворяющими заданному конечному уравнению. Вычислительное устройство в этом случае может состоять из двух непрерывных интеграторов и одного инвертирующего усилителя или двух цифровых интеграторов с небольшим количеством логических схем. Контрольный орган в нашей задаче содержит два квадратора и сумматор. Он оказывается значительно сложнее самого вычислительного устройства, и достоверность такого контроля невелика. Это лишь один недостаток контроля по воспроизводимой функции.

Другой его недостаток, пожалуй, самый существенный, заключается в том, что часто неизвестны функции, которые должны получиться в процессе решения. Например, если в устройстве решается система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t), \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t), \quad (1.5)$$

то в большинстве случаев совершенно неизвестен первый интеграл, неизвестно конечное уравнение, которое связывает переменные  $x$  и  $y$ , и которое может быть использовано для построения такого контрольного органа.

Таким образом, необходим какой-то другой подход к осуществлению контроля над вычислительным процессом. Контроль можно было бы осуществить, если бы удалось примешать к основной задаче, которую требуется решать в устройстве, какую-то дополнительную, простую, и по правильности решения этой дополнительной, контрольной задачи судить о правильности решения основной задачи. Но применить эту идею хотя бы к решению уравнения окружности нельзя, так как если мы свяжем переменные  $x$  и  $y$  каким-либо другим уравнением, например,

$$x + y = 0, \quad (1.6)$$

то это будет противоречить исходному уравнению (1.3а). Ведь это уравнение задает все точки на окружности, а система уравнений (1.3а) и (1.6) будет определять лишь две точки, что недопустимо.

Но если ввести новую, третью переменную в задачу, искусственно ввести избыточность, то оказывается возможным наложить контрольное условие. Действительно, если положить

$$x = \sum a_j x_j, y = \sum b_j x_j, j = 1, 2, 3, \quad (1.7)$$

то вместо исходного уравнения (1.3) получим уравнение:

$$(\sum_{j=1}^3 a_j x_j)^2 + (\sum_{j=1}^3 b_j x_j)^2 = R^2, \quad (1.8)$$

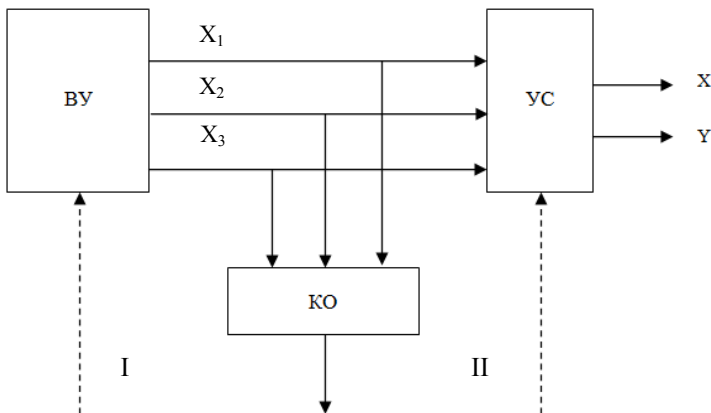
которое определяет целую поверхность в трехмерном пространстве. И вот на новые переменные уже можно наложить дополнительное контрольное условие, например, такое:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (1.9)$$

Таким образом, в вычислительном устройстве теперь будут решаться уравнения (1.8) и (1.9), и по правильности решения простейшего из них можно будет судить о правильности решения всей задачи в целом. С помощью уравнений (1.7) осуществляется обратный переход от вычисленных и проконтролированных переменных  $x_j, j = 1, 2, 3$  к исходным переменным  $x$  и  $y$ . Схема вычислительного процесса для этого случая изображена на рис. 3.

В контрольном органе решается уравнение (1.9). Сигнал ошибки, полученный на выходе контрольного органа, может быть использован для коррекции вычислительного процесса с помощью обратной связи (пунктирная линия I на рис. 3) или с помощью коррекции вперед (пунктирная линия II на рис. 3).

В блоке УС — устройство сжатия — осуществляется преобразование (1.7).



**Рис. 3. Схема вычислительного процесса с коррекцией**

Так удается охватить вычислительный процесс обратной связью, контролировать и корректировать его. Этот метод был назван методом избыточных переменных (МИП). Выше на простом примере была проиллюстрирована основная идея МИП.

Рассмотрим подробнее вопрос о введении избыточных переменных в исходную задачу и наложении дополнительных условий.

Если исходная задача заключается в нахождении функций  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющих нескольким конечным уравнениям:

$$\begin{aligned}
 F_1(y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0, \\
 \dots \\
 F_m(y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0, \quad m \leq n,
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

и если контрольная задача:

$$\begin{aligned}
 F_{m+1}(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+n_1}) &= 0 \\
 \dots \\
 F_{m+m_1}(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+n_1}) &= 0, \quad m_1 \leq n_1,
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

то перемешать эти две задачи можно, введя новые переменные:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n + 1, \dots, n + n_1, \quad n_2 \geq n + n_1. \tag{1.12}$$

После такой замены переменных получим уравнения:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}) = 0, \\ \dots \\ F_{m+m_1}(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

которые необходимо решать совместно. При этом возникают своеобразные проблемы, связанные с совместимостью этих уравнений. С помощью уравнений (1.12) осуществляется нелинейное введение избыточности, наиболее разработанный вариант — это линейное решение, когда

$$y_i = \sum_{j=1}^{n_2} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n + n_1. \quad (1.14)$$

Довольно часто применяется другой способ введения избыточности, когда

$$y_i = \sum_{j=1}^{n_2} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.15)$$

А дополнительные условия формируются сразу как условия для  $x_j$ , например,

$$\begin{cases} F_{m+1}^*(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}) = 0, \\ \dots \\ F_{m+m_1}^*(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}) = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Очевидно, что эти два способа эквивалентны, если для любой функции (1.11) можно указать после подстановки новых переменных аналогичную ей функцию (1.16), и наоборот. Ясно, что различия возникают при обратном переходе от (1.16) к (1.11) и определяются их видом и возможностью объединять  $x_j$  в группы, число которых не больше  $n_1$ . Таким образом, второй способ является более общим, чем первый, но очень часто они совпадают.

Третий способ введения избыточности может быть назван проективным способом. Он заключается в следующем. Будем представлять исходную функцию  $F_1(x, y) = 0$  как проекцию пересечения функций  $F_2(x, y, z) = 0$  и  $F_3(x, y, z) = 0$  на пространство  $x, y$ . Для того, чтобы проекция соответствовала  $F_1$ , необходимо, чтобы  $F_2[x, y, \varphi(x, y)] \equiv F_1(x, y) = 0$ , где  $\varphi(x, y) = z$  и определяется из уравнения  $F_3$ . Этот способ легко обобщается на любое число

исходных уравнений с любым числом исходных и избыточных переменных.

Если исходная задача заключается в решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, t), y_i(0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.17)$$

то ввести избыточность опять-таки можно несколькими, по крайней мере двумя, способами. Для удобства запишем систему (1.17) в виде уравнений Пфаффа и будем считать время равноправной переменной  $y_n = t$ ,

$$dy_i - f_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, t)dy_n = 0, y_i(0) = y_{i0}, \quad (1.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Тогда контрольную задачу зададим тоже в виде уравнений Пфаффа:

$$dy_j - f_j(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+n_1}, t)dy_n = 0, y_j(0) = y_{j0}, \quad (1.19)$$

$$i = n+1, n+2, \dots, n+n_1,$$

и задачи (1.18) и (1.19) можно перемешать, вводя избыточность в виде (1.12), где функции  $\varphi_i$  должны быть дифференцируемыми, уравнения Пфаффа расширенной системы в этом случае будут иметь вид:

$$\sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j - f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}) \sum_{j=1}^{n_2} dx_j \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} = 0, \quad (1.20)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Возможен и другой способ введения избыточности, когда сначала осуществляется подстановка типа (1.15), а дополнительные условия формулируются сразу как условия для  $x_j$  либо в виде конечных уравнений (1.16), либо в виде соответствующих уравнений Пфаффа.

Таким образом, построение расширенных структур складывается из двух операций: введения новых переменных и введения новых условий. Как было показано выше, они могут меняться местами или применяться одновременно, как это имеет место в проективном методе.



## § 2. О структуре уравнений систем с избыточностью

Построение любого вычислительного процесса связано с выделением выходных переменных среди исследуемых основных соотношений и с организацией такого процесса, чтобы эти переменные вычислялись в функции от входных параметров. Назначение выходных переменных и входных параметров в основных соотношениях осуществляется в процессе постановки задачи. Как было показано в предыдущем параграфе, системы с избыточностью описываются конечными уравнениями или уравнением Пфаффа, причем число переменных в них равно или больше числа уравнений связи. Уравнения Пфаффа являются квазилинейными уравнениями относительно дифференциалов переменных, а конечные уравнения могут быть приведены к квазилинейному виду либо путем дифференцирования, либо путем выделения выходных переменных среди групп слагаемых в уравнениях. Таким образом, для определения структуры уравнений систем с избыточностью необходимо исследование квазилинейных систем с неопределенностью, что является нетривиальной задачей.

Пусть поведение системы с избыточностью задано в виде:

$$\begin{matrix} Q \\ (m \times n) \end{matrix} * \begin{matrix} X \\ (n \times l) \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ (m \times l) \end{matrix} \quad n > m, \quad (2.1)$$

где

$\begin{matrix} Q \\ (m \times n) \end{matrix} = \parallel q_{ij} \parallel_{m,n}$  — матрица коэффициентов,

$\begin{matrix} X \\ (n \times l) \end{matrix} = \parallel x_j \parallel_{n,l}$  — матрица-столбец выходных переменных или их дифференциалов.

При исследовании таких систем в алгебре [19] принято избавляться от неопределенности путем разделения переменных системы на две группы: на группу главных и группу свободных переменных, при этом число главных переменных меньше или равно числу уравнений связи. Главные переменные определяются в функции от свободных переменных и матрицы коэффициента. В этом случае исследуется частная система, полученная из общей системы (2.1), что при изучении ее поведения в целом является неудобным и при отсутствии априорной информации о коэффициентах  $q_{ij}$  приводит к плохой обусловленности решения или

некорректности. Поэтому мы пойдём другим путем, будем строить общее решение системы — вектор  $X$  в функции от коэффициентов  $q_{ij}$  и группы новых переменных — произвольных коэффициентов  $u$ . Зададим конкретные значения этим коэффициентам, будем получать частные решения системы, будем осуществлять задание различного поведения на заданных многообразиях [3, 4] (2.1).

Рассмотрение будем вести методом математической индукции. Вначале рассмотрим одно уравнение:

$$\sum_{j=1}^n Q_j x_j = 0. \quad (2.2)$$

Ограничимся достаточно общим случаем, когда функции  $x_j$  представляются в виде линейных комбинаций функций  $Q_j$ .

Будем искать их в виде:

$$x_j = \sum_{i=1}^n c_{ji} Q_i, \quad (2.3)$$

где  $c_{ji} = c_{ji}(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  — непрерывные функции.

Подставив (2.3) в (2.2) и приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} & c_{11} Q_1 Q_1 + (c_{12} + c_{21}) Q_1 Q_2 + \dots + (c_{1n} + c_{n1}) Q_1 Q_n + \\ & + c_{22} Q_2 Q_2 + \dots + (c_{2n} + c_{n2}) Q_2 Q_n + \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + c_{nn} Q_n Q_n = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поскольку в общем случае не предполагается линейная зависимость произведений  $Q_i Q_j$ , то для удовлетворения 2.4 при всех  $t$  все коэффициенты перед произведениями  $Q_i Q_j$  должны обращаться в нуль, отсюда

$$C_{ij} = 0, \quad i = j,$$

$C_{ij} = -C_{ji}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$ , т.е. матрица коэффициентов является кососимметричной, с нулями на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_{1n} & -c_{2n} & -c_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Всего различных ненулевых коэффициентов  $C_{ij}$  будет:

$$S, = \frac{1}{2}(n^2 - n) = c_n^2.$$

Если имеем два уравнения:

$$\sum_{j=1}^n Q'_j x_j = 0 \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^n Q''_j x_j = 0, \quad (2.7)$$

то, в соответствии с изложенным выше, с одной стороны

$$x_j = \sum_{i=1}^n c_{ji} Q'_i, \quad (2.8)$$

а с другой стороны

$$x_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} Q''_i, \quad (2.9)$$

где  $C_{ij}$  и  $d_{ij}$  — произвольные непрерывные функции времени координат. Очевидно, коэффициенты  $C_{ij}$  можно считать в этом случае линейными комбинациями  $Q''_i$ :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{jik} Q''_k. \quad (2.10)$$

Подставляя теперь (2.10) в (2.8), получим:

$$x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jik} Q'_i Q''_k. \quad (2.11)$$

Матрица  $\|C_{ij}\|$  имеет вид (2.5), поэтому

$$\sum_{k=1}^n c_{jik} Q''_k = 0, \quad i = j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{k=1}^n c_{jik} Q''_k = \sum_{k=1}^n -c_{ijk} Q''_k, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку  $Q''_k$  вообще линейно независимы, то отсюда

$$c_{jik} = 0, \quad i = j,$$

$$c_{ijk} = -c_{jik}, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

Аналогичным способом из (2.9) получаем:

$$c_{jik} = 0, \quad i = k,$$

$$c_{kij} = -c_{jik}, \quad i \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

Из свойств (2.12) и (2.13) следует, что

$$c_{ijk} = -c_{jik} = c_{kij} = -c_{ikj} = c_{jki} = -c_{kji} \quad (2.14)$$

в случае, когда все три числа  $i, j, k$  различные и

$$c_{ijk} = 0, i, j, k = 1, 2, \dots, n,$$

если хотя бы два из них равны между собой. Значит, из всех  $n^3$  элементов матрицы  $c_{ijk}$  не обращаются в нуль только те, у которых индексы разные. Такие тройки индексов образуют множество размещений  $A_n^3$ . Если учесть (2.14), т.е. тот факт, что все коэффициенты, у которых тройки индексов различаются между собой лишь порядком, то количество различных произвольных коэффициентов будет меньше. Тройки, различающиеся лишь порядком, образуют множество перестановок  $P_3$ . Отсюда получаем, что число  $S_2$  всех различных ненулевых произвольных коэффициентов  $c_{ijk}$  равно числу сочетаний из  $n$  по 3:

$$S_2 = \frac{A_n^3}{P_3} = C_n^3. \quad (2.15)$$

Определим закон изменения знака в группах коэффициентов с одинаковыми тройками индексов. Рассмотрим множество коэффициентов с индексами  $i, j, k$ . Пусть  $i < j < k$ . Положим  $c_{ijk} = u$ . Тогда из (2.14) имеем

$$c_{ijk} = u, c_{ikj} = -u, c_{jik} = -u, c_{jki} = u, c_{kij} = u, c_{kji} = -u.$$

Теперь мы можем написать матрицу  $\|c_{ijk}\|$  для любого  $n$ . Например, эта матрица для  $n = 3$  будет иметь вид:

i	k			1			2			3		
	j	1	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
1		0	0	0	0	0	0	0	$u^2$	0	$-u$	0
2		0	0	$-u$	0	0	0	0	0	$u$	0	0
3		0	$u^2$	0	$-u$	0	0	0	0	0	0	0

а уравнения в соответствии с этой матрицей будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1(Q_2'Q_3'' - Q_3'Q_2''), \\ x_2 &= -u_1(Q_1'Q_3'' - Q_3'Q_1''), \\ x_3 &= u_1(Q_1'Q_2'' - Q_2'Q_1''). \end{aligned}$$

Аналогичным образом и для любого числа уравнений:

$$\sum_{j=1}^n Q'_j x_j = 0, \dots, \sum_{j=1}^n Q_j^m x_j = 0.$$

С любым числом переменных  $n > m$  определяется структура уравнений для  $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ . Число произвольных коэффициентов в этом случае будет равно:

$$S = C_n^{m+1}. \quad (2.16)$$

На основании изложенного выше был предложен следующий алгоритм определения структур уравнений с неопределенными коэффициентами. Пусть требуется найти дифференциальные уравнения, решения которых располагаются на поверхностях:

$$F_j = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.17)$$

Вначале задаются произвольные коэффициенты, число которых в данном случае  $C_4^3 = 4$ ,

$$u_1 = |123|, u_2 = |124|, u_3 = |134|, u_4 = |234|.$$

Эта запись означает, что коэффициент  $u_1$  соответствует сочетанию 123, коэффициент  $u_2$  соответствует другому сочетанию 124 и т.д.

Коэффициенты, которые соответствуют сочетаниям, содержащим 1, располагаются в первой строке; коэффициенты, которые соответствуют сочетаниям, содержащим 2, располагаются во второй строке и т.д., то есть:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1 D_{23}^1 + u_2 D_{24}^1 + u_3 D_{34}^1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 D_{13}^2 - u_2 D_{14}^2 + u_4 D_{34}^2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= u_1 D_{12}^3 - u_3 D_{14}^3 - u_4 D_{24}^3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= u_2 D_{12}^4 + u_3 D_{13}^4 + u_4 D_{23}^4, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где буквой  $D$  обозначена сумма из произведений частных производных от функции (2.17) по переменным, индексы которых входят в нижний индекс у буквы  $D$ :

$$D_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \text{ и т.д.}$$

Верхний индекс у буквы  $D$  означает строку.

Знаки перед членами уравнений (2.18) определяются по следующему закону: рассматривается порядок верхних и нижних индексов у буквы  $D$ , например, против часовой стрелки, и если имеется нечетное число нарушений порядка, то перед этим членом ставится минус, в других случаях ставится плюс. То есть для членов верхней строки имеем порядки: 123, 124, 134 — в них нет нарушений, и они идут с плюсом; во второй строке имеем 213 — одно нарушение (2 больше 1) — знак минус, 214 — знак минус, 234 — нарушений нет — знак плюс, и т.д.

Заметим, что решения уравнений (2.18) располагаются на поверхностях (2.17) лишь в том случае, если начальные условия системы (2.18) удовлетворяют уравнению (2.17).

Наличие неопределенных коэффициентов в структуре уравнений позволяет управлять поведением такой системы, оставаясь на заданных многообразиях. Например, для задания движения координаты  $x_4$  к максимуму можно положить:

$$u_2 = D_{12}, u_3 = D_{13}, u_4 = D_{23},$$

после чего система (2.18) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= u_1 D_{23} + D_{12} D_{24} + D_{13} D_{34}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -u_1 D_{13} - D_{12} D_{14} + D_{23} D_{34}, \\ \frac{\partial x_3}{\partial t} &= u_1 D_{12} - D_{13} D_{14} - D_{23} D_{24}, \\ \frac{\partial x_4}{\partial t} &= (D_{12})^2 + (D_{13})^2 + (D_{23})^2, \end{aligned}$$

где правая часть последнего уравнения является законопостоянной положительной функцией, что и обеспечивает устойчивое движение к максимуму координаты  $x_4$ .

Рассмотрим еще один пример. Если требуется найти общее решение уравнения:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2px_3,$$

то получить исходную квазилинейную форму можно двумя путями.

Во-первых, путем дифференцирования мы получим:

$$2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 - 2p dx_3 = 0,$$

откуда в соответствии с вышеописанной методикой:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= u_1 2x_2 + u_2 (-2p), \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -u_1 2x_1 + u_3 (-2p), \\ \frac{\partial x_3}{\partial t} &= -u_2 2x_1 - u_3 (-2x_2),\end{aligned}$$

интегрируя которые для начальных условий  $x_{10}^2 + x_{20}^2 = 2p$  и получим траектории на поверхности заданного параболоида вращения.

Во-вторых, в исходном уравнении можно выделить входные и выходные параметры  $q_i$ :

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 = 0,$$

где  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2$ ,  $q_3 = -2p$ .

Общее решение тогда имеет аналогичный вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_2 & q_3 & 0 \\ -q_1 & 0 & q_3 \\ 0 & -q_1 & -q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}.$$

Задавая различные значения коэффициентам  $u_s$ , будем получать различные точки на параболоиде вращения.

В качестве последнего примера рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка:

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = F, \quad (2.19)$$

где  $A, B, C, a, b, c, F$  — дифференцируемые функции  $x, y, z$ .

Обозначив через

$$Q_1 = A(x, y, t), Q_2 = 2B(x, y, t), Q_3 = C(x, y, t),$$

$$Q_4 = a(x, y, t), Q_5 = b(x, y, t), Q_6 = c(x, y, t),$$

$$Q_7 = -F(x, y, t), P_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, P_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, P_3 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$P_4 = \frac{\partial z}{\partial x}, P_5 = \frac{\partial z}{\partial y}, P_6 = z, P_7 = 1,$$

получим квазилинейную форму  $\sum_{i=1}^7 Q_i P_i = 0$ , из которой можем найти уравнения всех  $P_i$  через  $Q_i$  и произвольные коэффициенты в соответствии с нашей методикой. В данном случае число произвольных коэффициентов равно  $C_7^2 = 21$ , и функции  $P_i$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = u_1 2B + u_2 C + u_3 a + u_4 b + u_5 c - u_6 F, \\ P_2 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -u_1 A + u_7 C + u_8 a + u_9 b + u_{10} c - u_{11} F, \\ P_3 &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -u_2 A - u_7 2B + u_{12} a + u_{13} b + u_{14} c - u_{15} F, \\ P_4 &= \frac{\partial z}{\partial x} = -u_3 A - u_8 2B - u_{12} C + u_{16} b + u_{17} c - u_{18} F, \\ P_5 &= \frac{\partial z}{\partial y} = -u_4 A - u_9 2B - u_{13} C - u_{16} a + u_{19} c - u_{20} F, \\ P_6 &= z = -u_5 A - u_{10} 2B - u_{14} C - u_{17} a - u_{19} b - u_{21} F, \\ P_7 &= 1 = -u_6 A - u_{11} 2B - u_{15} C - u_{18} a - u_{20} b - u_{21} c. \end{aligned}$$

Неопределенные коэффициенты в структуре этих уравнений можно использовать для удовлетворения начальных и краевых условий и для определения значений искомой функции в интересующих точках.

Следует заметить, что при построении общего решения уравнений нами использованы все линейные комбинации частных решений этих уравнений. Структура полученного общего решения является равноправной относительно миноров коэффициентов исходных уравнений, что позволяет, в частности, задавать любые движения на исходных многообразиях. Структура уравнений, полученная при использовании лишь минимально необходимого числа частных решений исходной однородной системы уравнений, составляющих фундаментальную систему решений, будет содержать меньшее число произвольных коэффициентов, но она не будет равноправной относительно всех миноров коэффициентов исходных уравнений. Рассмотрим пример.

Если имеем исходное уравнение:

$$\sum_{i=1}^3 Q_i dx_i = 0,$$



то полученное по нашему методу общее решение будет:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= u_1 Q_2 + u_2 Q_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 Q_1 + u_3 Q_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -u_2 Q_1 - u_3 Q_2,\end{aligned}$$

а общее решение, полученное как линейная комбинация двух частных решений, составляющих фундаментальную систему, будет:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \vartheta_1 Q_2 + \vartheta_2 Q_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\vartheta_1 Q_1, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\vartheta_2 Q_1.\end{aligned}$$

Очевидно, что последняя система уравнений отдает предпочтение коэффициенту  $Q_1$ , предполагается, что  $Q_1 \neq 0$ , отсюда следует неравноправность этой системы уравнений относительно  $Q_i$ . Эта система уравнений является частным случаем системы, построенной по нашему методу при  $u_3 = 0$ .

Наличие избыточного числа произвольных коэффициентов позволяет избежать многочисленных ситуаций особых точек, которые возникают при использовании общих решений, построенных лишь на минимальном числе частных решений.

### § 3. Об эквивалентности исходных и расширенных систем

Всякое увеличение надежности, точности, быстродействия связано с эквивалентным преобразованием исходных уравнений, алгоритмов, схем. При этом эквивалентность в каждом конкретном случае понимается по-разному, и если сохраняется эквивалентность по отношению к какому-либо одному качеству, то относительно других качеств она нарушается, за счет чего и достигается выигрыш в заданном смысле. При построении расширенных структур по методу избыточных переменных будем исследовать эквивалентность между исходными уравнениями и уравнениями, полученными после сжатия расширенной системы.

При этом вычислительный процесс будем полагать идеальным, и рассмотрение будем вести в отсутствие помех. При действии помех эквивалентность в указанном выше смысле нарушается для разных избыточных и исходных систем по-разному, рассмотрению этого вопроса посвящены остальные параграфы настоящего пособия.

Два множества  $M$  и  $N$  называются эквивалентными ( $M \sim N$ ), если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие [17]. В нашем случае множество  $M$  — это множество решений исходных уравнений, множество  $N$  — это множество решений, полученных после применения к решениям расширенных систем уравнений. Относительно исходных уравнений будем предполагать, что решение исходной системы существует и единственно в заданной области изменения переменных. Как следует из доказательства теоремы о существовании и единственности, это означает, что для каждого из решений  $y_i$  существует ряд:

$$y_0^i + \sum_{n=1} (y_n^i - y_{n-1}^i),$$

сходимость которого доказывается с помощью оценок сверху. Для доказательства взаимнооднозначного соответствия множеств  $M$  и  $N$  мы будем сравнивать соответствующие решениям ряды.

Итак, если решение исходного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), y(0) = y_0 \quad (3.1)$$

в заданной области изменения переменных

$$t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

существует и единственно, т.е. если

$$|f(y, t)| \leq M \quad (3.2)$$

$$|f(\bar{y}, t) - f(\bar{y}, t)| \leq N |\bar{y} - \bar{y}|, \text{ где } \left| \frac{df}{dy} \right|_{\max} = N$$

в этой области изменения переменных, то сумма построенного по методу последовательных приближений ряда:

$$y_0 + \sum_{n=1} (y_n - y_{n-1}) = y_n, \quad (3.3)$$

где

$$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^t f(y_0, t) dt, y_2 = y_0 + \int_{t_0}^t f(y_1, t) dt, \dots,$$

$$y_n = y_0 + \int_{t_0}^t f(y_{n-1}, t) dt,$$

и соответствующий ей ряд равномерно сходится, так как ограничен сверху рядом:

$$y_0 + M|t - t_0| + \sum_{n=2} MN^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!}. \quad (3.4)$$

Теперь рассмотрим простейшую расширенную систему, для чего положим

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2, m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0. \quad (3.5)$$

Тогда для исходной задачи (3.1) получим расширенную систему в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{m_2}{\delta} f(y, t) = f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{m_1}{\delta} f(y, t) = f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

где

$$|f_1(x_1, x_2, t)| \leq \left| \frac{m_2}{\delta} \right| M,$$

$$|f_2(x_1, x_2, t)| \leq \left| \frac{m_1}{\delta} \right| M,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix},$$

а условия Липшица в соответствии с (3.2):

$$|f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) - f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t)| \leq \left\{ \left| \frac{a_1 m_2}{\delta} \right| |\bar{x}_1 - \bar{x}_1| + \left| \frac{a_2 m_2}{\delta} \right| |\bar{x}_2 - \bar{x}_2| \right\} N, \quad (3.7)$$

$$|f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) - f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t)| \leq \left\{ \left| \frac{a_1 m_1}{\delta} \right| |\bar{x}_1 - \bar{x}_1| + \left| \frac{a_2 m_1}{\delta} \right| |\bar{x}_2 - \bar{x}_2| \right\} N.$$

Для уравнений (3.6) будем рассматривать частичные суммы рядов:

$$x_1^0 + \sum_{n=1} (x_1^n - x_1^{n-1}) = x_1^n,$$

$$x_2^0 + \sum_{n=1} (x_2^n - x_2^{n-1}) = x_2^n, \quad (3.8)$$

где

$$x_1^1 = x_1^0 + \int_{t_0}^t f_1(x_1^0, x_2^0, t) dt, \quad x_2^1 = x_2^0 + \int_{t_0}^t f_2(x_1^0, x_2^0, t) dt,$$

$$x_1^2 = x_1^0 + \int_{t_0}^t f_1(x_1^1, x_2^1, t) dt, \quad x_2^2 = x_2^0 + \int_{t_0}^t f_2(x_1^1, x_2^1, t) dt,$$

...

$$x_1^n = x_1^0 + \int_{t_0}^t f_1(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, t) dt, \quad x_2^n = x_2^0 + \int_{t_0}^t f_2(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, t) dt.$$

Во-первых, в соответствии с первой формулой (3.5) сложим частичные суммы рядов (3.8) и исследуем, чем получающаяся сумма отличается от суммы (3.3).

$$\begin{aligned} y_n &= a_1 x_1^n + a_2 x_2^n = \\ &= a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + (a_1 x_1^0 + a_1 \int_{t_0}^t \frac{m_2}{\delta} f(y_0, t) dt + a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \\ &+ a_2 \int_{t_0}^t \frac{-m_1}{\delta} f(y_0, t) dt - a_2 x_2^0 + \dots, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  можно ввести под знак интеграла, если они постоянные величины. В этом случае получим

$$\begin{aligned} a_1 x_1^0 + a_1 \int_{t_0}^t \frac{m_2}{\delta} f(y_0, t) dt + a_2 \int_{t_0}^t \frac{-m_1}{\delta} f(y_0, t) dt + a_2 x_2^0 &= \\ = y_0 + \int_{t_0}^t \frac{a_1 m_2 - a_2 m_1}{\delta} f(y_0, t) dt = y_0 + \int_{t_0}^t f(y_0, t) dt \end{aligned}$$

по построению. Откуда следует, что при линейном расширении с постоянными коэффициентами сумма рядов (3.8) полностью совпадает с суммой (3.3), что доказывает эквивалентность исходной и расширенной систем. При этом очевидно, что начальные условия для системы (3.6) должны быть такими, чтобы  $y_0 = a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0$ .

Аналогичный результат получается и для нелинейных контрольных условий, когда вместо уравнений (3.5) имеем уравнения:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2, F(x_1, x_2) = 0. \quad (3.9)$$

В этом случае в уравнениях (3.6):

$$m_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, m_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

при переменном условии:

$$\delta = \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{array} \right| \neq 0 \quad (3.10)$$

в заданном диапазоне изменения переменных.

Если имеем дело с гибкой структурой, то для рассматриваемого примера:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

контрольного условия нет, и уравнение Пфаффа будет:

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 - f(x_1, x_2, t) dt = 0,$$

откуда эквивалентная система дифференциальных уравнений будет:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = u_1 a_2 - u_2 f(x_1, x_2, t) = f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = -u_1 a_1 - u_3 f(x_1, x_2, t) = f_2(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_3}{dt} = -u_2 a_1 - u_3 a_3 = 1 \end{array} \right\}, \quad (3.11)$$

и после сложения сумм (3.8) получим, например,

$$\begin{aligned} y' &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \int_{t_0}^t (a_1 f_1(x_1, x_2, t) + a_2 f_2(x_1, x_2, t)) dt = \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t [(u_1 a_1 a_2 - u_1 a_2 a_1) + (-u_2 a_1 - u_3 a_2) f(x_1^0, x_2^0, t)] dt = \\ &= y^0 + \int_{t_0}^t f(y^0, t) dt \text{ и т.д.,} \end{aligned}$$

что опять-таки доказывает полную эквивалентность исходной и расширенной систем.

Осложнения возникают в случае нелинейного расширения, когда  $a_i = var$ ,  $i = 1, 2$  или  $y = G(x_1, x_2)$  или даже  $G(y, x_1, x_2) = 0$ . В этом случае можно прибегнуть к анализу с помощью мажорантных рядов типа (3.4). Найдем оценки сверху для сумм рядов (3.8):

$$\begin{aligned} |x_1^n - x_1^{n-1}| &\leq M \left| \frac{m_1}{\delta} \right| N_1^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!}, \\ |x_2^n - x_2^{n-1}| &\leq M \left| \frac{m_2}{\delta} \right| N_1^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $N_1 = N \frac{|a_1 m_2| + |a_2 m_1|}{|\delta|}$ .

Таким образом, суммы (3.8) ограничены сверху частичными суммами рядов:

$$\begin{aligned} x_1^n &= x_1^0 + M_1 |t - t_0| + \sum_{n=2} M_1 N_1^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!}, \\ x_2^n &= x_2^0 + M_2 |t - t_0| + \sum_{n=2} M_2 N_2^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!}, \end{aligned}$$

где  $M_1 = M \left| \frac{m_2}{\delta} \right|$ ,  $M_2 = M \left| \frac{m_1}{\delta} \right|$ . (3.13)

Из рассмотрения суммы рядов  $a_1 x_1^n + a_2 x_2^n$  в соответствии с (3.13), очевидно, что эта сумма будет рядом, который тождественно совпадает с рядом (3.4) только лишь в случае, если

$$|a_1 m_2| + |a_2 m_1| = |a_1 m_2 - a_2 m_1|. \quad (3.14)$$

Выполнение этого условия достаточно для эквивалентности исходной и расширенной систем, оно справедливо и в случае нелинейного расширения, а для линейного расширения может быть существенно ослаблено, как было показано выше.

Заметим, что и без введения избыточных переменных, при нелинейном преобразовании переменных, которое иногда предпринимается для упрощения правых частей дифференциальных уравнений, возникают существенные ограничения на вид такого преобразования для сохранения эквивалентности. Поэтому далее, если не будет сделано специальных оговорок, будем пользоваться только линейными расширениями.

Итогом вышеизложенного рассмотрения вопроса об эквивалентности может быть следующая теорема: если для исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой существует и единственно в заданном диапазоне изменения переменных, построена расширенная система дифференциальных уравнений в соответствии с методикой § 2, и при этом исходные переменные являются линейными формами с постоянными коэффициентами от новых переменных расширенной системы, то такая исходная и расширенная системы эквивалентны.

В соответствии с этой теоремой, расширенные системы (3.6), (3.9) и (3.11) эквивалентны исходной системе (3.1). Если в качестве исходных заданы конечные уравнения, решение которых

можно свести к решению соответствующих дифференциальных уравнений, то вопрос об эквивалентности расширенных систем конечных уравнений их исходным решается с помощью этой теоремы с учетом соответствующих начальных условий.

Заметим, что в случае нелинейного расширения, если не пользоваться теоремой о преобразовании, то можно говорить об эквивалентности, опираясь лишь на факт невырожденности избыточного преобразования. Действительно, если

$$y = G(x_1, x_2), 0 = F(x_1, x_2), \quad (3.15)$$

$$\text{то } \frac{dy}{dt} = \frac{dG}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dG}{dx_2} \frac{dx_2}{dt},$$

$$y = \int_0^t \frac{dG}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} dt + \int_0^t \frac{dG}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} dt + y_0. \quad (3.16)$$

Уравнения для  $\frac{dx_1}{dt}$  и для  $\frac{dx_2}{dt}$  имеют вид (3.6), только в этом случае  $a_i = a_i(x_1, x_2) = \frac{\partial G}{\partial x_i}$ ,  $m_i = m_i(x_1, x_2)$ . Подставляя уравнения (3.6) в (2.16), получим:

$$y = y_0 + \int_{t_0}^t \frac{a_1(x_1, x_2)m_2(x_1, x_2) - a_2(x_1, x_2)m_1(x_1, x_2)}{\delta} f(y, t) dt = y_0 + \int_{t_0}^t f(y, t) dt,$$

при условии:

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Начальные условия для (3.6) в этом случае должны определяться из уравнения

$$y_0 = G(x_{10}, x_{20}), 0 = F(x_{10}, x_{20}).$$

Но ввиду большой важности вопроса об эквивалентности исходных и расширенных систем будем считать полностью доказанной только эквивалентность для линейного расширения.

## § 4. О контроле, диагностике и коррекции в избыточных структурах

При решении дифференциальных уравнений на вычислительных машинах возможны нарушения, во-первых, в начальных условиях, во-вторых, в правых частях уравнений, в-третьих, в самом операторе дифференцирования. И если в идеальной системе должна решаться система уравнений:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t), y_i(0) = y_{i0}, \quad (4.1)$$

то реально будет решаться система:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}_i}{dt} &= f_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n, t) + A_i(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, t), \tilde{y}_i(0) = \tilde{y}_{i0}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Очевидно, что нарушения в операторе дифференцирования также сводятся к аддитивной добавке аналогичного вида в правых частях реально решаемых систем уравнений.

Эти нарушения могут происходить из-за ошибок в программировании, из-за сбоев, наводок, дрейфов и отказов в вычислительной аппаратуре и из-за несовершенства численных методов решения уравнений. Если заранее ничего не известно о решении системы (4.1), то практически невозможно отделить правильное решение от неправильного.

Обычно различные априорные сведения используются для проверки правильности решения, но еще нет четко формализованного способа контроля решения уравнений. В настоящей работе делается попытка разработать такой способ [5].

При замене исходной системы (4.1) расширенной системой в соответствии с § 2, получим эквивалентную систему с большим числом переменных:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, t), x_j(0) = x_{j0}, j = 1, 2, \dots, n_1. \quad (4.3)$$

Вместо этой системы реально будет решаться другая система:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_j}{dt} &= f_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t) + A_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t), \tilde{x}_j(0) = \tilde{x}_{j0}, \\ j &= 1, 2, \dots, n_1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

которая уже не будет эквивалентна исходной системе (4.1).



Будем различать ошибки первичные и вторичные. Первичные ошибки определяются нарушением начальных условий и функциями  $A_j$  в правых частях. Эти ошибки являются причиной появления вторичных ошибок  $\tilde{x}_j - x_j = e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Линейные контрольные условия в виде первых сигналов системы (4.3) позволяют выявлять лишь первичные ошибки.

Действительно, если расширенная система имеет вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{m_2}{\delta} f(x_1, x_2, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{-m_1}{\delta} f(x_1, x_2, t),$$

то при действии непрерывно действующих возмущений будем иметь

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = \frac{m_2}{\delta} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) + A_1, \quad \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \frac{-m_1}{\delta} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) + A_2.$$

Полагая  $\tilde{x}_1 = x_1 + e_1$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2 + e_2$  и разлагая правые части уравнения в ряд Тейлора, получим:

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = \frac{m_2}{\delta} f(x_1, x_2, t) + \frac{m_2}{\delta} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \dots \right] + A_1,$$

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \frac{-m_1}{\delta} f(x_1, x_2, t) - \frac{m_1}{\delta} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \dots \right] + A_2.$$

Если контрольное условие:

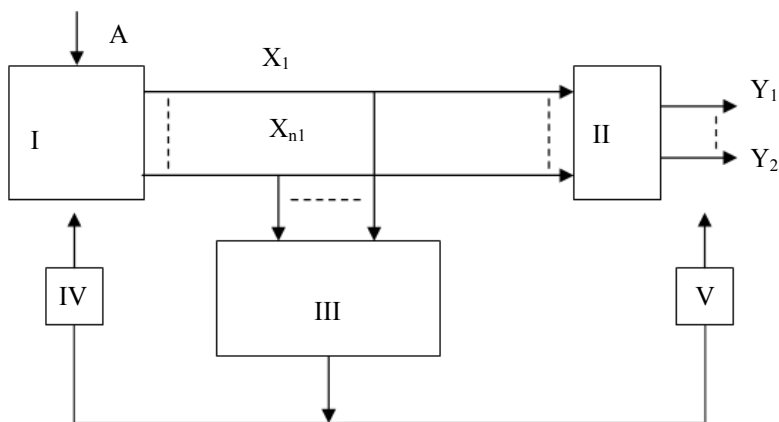
$$\Delta = m_1 \tilde{x}_1 + m_2 \tilde{x}_2,$$

$$\text{то } \frac{d\Delta}{dt} = m_1 \frac{d\tilde{x}_1}{dt} + m_2 \frac{d\tilde{x}_2}{dt} =$$

$$= \left\{ \frac{m_1 m_2 - m_1 m_2}{\delta} f(x_1, x_2, t) + \frac{m_1 m_2 - m_1 m_2}{\delta} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \dots \right] \right\} + m_1 A_1 + m_2 A_2.$$

В этом уравнении выражение в фигурных скобках тождественно равно нулю по построению. Таким образом, сигнал ошибки определяется только первичными ошибками, действующими на систему. Аналогичным образом это можно показать для любого числа переменных с линейными контрольными условиями. Целью дальнейшего рассмотрения является анализ возможностей контроля и коррекции избыточных структур. Возможности повышения их надежности и точности определяются тем, что при непрерывной зависимости решений от параметров уменьшение первичных ошибок ведет к уменьшению ошибок вторичных.

Появление сигнала ошибки свидетельствует о наличии первичных ошибок. Эта информация, которая доставляется контрольным органом, может быть использована в дальнейшем для устранения первичных ошибок либо с помощью обратных связей различного типа, либо с помощью коррекции вперед. На рис. 4 представлена избыточная структура с контролем и коррекцией, где в блоке I решаются расширенные системы уравнений; в блоке II осуществляется переход от избыточных переменных к исходным, блок II называется устройством сжатия; в блоке III осуществляется вычисление контрольных условий, это контрольный орган; в блоке IV вырабатываются сигналы для коррекции вперед; в блоке V вырабатываются сигналы обратной связи.



*Рис. 4. Избыточная структура с контролем и коррекцией*

Операция сжатия тоже может быть использована для борьбы с первичными ошибками. Анализируя коэффициенты влияния различных составляющих вектора помех на решения сжатой системы, можно показать, что за счет подбора параметров расширенной системы можно существенно уменьшить влияние первичных ошибок на решение. Подробнее об этом в § 5. Вообще на избыточную структуру действует больше помех, чем на исходную, но в избыточной структуре имеются возможности для борьбы с ними, изучению которых и посвящается изложенное ниже.

Относительно функций  $A_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n, t)$  и  $A_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, t)$  будем предполагать, что они таковы, что условия существования и единственности уравнений, их решения будут случайными процессами. Например, для (4.4) в векторной форме будем иметь:

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t, \xi(t, \omega)) \quad (4.5)$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x_0(\omega)$ , где  $\xi(t, \omega)$  ( $t \geq 0$ ) измеримый сепарабельный случайный процесс со значениями из  $E_k$ , а  $G(x, t, z)$  ( $x \in E_{n_1}, t \geq 0, z \in E_k$ ) — измеримая по Борелю относительно  $x, t, z$  функция, для которой существует случайный процесс  $B(t, \omega) \in L$  такой, что для всех  $x \in E_{n_1}$

$$|G(\bar{x}, t, \xi(t, \omega)) - G(\bar{x}, t, \xi(t, \omega))| \leq B(t, \omega)|\bar{x} - \bar{x}|$$

и процесс  $G(0, t, \xi(t, \omega)) \in L$ , т.е. для любого  $T > 0$

$$P \left\{ \int_0^T |G(0, t, \xi(t, \omega))| dt < \infty \right\} = 1.$$

Если выполнены эти условия, то решение  $x(t, \omega)$  для уравнений (4.5) существует, единственно и представляет собой абсолютно непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс при всех  $t \geq t_0$ .

1. Рассмотрим систему с одним линейным контрольным условием:

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 x_j = 0, m_j^1 = \text{const.} \quad (4.6)$$

Это условие выполняется для системы (4.3). При действии помех:

$$\tilde{x}_j = \tilde{x}_{j0} + \int_{t_0}^t f_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t) dt + \int_{t_0}^t A_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t) dt \quad (4.7)$$

контрольное условие будет нарушено:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 \tilde{x}_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 \tilde{x}_{j0} + \int_{t_0}^t \left[ \sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 f_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t) \right] dt + \\ &+ \sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 \int_{t_0}^t A_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t) dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В уравнении (4.8) имеем три составляющие — первая составляющая вызывается погрешностями начальных условий, вторая тождественно равна нулю по построению, третья составляющая

определяется помехами в правых частях уравнений. Первая составляющая может быть обнаружена и устранена перед решением задачи, вторая обнаруживается в процессе решения.

Исследуем экстремальные свойства величины:

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 h_j, \quad (4.9)$$

где  $h_j = \int_{t_0}^t A_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t) dt$ , для чего умножим и разделим правую часть этого уравнения на  $\sqrt{\sum (m_j^1)^2 \sum h_j^2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_1$ , после чего получим:

$$\Delta_1 = \sqrt{\sum (m_j^1)^2 \sum h_j^2} \sum_{j=1}^{n_1} \cos \alpha_j^1 \cos \beta_j, \quad (4.10)$$

где  $\cos \alpha_j^1 = \frac{m_j^1}{\sqrt{\sum (m_j^1)^2}}$ ,  $\cos \beta_j = \frac{h_j}{\sqrt{\sum h_j^2}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_1$ .

Как очевидно, величина  $\Delta$  будет иметь экстремум при  $\cos \alpha_j^1 = \cos \beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_1$  при условии, что:

$$\sum (m_j^1)^2 = \text{const}, \quad \sum h_j^2 = \text{const}.$$

Это важное экстремальное свойство сигнала ошибки может быть использовано при определении наилучшей ориентации контрольной плоскости. Наихудшее расположение контрольной плоскости — когда:

$$\sum_{j=1}^{n_1} \cos \alpha_j^1 \cos \beta_j = 0, \quad (4.11)$$

т.е. когда весь вектор помехи, определяемый составляющими  $h_j$ , лежит в контрольной плоскости.

Условие (4.11) является условием ортогональности между вектором помехи и направляющим вектором контрольной плоскости.

Разложим суммарный вектор помехи  $H_0$ , составляющими которого являются помехи  $h_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_1$ , на два вектора —  $H_N$ , перпендикулярный плоскости (4.6), и вектор  $H_R$ , параллельный этой плоскости:

$$H_0^2 = H_N^2 + H_R^2 = \sum h_j^2.$$

Каждый из векторов  $H_N$  и  $H_R$  разложим на составляющие вдоль осей  $x_j, j = 1, 2, \dots, n_1$  соответственно, которые будут связаны соотношениями:

$$h_j = H_{N_j} + H_{R_j}, j = 1, 2, \dots, n_1, \quad (4.12a)$$

$$H_{N_2} = \frac{m_2^1}{m_1^1} H_{N_1}, \dots, H_{N_{n_1}} = \frac{m_{n_1}^1}{m_1^1} H_{N_1}, \quad (4.12б)$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 H_{R_j} = 0. \quad (4.12в)$$

Подставив (4.12 а, в) в формулу (4.9), получим:

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 H_{N_j}, \quad (4.13)$$

т.е. с помощью линейного контрольного условия обнаруживаются составляющие помех, перпендикулярные контрольной плоскости. Более того, можно определить каждую из составляющих  $H_{N_j}$ . Например, воспользовавшись формулами (4.12 б) получим:

$$H_{N_1} = \frac{m_1^1}{\sum_{j=1}^{n_1} (m_j^1)^2} \Delta_1, \quad (4.14)$$

в общем случае:

$$H_{N_j} = \frac{m_j^1 \Delta_1}{\sum_{j=1}^{n_1} (m_j^1)^2}. \quad (4.15)$$

Определить составляющие  $H_{R_j}$  при неподвижной контрольной плоскости не представляется возможным. Найденные по формуле (4.15) величины  $H_{N_j}$  могут быть использованы при коррекции вперед при определенных гипотезах относительно  $H_{R_j}$ .

Если имеем систему с двумя контрольными линейными условиями:

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 x_j = 0, \sum_{j=1}^{n_1} m_j^2 x_j = 0, \quad (4.16)$$

то сигналы ошибок на выходах соответствующих контрольных органов будут:

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 x_j, \Delta_2 = \sum_{j=1}^{n_1} m_j^2 x_j. \quad (4.17)$$

Для того, чтобы уменьшить долю не выявляемых помех, разность между  $\Delta_1$   $\Delta_2$  должна быть максимальной,

$$(\Delta_1 - \Delta_2)^2 = \left( \sum_{j=1}^{n_1} (m_j^1 - m_j^2) h_j \right)^2 \rightarrow \max, \quad (4.18)$$

что выполняется для ортогональных контрольных плоскостей, у которых:

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_j^1 m_j^2 = 0. \quad (4.19)$$

Наилучшее расположение двух плоскостей относительно вектора помехи будет в случае, когда вектор помехи перпендикулярен пересечению плоскостей, т.е. когда

$$\cos \beta_j = \lambda_1 \cos \alpha'_j + \lambda_2 \cos \alpha''_j, \quad (4.20)$$

где  $\cos \alpha'_j = \frac{m_j^1}{\sqrt{\sum (m_j^1)^2}}$ ,  $\cos \alpha''_j = \frac{m_j^2}{\sqrt{\sum (m_j^2)^2}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ .

При этом доставляется экстремум величине  $\Delta_1^2 + \Delta_2^2$ .

Действительно

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 &= \sum (m_j^1)^2 \sum h_j^2 \left( \sum \cos \alpha'_j \cos \beta_j \right)^2 + \\ &+ \sum (m_j^2)^2 \sum h_j^2 \left( \sum \cos \alpha''_j \cos \beta_j \right)^2 = \\ &= \lambda_1^2 \sum (m_j^1)^2 \sum h_j^2 + \lambda_2^2 \sum (m_j^2)^2 \sum h_j^2 = \sum (m_j^2)^2 \sum h_j^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где  $\sum \cos^2 \alpha'_j = 1$ ,  $\sum \cos^2 \alpha''_j = 1$ ,

$$\sum \cos \alpha'_j \cos \alpha''_j = 0, j = 1, 2, \dots, n_1,$$

при условии  $\sum (m_j^1)^2 \neq \sum (m_j^2)^2 = \sum m_j^2$ .

Аналогично, для любого числа  $k$  ортогональных контрольных плоскостей при наилучшем расположении плоскостей и вектора помехи:

$$\left( \sum_{l=1}^k \Delta_l^2 \right)_{onm} = \sum_{j=1}^{n_1} m_j^2 \sum_{j=1}^{n_1} h_j^2. \quad (4.22)$$

Знание этой экстремальной величины позволяет назначить критерий для оценки эффективности контроля как отношение:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sum_{l=1}^k \Delta_l^2}{\left( \sum_{l=1}^k \Delta_l^2 \right)_{onm}} = \left( \sum_{j=1}^{n_1} \cos \alpha'_j \cos \beta_j \right)^2 + \\ &+ \left( \sum_{j=1}^{n_1} \cos \alpha''_j \cos \beta_j \right)^2 + \dots + \left( \sum_{j=1}^{n_1} \cos \alpha_j^k \cos \beta_j \right)^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \text{при условии } \sum_{j=1}^{n_1} \cos^2 \alpha_j' = 1, \dots, \sum_{j=1}^{n_1} \cos^2 \alpha_j^k = 1, \\ \sum_{j=1}^{n_1} \cos^2 \beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n_1} \cos \alpha_j' \cos \alpha_j'' = 0, \dots, \\ \sum_{j=1}^{n_1} \cos \alpha_j' \cos \alpha_j^k = 0, \dots, \sum \cos \alpha_j^{k-1} \cos \alpha_j^k = 0. \end{aligned}$$

В формуле (4.23)  $n_1 \geq n + k$ , величина  $\eta$  может изменяться от нуля до единицы. По этой формуле можно оценить при определенных гипотезах о помехах эффективность выбранной схемы контрольных условий по отношению к наилучшему случаю расположения контрольных плоскостей и помех.

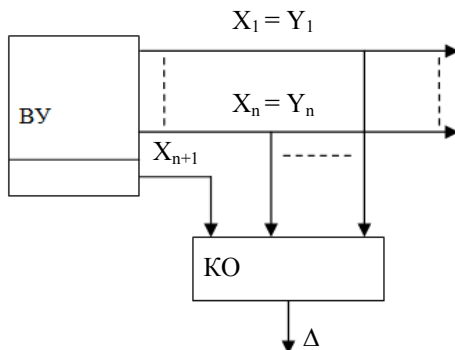
2. С помощью МИП контроль может осуществляться по различным схемам. Удобным является вариант, когда исходная задача остается неизменной, а введение избыточности сводится к составлению вспомогательной задачи, выходные переменные которой являются линейными комбинациями переменных основной задачи. Если исходная задача имеет вид (4.1), то при диагональной матрице расширения, когда  $Y_i = X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , а остальные новые переменные определяются из контрольных условий, например, для одного контрольного условия:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} m_j x_j = 0, \\ X_{n+1} = -\frac{1}{m_{n+1}} \sum_{j=1}^n m_j y_j, \end{aligned} \quad (4.24)$$

эта вспомогательная задача будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dX_{n+1}}{dt} = -\frac{1}{m_{n+1}} \sum_{j=1}^n m_j f_j(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \\ X_{n+1}(0) = -\frac{1}{m_{n+1}} \sum_{j=1}^n m_j y_{j0}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Блок-схема такого контроля изображена на рис. 5. Рассмотрим основные характеристики этой схемы.



*Рис. 5. Схема введения избыточности со вспомогательной задачей*

Важная характеристика системы контроля — объем дополнительного оборудования. Очевидно, что эта характеристика определяется строением исходной задачи и видом контрольного условия. Из уравнения (4.25) следует, что для линейных задач при линейном контроле относительное увеличение объема оборудования составляет  $1/n$ . Для нелинейных задач это увеличение обычно значительно больше и может достигать удвоения. Это связано с тем, что правую часть для переменной  $x_{n+1}$  надо реализовать независимо от функций  $f_1, \dots, f_n$ . В противном случае, привлекая своей малой избыточностью, контролем будет охвачена только линейная часть задачи.

Другая важная характеристика — надежность устройства контроля. Если контролируемая и контролирующая схемы состоят из элементов одинаковой надежности, то условная вероятность отказа схемы контроля  $P_0$  определяется отношением соответствующих объемов оборудования:

$$P_0 = \frac{\Delta N}{N + \Delta N}, \quad (4.26)$$

где  $N$  — объем оборудования для реализации исходной задачи,  $\Delta N$  — объем оборудования для решения вспомогательной задачи. Для линейных задач  $P_0 \approx 1/n$ , т.е. достаточно мала. Для тех задач, где избыточность сравнима с удвоением, вероятность  $P_0$  становится равной  $\sim 0,5$ . Уменьшить ее можно за счет использования в устройстве контроля более надежной аппаратуры.



Следующая важная характеристика — достоверность контроля. Она определяется вероятностью появления неправильного контрольного сигнала. Можно указать три основные причины, приводящие к такому событию. Одна из них — неправильность системы контроля — была рассмотрена выше. Вторая причина — наличие ошибок, принципиально не обнаруживаемых контрольным устройством. К ним относятся все ошибки  $h_j$ , удовлетворяющие уравнению:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n+k} m_j h_j = 0. \quad (4.27)$$

Ошибки такого рода составляют незначительную часть всех ошибок. Действительно, если предположить, что  $m_j h_j$  есть дискретные величины, принимающие значения  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm q$ , то легко видеть, что не существует ни одной одиночной ошибки (т.е. ошибки только по одной переменной), которая удовлетворяет условию (4.27).

В классе двойных ошибок (т.е. ошибок по двум любым переменным сразу) уже возможна их взаимная компенсация. Для каждой пары переменных возможны  $(2q)^2$  различных сочетаний двойных ошибок, из них компенсация возможна для  $2q$  сочетаний, т.е. доля необнаруживаемых двойных ошибок не превышает  $1/2q$ . Для ошибок большей кратности можно воспользоваться приближенной оценкой вероятности того, что сумма  $r$  слагаемых, принимающих с равной вероятностью одно из  $2q$  значений  $\pm 1, \dots, \pm q$  будет равна нулю, составляет:

$$P_r \approx \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2q(2q-1)r}} \approx \frac{1,382}{2q\sqrt{2}}. \quad (4.28)$$

Из этой формулы следует, что доля неконтролируемых ошибок убывает как при возрастании их кратности, так и при увеличении числа различных состояний переменных. Для современных ЦВМ и АВМ величина  $q$ , которая определяется как отношение динамического диапазона к точности, имеет порядок  $10^4$  или больше, и поэтому ошибки, удовлетворяющие (4.27), составляют незначительную часть всех ошибок.

Третья причина недостоверного контроля связана с наличием зоны нечувствительности, с ограниченной точностью вычислений.

Довольно часто при анализе вычислительных процессов ошибки делят на два вида: негрубые или допустимые ошибки и грубые ошибки. Если в процессе вычислений допущены только негрубые ошибки, то считают, что отклонения полученных результатов от точных значений лежат в допуске, т.е.

$$|\Delta x_j| \leq \varepsilon, j = 1, 2, \dots, n$$

и результаты считаются верными.

При действии грубых ошибок результаты вычислений отклоняются от их точных значений, и допуск превышает одну или несколькими координатами:

$$|\Delta x_j| > \varepsilon.$$

Причиной грубых ошибок могут служить промахи программиста-оператора, сбой и отказы машины, накопленные ошибки и т.д. Если превышает допуск по одной любой координате, то будем говорить об одиночных ошибках, если по двум любым — то о двойных, если по  $r$  любым — то о  $r$ -кратных ошибках.

Задача контроля — обнаружение факта превышения сигналом ошибки  $\Delta$  в контрольных условиях допустимого предела  $\pm \Delta_{don}$ . Вследствие конечной ширины допустимого интервала, в котором может изменяться  $\Delta$ , среди грубых ошибок, превышающих допуск  $|\Delta x_j| > \varepsilon$ , будут и необнаруживаемые контролем.

Действительно, если каждая из переменных имеет предельно допустимую погрешность  $\Delta x_{jdon}$ , то предельно допустимое рассогласование будет определяться как

$$\Delta_{don} = \sum_{j=1}^{n+k} |m_j \Delta x_{jdon}|. \quad (4.29)$$

Например, для АВМ, если точность моделирования каждой из переменных равна 1%,  $n + k = 10$ , а диапазон изменения переменных  $\pm 100$ , то в  $\Delta_{don} = 10$  в, и для того, чтобы одиночная ошибка обнаруживалась с вероятностью 1, ее величина должна превышать 19 в.

Ограничиваясь однократными ошибками ( $r = 1$ ) как наиболее вероятными, рассмотрим вопросы чувствительности контроля и методы ее повышения.

Поскольку мы выясняем, как влияют на функцию ошибки аргументов, естественно воспользоваться понятиями теории чувствительности, по которой коэффициенты чувствительности (коэффициенты влияния) вычисляются как частные производные  $\frac{\partial \Delta}{\partial x_j}$ .

Модули коэффициентов чувствительности можно использовать в качестве критерия для оценки чувствительности контроля. После нормализации чувствительность контрольного условия к ошибкам по переменной  $x_j$  будет:

$$\rho_j = \frac{|m_j|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+k} m_j^2}}. \quad (4.30)$$

Приведем пример вычисления чувствительности. Пусть имеется контрольное условие:

$$\Delta = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \quad (4.31)$$

Тогда согласно (4.30) получаем:

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} = 0,182, \rho_2 = \frac{2}{\sqrt{30}} = 0,365, \rho_3 = \frac{3}{\sqrt{30}} = 0,547, \\ \rho_4 = \frac{4}{\sqrt{30}} = 0,73.$$

Наиболее эффективно будут обнаруживаться ошибки четвертой переменной.

Общую чувствительность контроля можно определить как среднее арифметическое чувствительностей по отдельным переменным:

$$\rho = \frac{1}{n+k} \sum_{j=1}^{n+k} \rho_j. \quad (4.32)$$

Для примера (4.31)  $\rho = 0,456$ .

Если имеем несколько контрольных условий:

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{n+k} m_j^1 x_j = 0, \dots, \Delta_k = \sum_{j=1}^{n+k} m_j^k x_j = 0, \quad (4.33)$$

то для обнаружения любой ошибки достаточно, чтобы хотя бы одно из рассогласований вышло за допустимые пределы. Поэтому

чувствительность системы (4.33) к ошибкам по  $j$ -ой переменной  $\rho_j$  определится как максимальная из чувствительностей контрольных условий к этой переменной:

$$\rho_j = \max_{1 < k < K} \rho_j^k. \quad (4.34)$$

Как легко показать, общая чувствительность (4.32) достигает максимума, когда чувствительности по всем переменным одинаковы. При большом числе контролируемых переменных целесообразно их разбивать на группы, назначая в каждой группе свое отдельное контрольное условие [6].

3. Важно не только установить факт неисправности, но и оперативно осуществить ее локализацию, определить место ошибки, ее величину, т.е. решить задачу технической диагностики. Это более сложная задача по сравнению с контролем, и она требует дополнительного введения избыточности, большего числа дополнительных переменных. Если имеем контрольные условия (4.33), то для диагностики необходимо так назначить коэффициенты этих условий, чтобы пространство рассогласований  $V_k$  разбивалось на такие области, чтобы факт попадания точки  $(\Delta_1 \dots \Delta_k)$  в ту или иную область соответствовал определенному виду ошибок. Иными словами, необходимо установить соответствие между пространством первичных ошибок и пространством рассогласований. В частности, для диагностики одиночных ошибок пространство  $V_k$  надо разбить на  $n_1$  областей, для диагностики одиночных и двойных ошибок — на  $n_1 + C_{n_1}^2$  областей и т.д.

Например, если для расширенной системы из четырех переменных контрольные условия:

$$\begin{aligned} m_1^1 h_1 + m_2^1 h_2 + m_3^1 h_3 + m_4^1 h_4 &= \Delta_1, \\ m_1^2 h_1 + m_2^2 h_2 + m_3^2 h_3 + m_4^2 h_4 &= \Delta_2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

то для определения номера ошибки, т.е. для определения места неисправности с точностью до переменной в случае одиночных ошибок матрицу коэффициентов можно взять в виде:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\|. \quad (4.36)$$

Действительно, если  $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$ , то действует  $h_1$ ; если  $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 = 0$ , то действует  $h_2$ ; если  $\Delta_1 = 0, \Delta_2 \neq 0$ , то действует  $h_3$ ; если  $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \text{sign } \Delta_1 \neq \text{sign } \Delta_2$ , то действует  $h_4$ .

В данном случае с помощью матрицы (4.36) установлено соответствие между четырьмя областями пространства и номерами ошибок.

Для систем, где каждое из рассогласований имеет три различных состояния ( $\Delta > 0, \Delta < 0, \Delta \approx 0$ ), зависимость числа переменных от числа контрольных условий определяется формулой:

$$n_1 \leq \frac{3^k - 1}{2}. \quad (4.37)$$

Для того, чтобы любая одиночная помеха определялась однозначно, все столбцы матрицы коэффициентов контрольных условий должны быть различными и ненулевыми. Например,  $n_1 = 13, k = 3$ ,

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Можно пойти несколько другим путем в построении диагностической матрицы. Можно назначить  $m_j^1$  и  $m_j^2$  так, чтобы

$$\frac{m_j^1}{m_j^2} \neq \frac{m_i^1}{m_i^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_1, \quad i \neq j \quad (4.38)$$

и тогда определять номер первичной ошибки  $h_j$  по уравнению:

$$m_j^2 \Delta_1 - m_j^1 \Delta_2 = \Delta,$$

которое будет равно нулю именно для данного номера  $j$ .

Например, выбрав для (4.35)  $m_1^1 = m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = m_4^2 = 1, m_2^1 = 2, m_3^1 = 3, m_4^1 = 4$ , и если действует ошибка  $h_1$ , то  $\Delta_1 = h_1, \Delta_2 = h_1$ ; если действует  $h_2$ , то  $\Delta_1 = h_2, \Delta_2 = 2h_2$ ; если действует  $h_3$ , то  $\Delta_1 = h_3, \Delta_2 = 3h_3$ ; если действует  $h_4$ , то  $\Delta_1 = h_4, \Delta_2 = 4h_4$ .

В данном случае по отношению контрольных сумм можно определить номер первичной ошибки:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = j. \quad (4.39)$$

При этом можно определить не только номер ошибки, но и ее величину:

$$h_j = \frac{\Delta_1}{m_j^1} = \frac{\Delta_2}{m_j^2}. \quad (4.40)$$

Для диагностики ошибок кратности  $r$  необходимо  $r + 1$  контрольное уравнение. Наличие негрубых ошибок, на фоне которых приходится осуществлять диагностику грубых ошибок, заставляет рассматривать вопрос о чувствительности диагностики.

Результаты диагностики могут быть использованы для рассмотренного примера:

$$\tilde{x}_j = x_{j0} + \int_{t_0}^t f_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, t) dt + h_j$$

и, определив с помощью диагностической процедуры  $h_j$ , можно к полученному решению добавить корректирующий сигнал, равный  $(-h_j)$  и тем самым уменьшить влияние первичной ошибки.

Но следует заметить, что если интервал времени  $(t - t_0)$  большой, то вторичные ошибки, вызванные действием первичных ошибок, могут достичь большой величины. Поэтому очень важно обнаруживать и устранять саму первичную ошибку  $A_j$ , а не интеграл от нее, каковым является  $h_j$ . Такая возможность открывается в системах с непрерывной обратной связью (см. § 7).

4. Если имеем избыточную систему с  $(n + 1)$  переменными и одним линейным условием (4.6), то повторив решение этой системы  $(n + 1)$  раз, каждый раз с новыми коэффициентами контрольной плоскости, можно получить довольно полную информацию обо всех первичных ошибках, действующих на конкретную задачу, решаемую на конкретной аппаратуре каким-то конкретным методом. При этом предполагается, что ошибки не изменяются при изменении коэффициентов контрольного условия, при повороте контрольной плоскости.

Например, если имеем систему с  $j = 1, 2, 3$ ,

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = f_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, t) + A_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, t), \quad (4.41)$$

то на выходе контрольного органа получим:

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 m_j h_j. \quad (4.42)$$

Для того, чтобы определить  $h_j$ , необходимо в данном случае иметь три уравнения вида (4.42). Их можно получить, используя различные значения коэффициентов  $m_j$  на заданном интервале времени. Таким образом, для каждого момента времени будем иметь систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= m_1' h_1 + m_2' h_2 + m_3' h_3, \\ \Delta_2 &= m_1'' h_1 + m_2'' h_2 + m_3'' h_3, \\ \Delta_3 &= m_1''' h_1 + m_2''' h_2 + m_3''' h_3,\end{aligned}\tag{4.43}$$

откуда можно определить  $h_j$  при условии:

$$\begin{vmatrix} m_1' & m_2' & m_3' \\ m_1'' & m_2'' & m_3'' \\ m_1''' & m_2''' & m_3''' \end{vmatrix} \neq 0.\tag{4.44}$$

При повороте плоскости, т.е. при перестройке правых частей уравнений (4.41), часть помех будет поворачиваться вместе с плоскостью. Для того, чтобы определить, какая доля помех поворачивается, можно взять еще одну контрольную плоскость  $\Delta_4 = \sum m_j^* x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и для нее экспериментально получить величину  $\Delta_4$  и сравнить расчетное и экспериментальное значение этих величин. Если между ними большая разница, то таким способом определить ошибки нельзя.

Полученные в результате экспериментов и расчетов по формуле (4.43) величины  $h_j$  для нужных моментов времени могут быть использованы для коррекции решения, соответствующего этим моментам времени:

$$x_j^*(t_l) = \tilde{x}_j(t_l) - h_j(t_l),\tag{4.45}$$

где  $t_l$  любое в интервале  $(t - t_0)$ . В результате экспериментов с поворачивающейся плоскостью определяется направление вектора помех, и эта информация может быть использована как при организации непрерывной обратной связи (§ 6), так и при построении алгебраической коррекции (§ 5).

В системе с двумя контрольными условиями, при повороте сразу пары плоскостей, необходимое число поворотов будет примерно  $(n + 2)/2$ . В этом случае затраты времени на идентификацию

вектора помех уменьшаются в два раза по сравнению с системой, где только одна поворачивающаяся плоскость.

Если число контрольных плоскостей  $k$ , то число необходимых поворотов  $(n + k)/k$ , и минимальное число поворотов будет при  $k \sim n$ , оно равно двум при  $k \sim 3/2$ . Таким образом, здесь возможен обмен между затратами аппаратуры и затратами времени для определения вектора помех. Чем больше контрольных плоскостей, т.е. чем больше избыточность аппаратуры, тем меньше раз требуется повернуть пучок плоскостей, тем меньше затраты времени, и наоборот. Конкретная рекомендация по числу контрольных плоскостей зависит от размерности и сложности задачи и от вида используемой вычислительной машины, ее параметров по быстродействию, памяти и т.п.

5. Система с поворачивающейся контрольной плоскостью по существу является системой с нелинейным контрольным условием, которое изменяется в дискретные моменты времени — в моменты между окончанием и началом решений в процессе периодизации. Далее естественно рассмотреть возможности нелинейного контрольного условия вообще, чему и посвящается настоящий пункт.

Если имеем систему с нелинейным контрольным условием:

$$\Delta = F(x_1, x_2), \quad (4.46)$$

построенную в соответствии с § 2, то

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \varphi_1(x_1, x_2)f(x_1, x_2, t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varphi_2(x_1, x_2)f(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (4.47)$$

и при постоянно действующих возмущениях эта система будет:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= \varphi_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) + A_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t), \\ \frac{d\tilde{x}_2}{dt} &= \varphi_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) + A_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t), \end{aligned} \quad (4.48)$$

где  $\tilde{x}_1 = x_1 + e$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2 + e$ .



Разлагая правые части уравнений (4.48) в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= \left[ \varphi_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} e_2 + \dots \right] \times \\ &\times \left[ f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) + \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \dots \right] + A_1, \\ \frac{d\tilde{x}_2}{dt} &= \left[ \varphi_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} e_2 + \dots \right] \times \\ &\times \left[ f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) + \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \dots \right] + A_2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

и подставляя эти уравнения в выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_1} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_2} \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} e_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} e_2 + \dots \right] \frac{d\tilde{x}_1}{dt} + \\ &+ \left[ \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} e_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} e_2 + \dots \right] \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = \\ &= \left[ \varphi_1(x_1, x_2) \frac{\partial F}{\partial x_1} + \varphi_2(x_1, x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} \right] f(x_1, x_2, t) + \\ &+ \Phi(x_1, x_2, t, e_1, e_2, A_1, A_2), \end{aligned} \quad (4.50)$$

получаем, что сигнал ошибки на выходе контрольного органа будет сложной функцией от переменных  $x_j$ , и первичных и вторичных ошибок. Выражение в квадратных скобках в (4.50) тождественно равно нулю по построению.

Таким образом, нелинейный контроль позволяет обнаруживать как первичные, так и вторичные ошибки. Но этот вид контроля теснее связан с видом исходного уравнения, чем линейный контроль, что является в одних случаях — достоинством, когда требуется выявлять и вторичные ошибки, в других случаях — недостатком, так как в этом случае затруднено выявление первичных ошибок в чистом виде. Недостатком нелинейного контроля является то большое усложнение, которое он привносит как в блок I, так и в блок III рис. 4.

По аналогии с поворачивающейся плоскостью в случае нелинейного контроля можно организовать режим периодизации с одновременным изменением вида контрольного условия для получения полной системы уравнений относительно вторичных ошибок. Действительно, для (4.46):

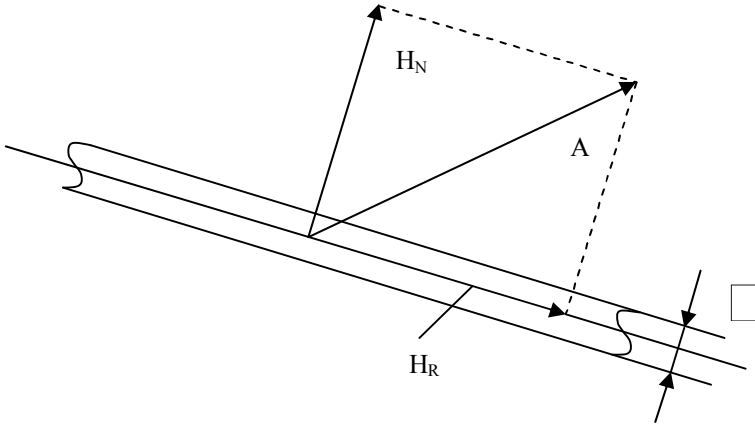
$$\Delta = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = F(x_1, x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} e_2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} e_1^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} e_1 e_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} e_2^2 \right] \quad (4.51)$$

Это выражение является точным, если контрольное условие — многочлен второго порядка. Для измененного контрольного условия получим аналогичное уравнение:

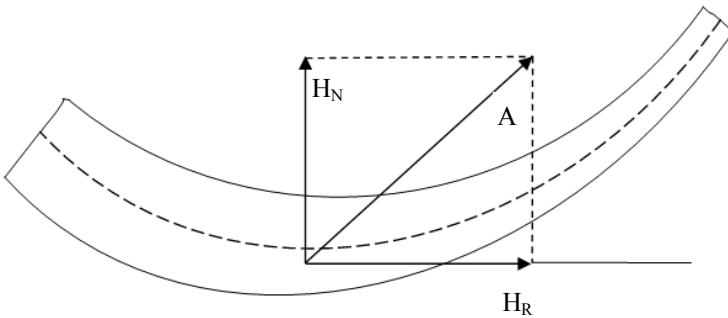
$$\Delta' = F'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = F'(x_1, x_2) + \frac{\partial F'}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial F'}{\partial x_2} e_2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F'}{\partial x_1^2} e_1^2 + \frac{\partial^2 F'}{\partial x_1 \partial x_2} e_1 e_2 + \frac{\partial^2 F'}{\partial x_2^2} e_2^2 \right]. \quad (4.52)$$

Уравнения (4.51) и (4.52) образуют для каждого момента времени полную систему алгебраических уравнений относительно  $e_1$  и  $e_2$ , откуда и могут они определяться. При этом должна выполняться гипотеза о том, что первичные ошибки, действующие на систему, не изменяются при изменении вида контрольного условия.

Качественное отличие нелинейного контроля от линейного иллюстрируется рис. 6, откуда видно, что линейная контрольная плоскость ( $\varepsilon$  — зона нечувствительности) не позволяет обнаруживать составляющую  $H_R$  вектора помехи, параллельную плоскости (рис. 6а), а нелинейное контрольное условие вследствие конечности радиуса кривизны позволяет обнаруживать и эту составляющую (рис. 6б). При этом выявительные свойства нелинейного контроля определяются как величиной зоны нечувствительности контрольного органа, так и радиусом кривизны в точке контроля. Чем он меньше, тем с большей достоверностью обнаруживаются все составляющие вектора помехи.



*а) Линейное контрольное условие*



*б) Нелинейное контрольное условие*

**Рис. 6**

6. Естественно после рассмотрения вопросов о контроле и диагностике обратиться к использованию полученных сведений для исправления результатов вычислений. Как уже отмечалось, один из видов коррекции — это коррекция вперед, когда корректирующий сигнал добавляется к соответствующему выходному сигналу

и откорректированная выходная переменная более в вычислениях не участвует.

Если в системе осуществлена диагностика с помощью поворачивающейся плоскости и известны величины интегралов от первичных помех для всех выходных переменных в соответствующие моменты времени, то прибавив найденные поправки, мы осуществим коррекцию вперед.

Если в системе осуществлена диагностика в соответствии с гипотезами о том, что действует одна и только одна любая помеха или две и только две помехи и т.д., то прибавив обнаруженную таким образом помеху к соответствующей выходной переменной, осуществим коррекцию вперед.

Если в системе только одно неподвижное контрольное условие, то вычислив в соответствии с формулой (4.15) поправки к соответствующим переменным, мы лишь частично исправим их. Чем большим числом контрольных условий мы располагаем, тем большую долю ошибок мы исправим таким образом. Приближенно оценим, какой выигрыш в помехоустойчивости получается от введения избыточности и такой коррекции вперед.

Во-первых, будем предполагать, что если решается система (4.1), то на решение действуют помехи, одинаковые по всем переменным, т.е.  $A_i = A$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и модуль всего вектора помех будет равен:

$$A_0 = A\sqrt{n}. \quad (4.53)$$

Во-вторых, будем предполагать, что если решается система с избыточностью (4.3), то на нее действуют такие же помехи  $A_j = A$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , и модуль вектора помех в этом случае будет:

$$A'_0 = A\sqrt{n_1}, A'_0 > A_0. \quad (4.54)$$

Будем полагать, что контрольные плоскости относительно вектора помех ориентированы так, что его проекции на направления, перпендикулярные к плоскостям, равны между собой и равны составляющей вектора помех, которая параллельна всем плоскостям, т.е.  $H_{N_1} = H_{N_2} = \dots = H_{N_k} = H_R$  по модулю, и, другими словами:

$$A'_0 = A\sqrt{n_1} = H_R\sqrt{k+1}. \quad (4.55)$$

С помощью коррекции влияние  $H_{N_1} \dots H_{N_k}$  будет скомпенсировано, и на систему будет действовать лишь составляющая  $H_R$ , модуль которой равен:

$$H_R = A \sqrt{\frac{n_1}{k+1}}. \quad (4.56)$$

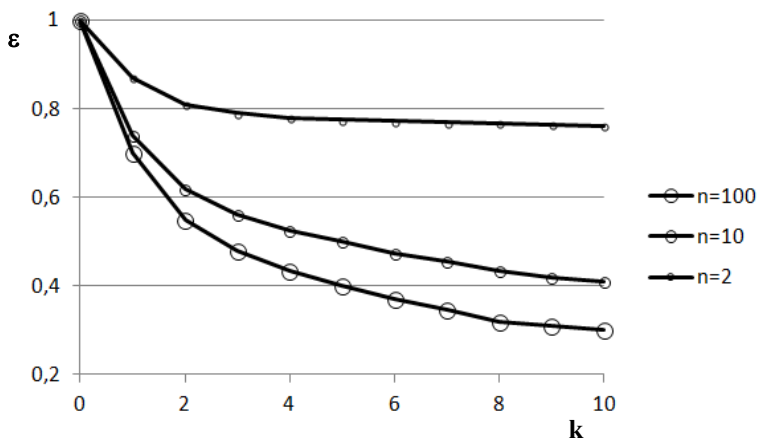
В-третьих, для оценки выигрыша в помехоустойчивости будем сравнивать модули векторов помех, действующих на решение. Увеличение помехоустойчивости при таких условиях будет характеризоваться коэффициентом:

$$\varepsilon = \frac{H_R}{A_0} = \sqrt{\frac{n+k}{n(k+1)}}. \quad (4.57)$$

На рис. 7 приведена зависимость коэффициента  $\varepsilon$  от избыточности, от числа контрольных условий  $k$  для различных значений  $n$ . Как очевидно из уравнения (4.57) и рис. 7, теоретический эффект от введения избыточности получается тем больше, чем больше  $n$ . Чем сложнее задача, тем меньшее относительное усложнение необходимо произвести, чтобы увеличить помехоустойчивость. Аналогичное свойство вытекает и из формулы (4.37) для кодовой коррекции. Если обозначить  $\psi = k/n$ , то при  $\psi \gg 1$  получим:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\psi+1}{n\psi+1}} \approx \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad (4.58)$$

т.е. при большой относительной избыточности выигрыш в увеличении помехоустойчивости тем больше, чем больше исходных переменных, чем сложнее исходная задача. Для оценки эффективности контроля для принятого расположения вектора помех и контрольных плоскостей можно воспользоваться формулой (4.23).



*Рис. 7. Зависимость коэффициента  $\varepsilon$  от избыточности*

В избыточных структурах с обратными связями и с нелинейными контрольными условиями открываются дополнительные возможности для увеличения помехоустойчивости.

### **§ 5. Жесткие избыточные структуры с алгебраической коррекцией**

Как известно из теоремы об оценке отклонения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений [9], эти отклонения зависят от величины возмущений начальных условий и величины постоянно действующих возмущений. И если в системе без избыточности главное средство для уменьшения отклонений — это ослабление самих источников помех, то в избыточных структурах появляется новое средство для борьбы с помехами, которые действуют на расширенные системы, в них можно использовать для этой цели операцию сжатия, операцию перехода от новых переменных к исходным. С ее помощью при соответствующем наборе коэффициентов оказывается возможным уменьшить величину возмущений, действующих на систему после сжатия, чем и достигается уменьшение отклонения решений.

1. Пусть имеем исходное уравнение Пфаффа в виде:

$$F_1 dy_1 + F_2 dy_2 = 0. \quad (5.1)$$

Ввести избыточность можно, положив:

$$y_1 = \sum a_j x_j, y_2 = \sum b_j x_j, j = 1, 2, 3. \quad (5.2)$$

Рассмотрим систему с линейным контрольным условием:

$$\sum m_j x_j = 0, m_j = \text{const}, j = 1, 2, 3. \quad (5.3)$$

Дифференциальные формы расширенной системы:

$$\sum_{j=1}^3 (a_j F_1 + b_j F_2) dx_j = 0, \sum_{j=1}^3 m_j dx_j = 0. \quad (5.4)$$

В расширенной системе решаются дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = D_{23} + A_1, \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = -D_{13} + A_2, \frac{d\tilde{x}_3}{dt} = D_{12} + A_3, \quad (5.5)$$

где  $A_j$  — помехи, действующие на систему, а начальные условия  $x_{10}, x_{20}, x_{30}$  определяются из решения уравнений (5.2) и (5.3) для  $y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}$ .

Рассмотрим вопрос о том, как следует назначить коэффициенты  $a_j, b_j, m_j$ , чтобы обеспечить наибольшую помехозащищенность в системе, при условии:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.6)$$

Разложим вектор помех на три составляющие: на составляющую  $N$ , перпендикулярную контрольной плоскости, на составляющую  $V$ , действующую вдоль вектора скорости расширенной системы, и на составляющую  $R$ , перпендикулярную первым двум составляющим. В этом случае получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{m_1}{\sqrt{I}} N + \frac{D_{23}}{\sqrt{II}} V + \frac{-m_3 D_{13} - m_2 D_{12}}{\sqrt{III}} R, \\ A_2 &= \frac{m_2}{\sqrt{I}} N + \frac{-D_{13}}{\sqrt{II}} V + \frac{m_1 D_{12} - m_3 D_{23}}{\sqrt{III}} R, \\ A_3 &= \frac{m_3}{\sqrt{I}} N + \frac{D_{13}}{\sqrt{II}} V + \frac{m_2 D_{23} + m_1 D_{13}}{\sqrt{III}} R, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где  $\sqrt{I} = \sqrt{\sum m_j^2}, j = 1, 2, 3,$

$$\sqrt{II} = \sqrt{(D_{23})^2 + (D_{13})^2 + (D_{12})^2} = \frac{1}{\delta} \sqrt{F_1^2 \gamma_1 + 2F_1 F_2 \lambda + F_2^2 \gamma_2},$$

$$\sqrt{III} = \frac{1}{\delta} \sqrt{(F_1^2 \gamma_1 + 2F_1 F_2 \lambda + F_2^2 \gamma_2) \sum m_j^2},$$

$$\gamma_1 = \sum a_j^2 \sum m_j^2 - (\sum a_j m_j)^2,$$

$$\gamma_2 = \sum b_j^2 \sum m_j^2 - (\sum b_j m_j)^2,$$

$$\lambda = \sum m_j^2 \sum a_j b_j - \sum b_j m_j \sum a_j m_j,$$

$$j = 1, 2, 3.$$

После выполнения операции сжатия, которая определяется уравнениями (5.2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}_1}{dt} &= F_2 + \frac{\sum a_j m_j}{\sqrt{I}} N + \frac{F_2}{\delta \sqrt{II}} V + \frac{-F_1 \gamma_1 - F_2 \lambda}{\delta \sqrt{III}} R, \\ \frac{d\tilde{y}_2}{dt} &= -F_1 + \frac{\sum b_j m_j}{\sqrt{I}} N + \frac{-F_1}{\delta \sqrt{II}} V + \frac{-F_1 \gamma_1 - F_2 \gamma_2}{\delta \sqrt{III}} R. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Рассмотрим вопрос об уменьшении влияния составляющих помех на решение. Очевидно, если  $F_1$  и  $F_2$  — знакопеременные, то целесообразно для увеличения знаменателей II и III положить  $\lambda = 0$ . При этом условие (5.6) не нарушается, так как:

$$\delta \delta^T = \begin{vmatrix} \sum a_j^2 & \sum a_j b_j & \sum a_j m_j \\ \sum a_j b_j & \sum b_j^2 & \sum b_j m_j \\ \sum a_j m_j & \sum b_j m_j & \sum m_j^2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.9)$$

Если принять за меру влияния составляющих  $V$  и  $R$  в каждый момент времени сумму квадратов весов при  $V$  и  $R$  в обеих составляющих решения, то при  $\lambda = 0$ :

$$\Delta_R = \frac{F_1^2 \gamma_1^2 + F_2^2 \gamma_2^2}{(F_1^2 \gamma_1 + F_2^2 \gamma_2) \sum m_j^2}, \quad \Delta_V = \frac{F_1^2 + F_2^2}{(\gamma_1 F_1^2 + \gamma_2 F_2^2)},$$

а при  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  получим:

$$\Delta_R = \frac{\gamma}{\sum m_j^2}, \quad \Delta_V = \frac{1}{\gamma}.$$



Рассматривая сумму  $(\Delta_R + \Delta_v)$ , получим, что минимум суммы будет при

$$\gamma = + \sum m_j^2, \quad (5.10)$$

при этом

$$\Delta_R + \Delta_v = \frac{2}{\sum m_j^2}.$$

Таким образом, оптимальная матрица расширения в указанном выше смысле будет при таком выборе  $a_j, b_j, m_j$ , когда  $\lambda = 0$ ,

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = + \sum m_j^2.$$

Для устранения влияния составляющей  $N$  можно выбрать:

$$\sum a_j m_j = \sum b_j m_j = 0, j = 1, 2, 3. \quad (5.11)$$

При выполнении (5.11)  $\lambda = 0$ , если

$$\sum a_j b_j = 0, j = 1, 2, 3. \quad (5.12)$$

Может быть найдено множество матриц, удовлетворяющих (5.10), (5.11), (5.12). Пример такой матрицы расширения:

$$\delta = \begin{vmatrix} 0,31 & -0,62 & 0,31 \\ 0,5375 & 0 & -0,5375 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Для системы с двумя исходными переменными в случае двух контрольных плоскостей получим:

$$y_j = \sum_{j=1}^n a_j^i x_j, i = 1, 2, \sum_{j=1}^4 m_j' x_j = 0, \sum_{j=1}^4 m_j^2 x_j = 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = (-1)^{j-1} D_j' + A_j, j = 1, 2, 3, 4, \quad (5.14)$$

где  $D_1 = D_{234}, D_2 = D_{134}, D_3 = D_{124}, D_4 = D_{123}$ .

$A_j$  — помехи, действующие на расширенную систему.

Полагая контрольные плоскости ортогональными  $\sum_{j=1}^4 m_j' m_j^2 = 0$ , можем получить разложение помех в виде:

$$A_j = \frac{m_j'}{\sqrt{I}} N_1 + \frac{m_j^2}{\sqrt{II}} N_2 + \frac{(-1)^{j-1} D_j}{\sqrt{III}} V + \frac{Q_j}{\sqrt{IV}} R, \quad (5.15)$$

где  $N_1, N_2, V, R$ , — четыре взаимно ортогональных вектора;

$$\sqrt{I} = \sqrt{\sum(m'_j)^2}, \sqrt{II} = \sqrt{\sum(m_j^2)^2}, \sqrt{III} = \sqrt{\sum(D_j)^2},$$

$$\sqrt{IV} = \sqrt{\sum Q_j^2}, j = 1, 2, 3, 4.$$

После выполнения операции сжатия получим:

$$\frac{d\dot{y}_1}{dt} = F_2 + \frac{\sum a'_j m'_j}{\sqrt{I}} N_1 + \frac{\sum a'_j m_j^2}{\sqrt{II}} N_2 + \frac{F_2}{\delta\sqrt{III}} V + \frac{-F_1\gamma_1 - F_2\lambda}{\delta\sqrt{IV}} R, \quad (5.16)$$

$$\frac{d\dot{y}_2}{dt} = -F_1 + \frac{\sum a_j^2 m'_j}{\sqrt{I}} N_1 + \frac{\sum a_j^2 m_j^2}{\sqrt{II}} N_2 + \frac{-F_1}{\delta\sqrt{III}} V + \frac{-F_1\lambda - F_2\gamma_1}{\delta\sqrt{IV}} R,$$

$$\text{где } \sqrt{III} = \frac{1}{\delta} \sqrt{F_1^2 \gamma_1 + 2F_1 F_2 \lambda + F_2^2 \gamma_2},$$

$$\sqrt{IV} = \frac{1}{\delta} \sqrt{(F_1^2 \gamma_1 + 2F_1 F_2 \lambda + F_2^2 \gamma_2) \sqrt{\sum(m'_j)^2} \sqrt{\sum(m_j^2)^2}}.$$

Коэффициенты  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\lambda$  являются определителями произведений следующих прямоугольных матриц:

$$\gamma_1 = |\Gamma_1 \Gamma_1^T| = \begin{vmatrix} \sum(a'_j)^2 & \sum a'_j m'_j & \sum a'_j m_j^2 \\ \sum a'_j m'_j & \sum(m'_j)^2 & \sum m'_j m_j^2 \\ \sum a'_j m_j^2 & \sum m'_j m_j^2 & \sum(m_j^2)^2 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_2 = |\Gamma_2 \Gamma_2^T|, \lambda = |\Gamma_1 \Gamma_2^T|,$$

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 & m_4^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_4^2 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 & m_4^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_4^2 \end{vmatrix}.$$

Если опять принять за меру влияния составляющих  $V$  и  $R$  в каждый момент времени сумму квадратов весов при  $V$  и  $R$  в обеих составляющих решения при  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,

$$\Delta_R = \frac{\gamma}{\sum(m'_j)^2 \sum(m_j^2)^2}, \Delta_V = \frac{1}{\gamma},$$

$$\gamma_{\text{опт}} = + \sqrt{\sum(m'_j)^2 \sum(m_j^2)^2}. \quad (5.17)$$

$$\text{При этом } \min(\Delta_R + \Delta_V) = \frac{2}{\gamma_{\text{опт}}}.$$

Эти условия оптимальности выполняются для матрицы расширения, где все строки взаимно ортогональны и

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{опт}}.$$

3. Для системы с тремя исходными переменными в случае одной контрольной плоскости получим:

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{j=1}^4 a_j^i x_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sum_{j=1}^4 m_j x_j = 0, \\ \frac{d\tilde{x}_j}{dt} &= (-1)^{j-1} u_1 D_j + A_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$u_1 = \frac{1}{\delta}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{vmatrix},$$

$A_j$  — помехи, действующие на расширенную систему.

В качестве исходной принимается система:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, y_3, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Разложим вектор помех на четыре составляющие: на составляющую  $N$ , перпендикулярную контрольной плоскости, на составляющую  $V$ , действующую вдоль вектора скорости расширенной системы, и на взаимноортогональные составляющие  $R_1$  и  $R_2$ , перпендикулярные первым двум составляющим:

$$A_j = \frac{m_j}{\sqrt{I}} N + \frac{(-1)^{j-1} u_1 D_j}{\sqrt{II}} V + \frac{Q'_i}{\sqrt{III}} R_1 + \frac{Q''_i}{\sqrt{IV}} R_2, \quad (5.19)$$

где  $\sqrt{I} = \sqrt{\sum (m_j)^2}, j = 1, 2, 3, 4,$

$$\sqrt{II} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\sum_{i=1}^3 f_i^2 \gamma_i + 2f_1 f_2 \lambda_1 + 2f_1 f_3 \lambda_2 + 2f_2 f_3 \lambda_3},$$

$$\sqrt{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (Q'_i)^2}, \quad \sqrt{IV} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (Q''_i)^2},$$

$$\gamma_i = |\Gamma_i \Gamma_i^T|, \quad \lambda_1 = |\Gamma_1 \Gamma_2^T|, \quad \lambda_2 = |\Gamma_1 \Gamma_3^T|, \quad \lambda_3 = |\Gamma_2 \Gamma_3^T|,$$

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{vmatrix}, \Gamma_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{vmatrix}.$$

После сжатия получим:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i + \frac{\sum a_j^i m_j}{\sqrt{I}} N + \frac{f_i}{\delta \sqrt{II}} V + \Lambda_i' R_2. \quad (5.20)$$

По аналогии с пунктами 1, 2 строим критерий для оценки по-  
мехоустойчивости системы:

$$\Delta_R = \sum (\Lambda_i')^2 + \sum (\Lambda_i^2)^2, \quad (5.21)$$

$$\Delta_V = \frac{\sum f_i^2}{\delta^2 (II)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  с учетом (5.18)  
и (5.19) получим:

$$\gamma_{\text{опт}} = + \sqrt{\sum (m_j)^2}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

при этом

$$\min(\Delta_R + \Delta_V) = \frac{2}{\gamma_{\text{опт}}}. \quad (5.22)$$

Эти условия оптимальности выполняются для матрицы рас-  
ширения, где все строки взаимноортогональны и

$$\gamma = \gamma_{\text{опт}} = \sum (a_j^1)^2 \sum (a_j^2)^2 \sum (m_j)^2 = \sum (a_j^1)^2 \sum (a_j^3)^2 \sum (m_j)^2 =$$

$$= \sum (a_j^2)^2 \sum (a_j^3)^2 \sum (m_j)^2, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

4. Обобщим результаты, полученные выше, на любое число  
исходных переменных  $n$  с любым числом контрольных плоско-  
стей  $k$ . Контрольные плоскости должны быть взаимно ортого-  
нальными. Если матрица расширения имеет вид:

$$\delta = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{n+k}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n+k}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n+k}^n \\ m_1^1 & m_2^1 & \dots & m_{n+k}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^k & m_2^k & \dots & m_{n+k}^k \end{pmatrix},$$

то матрицы  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  получаются вычеркиванием соответствующей строки из матрицы  $\delta$ , например,

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n+k}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n+k}^n \\ m_1^1 & m_2^1 & \dots & m_{n+k}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^k & m_2^k & \dots & m_{n+k}^k \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Если в соответствии с вышеизложенным в качестве критерия для выбора коэффициентов для матрицы  $\delta$  взять минимум суммы квадратов весов при всех составляющих помех, кроме тех, которые перпендикулярны контрольным плоскостям, то минимум обеспечивается при:

$$\lambda_1 = |\Gamma_1 \Gamma_2^T| = 0, \lambda_2 = |\Gamma_2 \Gamma_3^T| = 0, \dots, \lambda_g = |\Gamma_{n-1} \Gamma_n^T| = 0, g = C_n^2$$

и при:

$$|\Gamma_1 \Gamma_1^T| = |\Gamma_2 \Gamma_2^T| = \dots = |\Gamma_n \Gamma_n^T| = \gamma_{\text{опт}},$$

где

$$\gamma_{\text{опт}} = + \sqrt{\prod_{k=1}^k \sum_{j=1}^{n+k} (m_j^k)^2}.$$

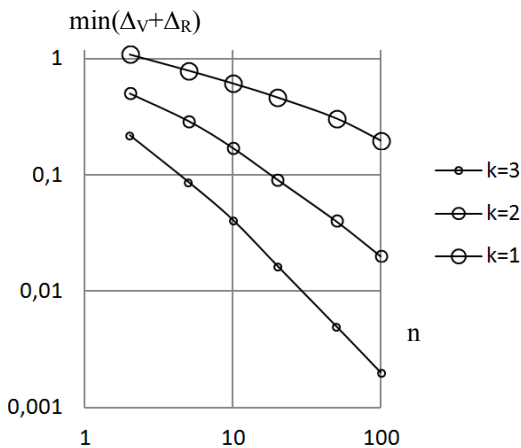
В этом случае:

$$\min(\Delta_R + \Delta_V) = \frac{2}{\gamma_{\text{опт}}}.$$

Если модули коэффициентов взаимноортогональных контрольных плоскостей равны, то

$$\min(\Delta_R + \Delta_V) = \frac{2}{\sqrt{(m)^k(n+k)^k}}. \quad (5.23)$$

Из анализа этой формулы следует, что, во-первых, при фиксированном числе контрольных плоскостей выигрыш от введения избыточности тем больше, чем больше число исходных переменных, и, во-вторых, при фиксированном числе исходных переменных выигрыш увеличивается с ростом числа контрольных плоскостей. На рис. 8 изображена зависимость  $\min(\Delta_R + \Delta_V)$  от числа исходных переменных для 1, 2 и 3 контрольных плоскостей при  $|m| = 1$ .



**Рис. 8.** Зависимость  $\min(\Delta_R + \Delta_V)$  от числа исходных переменных

Из формулы (5.23) также следует, что выигрыш в помехоустойчивости растет с ростом модулей, коэффициентов контрольных плоскостей. Например, для  $n = 2$ ,  $k = 1$  при  $|m| = 10$ ; 100,  $\min(\Delta_R + \Delta_V) = 0,364$ ; 0,115 соответственно.

При выполнении условий оптимальности  $\delta\delta^T = 1$ . С ростом  $|m|$  увеличиваются масштабы начальных условий в расширенной системе.

Для каждой конкретной задачи с заданным  $n$  следует либо идти по пути увеличения числа контрольных условий или роста масштабов, либо совместно использовать эти два средства увеличения помехоустойчивости.

Рассмотренный выше способ выбора коэффициентов матрицы расширения справедлив для любых воспроизводимых функций и не налагает никаких ограничений на характер помех, действующих на систему. Любые дополнительные сведения о помехах могут быть использованы для дальнейшего увеличения точности решения исходной задачи.

Определенные выше матрицы были ортогональными, что позволяло исключить влияние на решение исходной системы помех, перпендикулярных контрольным плоскостям. В системах с простой линейной обратной связью также оказывается возможным подавление этих составляющих помех, при этом матрица расширения уже может не быть целиком ортогональной, что значительно облегчает выбор коэффициентов матрицы и дальнейшую оптимизацию систем с избыточностью.

В рассмотренных системах с избыточностью для увеличения помехоустойчивости использовалось только лишь устройство сжатия, при этом число избыточных переменных было равно числу контрольных условий.

5. Если помехи  $A_j$  — случайные величины с математическими ожиданиями  $\xi_j$  и с дисперсиями  $\sigma_j^2$ , то эти сведения можно эффективно использовать для увеличения точности решения.

Действительно, если для уравнений (5.5) после операции сжатия получим:

$$\frac{d\tilde{y}_1}{dt} = f_1(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, t) + \sum_{j=1}^3 a_j A_j; \quad \frac{d\tilde{y}_2}{dt} = f_2(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, t) + \sum_{j=1}^3 b_j A_j,$$

то очевидно, что можно подобрать такие коэффициенты  $a_j, b_j$ , чтобы

$$\sum a_j \xi_j = 0, \quad \sum b_j \xi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

т.е. свести математическое ожидание помехи в выходных переменных к нулю.

Дисперсия помехи выходных переменных:

$$D[\sum_{j=1}^3 a_j \sigma_j^2] = \sum_{j=1}^3 a_j \sigma_j^2, \quad D[\sum_{j=1}^3 b_j \sigma_j^2] = \sum_{j=1}^3 b_j \sigma_j^2$$

также может быть значительно уменьшена настройкой коэффициентов  $a_j, b_j$ .

Информацию о математическом ожидании и дисперсии помех можно иногда получить с помощью экспериментов с поворачивающейся плоскостью, рассмотренных в § 4.

Если  $A_j$  — некоррелированные между собой случайные функции, и если  $m_j(t)$  — их математические ожидания, то очевидно, что можно подобрать такие  $a_j$ ,  $b_j$ , чтобы для рассматриваемого примера:

$$\sum_{j=1}^3 a_j m_j(t) \text{ и } \sum_{j=1}^3 b_j m_j(t)$$

были наименьшими в определенном смысле, например, на заданном интервале времени могут быть минимизированы максимальные отклонения этих сумм от нуля, а корреляционные функции сумм будут:

$$K[\sum_{j=1}^3 a_j A_j] = \sum_{j=1}^3 a_j^2 K_j(t, t'),$$

$$K[\sum_{j=1}^3 b_j A_j] = \sum_{j=1}^3 b_j^2 K_j(t, t'),$$

где опять-таки с помощью коэффициентов  $a_j$ ,  $b_j$  можно уменьшить их значения на заданном интервале времени.

Если  $A_j$  представлены в виде канонических разложений:

$$A_j(t) = m_j(t) + \sum_{i=1}^q V_{ij} \varphi_i(t),$$

где  $m_j(t)$  — математические ожидания случайных функций;

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_q(t)$  — координатные неслучайные функции;

$V_{ij}$  — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, то дисперсии сумм будут:

$$D[\sum_{j=1}^3 a_j A_j(t)] = \sum_{j=1}^3 (a_j^2 \sum_{i=1}^q \varphi_i^2(t) D_{ji}),$$

$$D[\sum_{j=1}^3 b_j A_j(t)] = \sum_{j=1}^3 (b_j^2 \sum_{i=1}^q \varphi_i^2(t) D_{ji}),$$

где  $D_{ji}$  — дисперсии случайных величин  $V_{ji}$  по каждому из индексов  $j$ . Из этих выражений видим, что с помощью  $a_j$ ,  $b_j$  можно уменьшить величину дисперсии от суммы помех — случайных функций, представленных своими каноническими разложениями на заданном интервале времени.

Таким образом, если известны вероятностные характеристики помех, действующих на вычислительный процесс, то эти сведения



могут быть эффективно использованы при построении избыточной структуры. Определение вероятностных характеристик помех является одной большой и сложной проблемой, которая в данной работе не рассматривается.

6. Как показано Шенноном, с помощью дифференциальных анализаторов может быть воспроизведена любая негипертрансцендентная функция. Из теорем Шеннона следует, что дифференциальные уравнения для воспроизведения любых негипертрансцендентных функций можно получить исходя из линейных дифференциальных форм вида:

$$\sum_{j=1}^{n_1} (C_{j1}x_1 + C_{j2}x_2 + \dots + C_{jn}x_n) dx_j = 0,$$

где  $C_{ji}$  — постоянные коэффициенты.

Поэтому ниже в качестве исходных дифференциальных форм будем использовать лишь линейные формы.

Пусть имеем исходную форму в виде:

$$(B_1y_1 + B_2y_2)dy_1 + (B_3y_1 + B_4y_2)dy_2 = 0. \quad (5.24)$$

Ввести избыточность можно, положив (5.2).

Рассмотрим систему с линейным контрольным условием (5.3).

Решение исходных уравнений будем искать на пересечении двух форм:

$$\sum_{j=1}^3 (C_{j1}x_1 + C_{j2}x_2 + C_{j3}x_3) dx_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 m_j dx_j = 0. \quad (5.25)$$

Над новыми переменными  $x_j$  выполняется операция сжатия, определяемая уравнениями (5.2).

Определив из (5.2) и (5.3)  $x_j$  как функции от  $y_1$  и  $y_2$ , и определив  $dx_j$  как функции от  $dy_1$   $dy_2$  при условии, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = \delta \neq 0,$$

и подставив их в первое уравнение системы (5.25), получим:

$$(B_1^*y_1 + B_2^*y_2)dy_1 + (B_3^*y_1 + B_4^*y_2)dy_2 = 0. \quad (5.26)$$

Из условия тождественности форм (5.24) и (5.26), т.е.  $B_1 = B_1^*$  и т.д., получаем соотношения, выполнение которых необходимо для того, чтобы решение системы (5.25) после сжатия (5.2) полностью соответствовало решению системы (5.24). Эти соотношения между коэффициентами имеют вид:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, B_2 = \begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \\
 B_3 &= \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ c_{j1} & c_{j2} & c_{j3} \end{vmatrix}, B_4 = \begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \\
 L_j &= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}, H_j = \begin{vmatrix} c_{j1} & c_{j2} & c_{j3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}, \quad (5.27) \\
 j &= 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем систему с 18 произвольными коэффициентами, связанными лишь пятью соотношениями. Рассмотрим вопрос о том, как следует назначить эти соотношения, чтобы обеспечить наибольшую помехозащищенность в системе. В расширенной системе решаются дифференциальные уравнения (5.5), где

$$D_{23} = (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3)m_3 - (c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3) \text{ и т.д.}$$

Разложим вектор помех на три составляющие: на составляющую  $N$ , перпендикулярную контрольной плоскости, на составляющую  $V$ , действующую вдоль вектора скорости расширенной системы, и на составляющую  $R$ , перпендикулярную первым двум составляющим. В этом случае получим (5.7):

$$\begin{aligned}
 \sqrt{II} &= \sqrt{\sum Q_j^2 \sum m_j^2 - (\sum Q_j m_j)^2}, j = 1, 2, 3, \\
 \sqrt{III} &= \sqrt{[\sum Q_j^2 \sum m_j^2 - (\sum Q_j m_j)^2] \sum m_j^2}, Q_j = \sum_{i=1}^3 c_{ij} x_i.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим выходные переменные после выполнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{y}_1}{dt} &= (B_3\tilde{y}_1 + B_4\tilde{y}_2) + \frac{\sum a_j m_j}{\sqrt{I}} N + \frac{B_3\tilde{y}_1 + B_4\tilde{y}_2}{\delta\sqrt{II}} V + \\
 &+ [(\sum c_{j1} m_j \sum a_j m_j - \sum c_{j1} a_j \sum m_j^2) \tilde{x}_1 + \\
 &+ (\sum c_{j2} m_j \sum a_j m_j - \sum c_{j2} a_j \sum m_j^2) \tilde{x}_2 + (\sum c_{j3} m_j \sum a_j m_j - \sum c_{j3} a_j \sum m_j^2) \tilde{x}_3] \frac{R}{\sqrt{III}}, \\
 \frac{d\tilde{y}_2}{dt} &= -(B_1\tilde{y}_1 + B_2\tilde{y}_2) + \frac{\sum b_j m_j}{\sqrt{I}} N + \frac{-B_1\tilde{y}_1 - B_2\tilde{y}_2}{\delta\sqrt{II}} V + \\
 &+ [(\sum c_{j1} m_j \sum b_j m_j - \sum c_{j1} b_j \sum m_j^2) \tilde{x}_1 + (\sum c_{j2} m_j \sum b_j m_j - \sum c_{j2} b_j \sum m_j^2) \tilde{x}_2 + \\
 &+ (\sum c_{j3} m_j \sum b_j m_j - \sum c_{j3} b_j \sum m_j^2) \tilde{x}_3] \frac{R}{\sqrt{III}}, \\
 j &= 1, 2, 3. \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Из рассмотрения этих уравнений следует, что вследствие действия помех в решении появляются алгебраические суммы от трех составляющих вектора помехи.

Составляющая  $N$  может быть устранена, если использовать ортогональное расширение, положить:

$$\sum a_j m_j = \sum b_j m_j = 0.$$

Составляющие  $R$  и  $V$  могут быть уменьшены при увеличении знаменателя.

Знаменатель заведомо не нуль, если  $\sum_{j=1}^3 Q_j m_j = 0$ , т.е. если ортогональны многообразия (5.25), что выполняется при условии:

$$\sum c_{j1} m_j = \sum c_{j2} m_j = \sum c_{j3} m_j = 0, j = 1, 2, 3. \tag{5.29}$$

При выполнении условий (5.29) уравнения (5.28) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{y}_1}{dt} &= (B_3\tilde{y}_1 + B_4\tilde{y}_2) + \frac{\sum a_j m_j}{\sqrt{I}} N + \frac{B_3\tilde{y}_1 + B_4\tilde{y}_2}{\delta\sqrt{\sum Q_j^2 \sum m_j^2}} V + \\
 &+ \frac{-\tilde{y}_1 \sum_{j=1}^3 a_j L_j - \tilde{y}_2 \sum_{j=1}^3 a_j H_j}{\delta\sqrt{\sum Q_j^2}} R,
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{y}_2}{dt} = -(B_1\tilde{y}_1 + B_2\tilde{y}_2) + \frac{\sum b_j m_j}{\sqrt{I}} N + \frac{-(B_1\tilde{y}_1 + B_2\tilde{y}_2)}{\delta \sqrt{\sum Q_j^2 \Sigma m_j^2}} V +$$

$$+ \frac{-\tilde{y}_1 \sum_{j=1}^3 B_j L_j - \tilde{y}_2 \sum_{j=1}^3 B_j H_j}{\delta \sqrt{\sum Q_j^2}} R,$$

$$j = 1, 2, 3, \quad (5.30)$$

где  $\sum_{j=1}^3 Q_j^2 = \frac{1}{\delta^2} [(L_1\tilde{y}_1 + H_1\tilde{y}_2)^2 + (L_2\tilde{y}_1 + H_2\tilde{y}_2)^2 + (L_3\tilde{y}_1 + H_3\tilde{y}_2)^2]$ .

Из этих уравнений следует, что составляющая  $R$  не будет влиять на решение, если

$$\sum a_j L_j = \sum a_j H_j = \sum b_j L_j = \sum b_j H_j = 0. \quad (5.31)$$

Устранить влияние составляющей  $V$  в этой системе оказывается невозможным, но в некоторых задачах эту составляющую можно не учитывать. К таким задачам относятся системы программного управления металлорежущими станками [10, 36, 37], где важно воспроизвести заданную кривую или поверхность.

Рассмотрим вопрос о выполнении условий (5.29) и (5.31), отметив, что если выполняются условия (5.29), то это значит, что

$$\sum_{j=1}^3 L_j m_j = 0, \sum_{j=1}^3 H_j m_j = 0. \quad (5.32)$$

Для достаточно общего случая, когда  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  из условий простоты реализации, уравнения (5.27) с учетом (5.32) преобразуются к виду:

$$B_1 = L_1(2b_2 - b_1 - b_3) - L_2(2b_1 - b_2 - b_3),$$

$$B_3 = L_1(a_1 + a_3 - 2a_2) + L_2(2a_1 - a_2 - a_3),$$

$$B_2 = H_1(2b_2 - b_1 - b_3) - H_2(2b_1 - b_2 - b_3),$$

$$B_4 = H_1(a_1 + a_3 - 2a_2) + H_2(2a_1 - a_2 - a_3).$$

Из этих уравнений можно определить  $L_1, L_2, H_1, H_2$ , и, подставив их в (5.31), проверить выполнимость этих условий:

$$\sum a_j L_j = 2\xi_1 B_1 + \xi_3 B_3, \sum b_j L_j = \xi_3 B_1 + 2\xi_2 B_3,$$

$$\sum a_j H_j = 2\xi_1 B_2 + \xi_3 B_4, \sum b_j H_j = \xi_3 B_2 + 2\xi_2 B_4, \quad (5.33)$$

где

$$\xi_1 = \sum a_j^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3,$$

$$\xi_2 = \sum b_j^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_2 b_3,$$

$$\xi_3 = 2 \sum a_j b_j - a_1(b_2 + b_3) - a_2(b_1 + b_3) - a_3(b_1 + b_2).$$

Как очевидно из (5.33), условия (5.31) выполнимы лишь при воспроизведении прямых линий, да и то только тогда, когда

$$4\xi_1\xi_2 - \xi_3^2 = 0,$$

при этом  $\xi_1 \neq 0$ ,  $\xi_2 \neq 0$ , т.к. в противном случае  $\delta = 0$ .

Для любых исходных условий возможно лишь приближительное выполнение условий (5.31). В качестве примера рассмотрим вопрос о синтезе устройства, воспроизводящего окружность  $B_1 = B_4 = 1$ ,  $B_2 = B_3 = 0$ . В случае диагональной матрицы  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = a_3 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 0$ ,  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , коэффициенты  $c_{ij}$  определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} c_{11} - c_{31} - c_{13} + c_{33} &= 1, & c_{21} - c_{31} - c_{23} + c_{33} &= 0, \\ c_{12} - c_{32} - c_{13} + c_{33} &= 0, & c_{22} - c_{32} - c_{23} + c_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Из условий ортогональности пересекающихся многообразий имеем:

$$c_{11} + c_{21} + c_{31} = 0, \quad c_{12} + c_{22} + c_{32} = 0, \quad c_{13} + c_{23} + c_{33} = 0.$$

Два из коэффициентов  $c_{ji}$  могут быть заданы произвольно, например, исходя из требования иметь минимальные коэффициенты в правых частях уравнений. Если пересекающиеся многообразия:

$$\left. \begin{aligned} (3x_1 + x_3)dx_1 + (-x_2 - x_3)dx_2 + (x_1 - x_2)dx_3 &= 0 \\ dx_1 + dx_2 + dx_3 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

то дифференциальные уравнения, решения которых — окружность, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 - x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned} \right\}. \quad (5.34)$$

Окружность в этом случае является проекцией на плоскость  $X_1 X_2$  линии пересечения однополостного гиперболоида с плоскостью.

Как можно показать, в случае диагональной подстановки при выполнении условий ортогональности подбором  $c_{ji}$  не удастся уменьшить влияние помехи, параллельной контрольной плоскости. В качестве фильтра, уменьшающего влияние таких помех на решение, может быть использовано устройство сжатия при соответствующем подборе  $a_i, b_i, m_i$ .

Например, если  $a_1 = 1, a_2 = 1,1, a_3 = 0,9, b_1 = 0,9, b_2 = 1, b_3 = 1,1$ , то  $\xi_1 = \xi_2 = 0,06, \xi_3 = 0,03$ , что свидетельствует о значительном уменьшении влияния параллельной составляющей на решение. Дифференциальные уравнения, решения которых — окружность, при такой матрице сжатия будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

с начальными условиями:

$$x_1 = -3,33R, x_2 = 6,66R, x_3 = -3,33R \text{ для } y_1 = R, y_2 = 0.$$

В рассмотренном примере имеет место увеличение масштабов, т.к.  $\delta = 0,03$ .

Для точного задания скорости в соответствии с заданными дифференциальными уравнениями следует рассматривать формы:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + c_{j3}x_3)dx_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^3 a_j dx_j - (B_3y_1 + B_4y_2)dx_4 &= 0, \\ \sum_{j=1}^3 m_j dx_j &= 0, x_4 = t. \end{aligned}$$

Эквивалентная система дифференциальных уравнений для этого случая:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1 D'_{234} = -u_1 (B_3y_1 + B_4y_2) D_{23} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 D^2_{134} = u_1 (B_3y_1 + B_4y_2) D_{13} \\ \frac{dx_3}{dt} &= u_1 D^3_{124} = -u_1 (B_3y_1 + B_4y_2) D_{12} \\ \frac{dx_4}{dt} &= -u_1 \frac{B_3y_1 + B_4y_2}{\delta} = 1 \end{aligned} \right\}$$

Определив  $u_1$  из последнего уравнения и подставив его в верхние уравнения, получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = \delta D_{23}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\delta D_{13}, \quad \frac{dx_3}{dt} = \delta D_{12}.$$

После сжатия величина  $\delta$  будет сокращаться и не влияет на масштабы скоростей. Величина  $\delta$  влияет лишь на масштабы начальных условий.

В заключение раздела о жестких структурах отметим, что подставив в уравнения (5.34)  $x_3 = -x_1 - x_2$ , получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -u_1 x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = u_1 (x_1 - x_2),$$

т.е. получаем уравнения такие же, как и при простом диагональном расширении.

Таким образом, использование форм (5.25) эквивалентно тождественным преобразованиям внутри дифференциальных уравнений, и если в отсутствие помех они не имеют никакого смысла, то при их наличии они определяют структуры с разной помехоустойчивостью.

## § 6. Избыточные структуры с непрерывной обратной связью

Выше были рассмотрены вопросы контроля избыточных структур, и естественно использовать сигнал ошибки на выходе контрольного органа для коррекции с помощью обратной связи.

План рассмотрения таких избыточных систем будет следующим — сначала будут построены цепи коррекции для невозмущенных избыточных систем, а потом будут исследоваться возмущенные уравнения с обратной связью.

Для построения структур с обратной связью осуществим дополнительное расширение избыточных структур, введя новые дополнительные переменные — ошибки в воспроизведении заданных функций или в решении заданных уравнений, и воспользуемся методом, изложенным в § 2.

1. Вначале рассмотрим вопрос о построении структур с контролем и коррекцией по воспроизводимой функции [18, 24]. Если

исходная дифференцируемая в заданной области изменения переменных функция  $F(y_1, y_2) = 0$ , то введя в качестве сигнала ошибки новую переменную  $y_3$ , получим:

$$F(y_1, y_2) = y_3. \quad (6.1)$$

После дифференцирования будем иметь:

$$\frac{dF}{dy_1} dy_1 + \frac{dF}{dy_2} dy_2 - dy_3 = 0, \quad (6.2)$$

и эквивалентная для (6.2) система дифференциальных уравнений будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= u_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} - u_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -u_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - u_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= -u_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} - u_3 \frac{\partial F}{\partial y_2} \end{aligned} \right\}. \quad (6.3)$$

Величина  $y_3$  подсчитывается в контрольном органе по формуле (6.1), она известна, и ее можно использовать для коррекции, назначив неопределенные коэффициенты  $u_2$  и  $u_3$  таким образом, чтобы  $y_3 \rightarrow 0$ .

Это осуществимо, если положить

$$u_2 = y_3 \frac{\partial F}{\partial y_1} \alpha, \quad u_3 = y_3 \frac{\partial F}{\partial y_2} \alpha. \quad (6.4)$$

В системе с коррекцией по воспроизводимой функции должны решаться уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= u_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} - \alpha y_3 \frac{\partial F}{\partial y_1}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -u_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - \alpha y_3 \frac{\partial F}{\partial y_2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

с начальными условиями  $y_{10}$  и  $y_{20}$ , для которых

$$F(y_{10}, y_{20}) = 0.$$

Последнее уравнение системы (6.3) служит только для теоретического рассмотрения вопроса о назначении коэффициентов, оно напрямую не решается в устройстве, в рассматриваемом случае оно будет иметь вид:



$$\frac{dy_3}{dt} = -\alpha y_3 \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 \right], \quad (6.6)$$

откуда следует, что  $y_3$  устойчиво стремится к нулю при коэффициенте усиления в цепи коррекции  $\alpha > 0$ . С помощью коэффициента  $u_1$  задается скорость и направление движения по заданной траектории  $F(y_1, y_2) = 0$ .

Если функция, которую требуется воспроизвести, задается пересечением дифференцируемых многообразий:

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ F_m(y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0, \quad m \leq n, \end{aligned} \quad (6.7)$$

то при этом случай  $m = n$  означает требование решить, найти корни нелинейной системы конечных уравнений; случай  $m = n - 1$  означает требование воспроизвести заданную линию, одномерное многообразие, в  $n$ -мерном пространстве; случай  $m = n - 2$  означает требование воспроизводить траектории на заданной многомерной поверхности на двумерном многообразии, и т.д. Введя новые дополнительные переменные, получим:

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_{n+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ F_m(y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_{n+m}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Продифференцировав эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial F_1}{\partial y_i} dy_i - dy_{n+1} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum \frac{\partial F_m}{\partial y_i} dy_i - dy_{n+m} &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

В соответствии с методом, описанным в § 2, можем построить эквивалентную для (6.9) систему дифференциальных уравнений, которая будет содержать  $S = C_{n+m}^{m+1}$  неопределенных коэффициентов, часть из которых можно использовать для построения цепи коррекции. Например, для двух пересекающихся многообразий с четырьмя переменными:

$$F_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_5,$$

$$F_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_6, \quad (6.10)$$

где  $y_5$  и  $y_6$  — сигналы ошибок на выходах контрольного органа, структура эквивалентных для (6.10) дифференциальных уравнений будет содержать двадцать неопределенных коэффициентов и будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= u_1 D_{23} + u_2 D_{24} + u_3 D_{25} + u_4 D_{26} + u_5 D_{34} + \\ &+ u_6 D_{35} + u_7 D_{36} + u_8 D_{45} + u_9 D_{46} + u_{10} D_{56}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -u_1 D_{13} - u_2 D_{14} - u_3 D_{15} - u_4 D_{16} + \\ &+ u_{11} D_{34} + u_{12} D_{35} + u_{13} D_{36} + u_{14} D_{45} + u_{15} D_{46} + u_{16} D_{56}, \\ \frac{dy_3}{dt} &= u_1 D_{12} - u_5 D_{14} - u_6 D_{15} - u_7 D_{16} - u_{11} D_{24} - \\ &- u_{12} D_{25} - u_{13} D_{26} + u_{17} D_{45} + u_{18} D_{46} + u_{19} D_{56}, \\ \frac{dy_4}{dt} &= u_2 D_{12} + u_5 D_{13} - u_8 D_{15} - u_9 D_{16} + u_{11} D_{23} - \\ &- u_{14} D_{25} - u_{15} D_{26} - u_{17} D_{35} - u_{18} D_{36} + u_{20} D_{56}, \\ \frac{dy_5}{dt} &= u_3 D_{12} + u_6 D_{13} + u_8 D_{14} - u_{10} D_{16} + u_{12} D_{23} + u_{14} D_{24} - \\ &- u_{16} D_{26} + u_{17} D_{34} - u_{19} D_{36} - u_{20} D_{46}, \\ \frac{dy_6}{dt} &= u_4 D_{12} + u_7 D_{13} + u_9 D_{14} + u_{10} D_{15} + u_{13} D_{23} + \\ &+ u_{15} D_{24} + u_{16} D_{26} + u_{18} D_{34} + u_{19} D_{35} + u_{20} D_{45}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Проанализируем структуру неопределенных коэффициентов этой системы. Во-первых, выделим группу из четырех коэффициентов  $u_1, u_2, u_5, u_{11}$ , которые входят только в уравнения для исходных переменных  $y_1 \div y_4$  и которые задают различные траектории на заданном пересечении многообразий. Во-вторых, выделим группу коэффициентов, которые входят только в уравнения для  $y_1 \div y_4$  и для  $y_5$ , таких коэффициентов шесть:  $u_3, u_6, u_8, u_{12}, u_{14}, u_{17}$ , и группу коэффициентов, которые входят только в уравнения для  $y_1 \div y_4$  и для  $y_6$ , таких коэффициентов тоже шесть:  $u_4, u_7, u_9, u_{13}, u_{15}, u_{18}$ . В-третьих, выделим группу коэффициентов,

которые входят сразу в оба уравнения для переменных  $y_5$  и  $y_8$ , их четыре:  $u_{10}$ ,  $u_{16}$ ,  $u_{19}$ ,  $u_{20}$ .

Очевидно, что коэффициенты первой группы нельзя использовать для коррекции, коэффициенты второй группы можно использовать для коррекции либо по  $y_5$ , либо по  $y_6$ , а коэффициенты третьей группы могут быть использованы для коррекции сразу по обоим переменным  $y_5$ , и  $y_6$ , для коррекции с перекрестными связями.

Вначале для простоты положим:

$$u_{10} = u_{16} = u_{19} = u_{20} = 0, \quad (6.12)$$

что позволяет развязать переменные  $y_5$ , и  $y_6$ , и назначим коэффициенты второй группы так, чтобы  $y_5 \rightarrow 0$ ,  $y_6 \rightarrow 0$  при условии, что величины  $y_5$ , и  $y_6$  известны как результат вычислений в контрольном органе,

$$\begin{aligned} u_3 &= -y_5 \alpha_1 D_{12}, u_6 = -y_5 \alpha_2 D_{13}, u_8 = -y_5 \alpha_3 D_{14}, \\ u_{12} &= -y_5 \alpha_4 D_{23}, u_{14} = -y_5 \alpha_5 D_{24}, u_{17} = -y_5 \alpha_6 D_{34}, \\ u_4 &= -y_6 \beta_1 D_{12}, u_7 = -y_6 \beta_2 D_{13}, u_9 = -y_6 \beta_3 D_{14}, \\ u_{13} &= -y_6 \beta_4 D_{23}, u_{15} = -y_6 \beta_5 D_{24}, u_{18} = -y_6 \beta_6 D_{34}. \end{aligned}$$

После этого уравнения для  $y_5$ , и  $y_6$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy_5}{dt} &= -y_5 [\alpha_1 (D_{12})^2 + \alpha_2 (D_{13})^2 + \alpha_3 (D_{14})^2 + \alpha_4 (D_{23})^2 + \\ &+ \alpha_5 (D_{24})^2 + \alpha_6 (D_{34})^2], \\ \frac{dy_6}{dt} &= -y_6 [\beta_1 (D_{12})^2 + \beta_2 (D_{13})^2 + \beta_3 (D_{14})^2 + \beta_4 (D_{23})^2 + \\ &+ \beta_5 (D_{24})^2 + \beta_6 (D_{34})^2]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Если выражения в квадратных скобках определенно положительны, то  $y_5$ , и  $y_6$  устойчиво стремятся к нулю. Для того, чтобы свести к минимуму число случаев, когда выражения в квадратных скобках равны нулю, можно положить:

$$\alpha_j = \alpha, \beta_j = \beta, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (6.14)$$

Из условий устойчивости должно быть  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . В этом случае выражения в квадратных скобках обращаются в нуль только в особых точках исходной системы уравнений. Такую коррекцию будем называть полной коррекцией по воспроизводимой

функции без перекрестных связей. Очевидно, по условиям устойчивости можно было бы использовать для коррекции не шесть, а меньшее число неопределенных коэффициентов, но при этом возрастет число случаев, когда коррекция действовать не будет, несмотря на наличие сигнала ошибки, отличного от нуля.

При априорных сведениях о том, какие  $D_{ij}$  не обращаются в нуль в рабочем диапазоне изменения переменных, можно упростить схему коррекции, положив ряд коэффициентов второй группы равными нулю, без риска увеличить число особых точек коррекции.

Обратимся к анализу коррекции с перекрестными связями. Заметим, что

$$\begin{aligned} D_{15} &= -\frac{\partial F_2}{\partial y_1}, D_{16} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, D_{25} = -\frac{\partial F_2}{\partial y_2}, D_{26} = \frac{\partial F_1}{\partial y_2}, \\ D_{35} &= -\frac{\partial F_2}{\partial y_3}, D_{36} = \frac{\partial F_1}{\partial y_3}, D_{45} = -\frac{\partial F_2}{\partial y_4}, D_{46} = \frac{\partial F_1}{\partial y_4}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Назначим коэффициенты третьей группы как линейные комбинации от сигналов ошибок:

$$\begin{aligned} u_{10} &= \xi_1 y_5 + \eta_1 y_6, u_{16} = \xi_2 y_5 + \eta_2 y_6, \\ u_{19} &= \xi_3 y_5 + \eta_3 y_6, u_{20} = \xi_4 y_5 + \eta_4 y_6. \end{aligned} \quad (6.16)$$

И при условии, что все коэффициенты второй группы равны нулю, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dy_5}{dt} &= \left( -\xi_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \xi_2 \frac{\partial F_1}{\partial y_2} - \xi_3 \frac{\partial F_1}{\partial y_3} - \xi_4 \frac{\partial F_1}{\partial y_4} \right) y_5 + \\ &+ \left( -\eta_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \eta_2 \frac{\partial F_1}{\partial y_2} - \eta_3 \frac{\partial F_1}{\partial y_3} - \eta_4 \frac{\partial F_1}{\partial y_4} \right) y_6, \\ \frac{dy_6}{dt} &= \left( -\xi_1 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} - \xi_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \xi_3 \frac{\partial F_2}{\partial y_3} - \xi_4 \frac{\partial F_2}{\partial y_4} \right) y_5 + \\ &+ \left( -\eta_1 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} - \eta_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \eta_3 \frac{\partial F_2}{\partial y_3} - \eta_4 \frac{\partial F_2}{\partial y_4} \right) y_6. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Система (6.17) является линейной системой с переменными коэффициентами относительно  $y_5$ , и  $y_6$ . При наличии априорной информации о  $\frac{\partial F_1}{\partial y_i}, \frac{\partial F_2}{\partial y_i}, i = 1, 2, 3, 4$  в некоторых случаях можно подобрать такие  $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, 3, 4$ , чтобы  $y_5$ , и  $y_6$  устойчиво стремились к нулю в заданном диапазоне изменения переменных

$y_1 \div y_4$  при наличии постоянно действующих возмущений. Для решения этой задачи математическая теория устойчивости располагает большим арсеналом средств. Например, если каждая из частных производных  $\frac{\partial F_1}{\partial y_i}, \frac{\partial F_2}{\partial y_i}, i = 1, 2, 3, 4$  состоит из двух частей — постоянной  $a_{ji}$  и переменной  $a_{ji}(t)$ , причем  $a_{ji}(t) = a_{ji}(y_1, y_2, y_3, y_4)$  ограничена, то, очевидно, можно подобрать такие постоянные  $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, 3, 4$ , чтобы система дифференциальных уравнений (6.17) при  $a_{ji}(t) = 0$  была устойчива, что гарантирует устойчивость и при  $a_{ji}(t) \neq 0$ , когда они ограничены по величине.

Появление перекрестных связей в системе с коррекцией при воспроизведении функций, лежащих на пересечении двух и более многообразий, является интересным результатом аналитического конструирования, потому что схема коррекции с перекрестными связями оказывается значительно проще схемы полной коррекции. Это очевидно при рассмотрении первых четырех уравнений системы (6.11) с учетом того, что  $D_{56} = 1$ .

Аналогичным образом синтезируется система коррекции по воспроизводимой функции для любых  $m$  и  $n$  уравнений (6.7).

1. Если для контроля решения системы (6.7) используются не все  $m$  уравнений, а только часть их, то вопрос об эффективности такого контроля и коррекции совпадает с анализом эффективности МИП применительно к исходным дифференциальным уравнениям, решения или первые интегралы которых заранее не известны.

2. Предельным случаем систем с коррекцией по воспроизводимой функции является задача нахождения корней системы нелинейных уравнений. Если требуется решить систему:

$$\left. \begin{aligned} F_1(y_1, \dots, y_n) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(y_1, \dots, y_n) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

при условии, что якобиан этой системы не равен нулю, то введя в качестве дополнительных переменных невязки исходных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F_1(y_1, \dots, y_n) &= y_{n+1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(y_1, \dots, y_n) &= y_{2n} \end{aligned} \right\},$$

можно в соответствии с рассмотренной процедурой построить систему дифференциальных уравнений, для которой точками устойчивого равновесия будут корни исходной системы. Для иллюстрации этого рассмотрим простой пример.

Если исследуемая система:

$$F_1(y_1, y_2) = 0, F_2(y_1, y_2) = 0,$$

для которой:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

в заданной области изменения переменных, то взяв в качестве исходных уравнений Пфаффа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} dy_2 - dy_3 &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} dy_2 - dy_4 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

получим систему эквивалентных дифференциальных уравнений в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= u_1 D_{23} + u_2 D_{24} + u_3 D_{34}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -u_1 D_{13} - u_2 D_{14} + u_4 D_{34}, \\ \frac{dy_3}{dt} &= u_1 D_{12} - u_3 D_{14} - u_4 D_{24}, \\ \frac{dy_4}{dt} &= u_2 D_{12} + u_3 D_{13} + u_4 D_{23}. \end{aligned}$$

В этой системе для устойчивого стремления  $y_3$  и  $y_4$  к 0 положим:

$$u_1 = -y_3 D_{12} \alpha_1, u_2 = -y_4 D_{12} \alpha_2,$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — положительные коэффициенты, а  $u_3 = u_4 = 0$  для развязки переменных  $y_3$  и  $y_4$ . Тогда решаемая система примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -y_3 \alpha_1 D_{12} D_{23} - y_4 \alpha_2 D_{12} D_{24}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3 \alpha_1 D_{12} D_{13} + y_4 \alpha_2 D_{12} D_{14}. \end{aligned}$$

Так как  $D_{12} \neq 0$ , и  $D_{12}$  будет влиять лишь на скорость движения к корням исходной системы конечных уравнений, то поэтому можно положить  $D_{12} dt = d\tau$ , и должна решаться более простая система:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau} &= -y_3\alpha_1 D_{23} - y_4\alpha_2 D_{24}, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= y_3\alpha_1 D_{13} + y_4\alpha_2 D_{14},\end{aligned}$$

где  $y_3 = F_1(y_1, y_2)$ ,  $y_4 = F_2(y_1, y_2)$ .

Начальные условия для этой системы выбираются произвольно в заданной области изменения переменных, и из этой произвольной точки осуществляется устойчивое движение в сторону корней исходной системы, которые будут точками устойчивого равновесия для построенной системы дифференциальных уравнений.

В отличие от известных методов [28, 39, 41], такой способ поиска корней систем конечных уравнений не требует предварительного изучения фазового пространства переменных  $y_1$  и  $y_2$  и обеспечивает сходимость к корням в заданной области, если только они там есть. Он может быть распространен для поиска корней и для плохо обусловленных систем исходных уравнений.

3. Если имеем исходное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, t), \quad y_1(0) = y_{10}, \quad (6.18)$$

то для аналитического конструирования цепей коррекции с помощью МИП будем исходить из соответствующего уравнения Пфаффа, рассматривая время в качестве равноправной переменной  $t = y_2$ ,

$$dy_1 - f_1(y_1, y_2)dy_2 = 0. \quad (6.19)$$

Введем новые переменные:

$$y_1 = \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j, \quad y_2 = \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j, \quad (6.20)$$

на которые наложим дополнительное условие:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (6.21)$$

после дифференцирования которого уравнения Пфаффа расширенной системы будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - f_1(x_1, x_2, x_3) a_{2j}) dx_j &= dx_4 \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j &= dx_5 \end{aligned} \right\}, \quad (6.22)$$

где  $dx_4$  и  $dx_5$  — дифференциалы ошибок в исходном уравнении и в контрольном условии соответственно.

Эквивалентная для (6.22) система дифференциальных уравнений будет содержать 10 неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u_1 D_{23} + u_2 D_{24} + u_3 D_{25} + u_4 D_{34} + u_5 D_{35} + u_6 D_{45}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -u_1 D_{13} - u_2 D_{14} - u_3 D_{15} + u_7 D_{34} + u_8 D_{35} + u_9 D_{45}, \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= u_1 D_{12} - u_4 D_{14} - u_5 D_{15} - u_7 D_{24} - u_8 D_{25} + u_{10} D_{45}, \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= u_2 D_{12} + u_4 D_{13} - u_6 D_{15} + u_7 D_{23} - u_9 D_{25} - u_{10} D_{35}, \\ \frac{dx_5}{d\tau} &= u_3 D_{12} + u_5 D_{13} + u_6 D_{14} + u_8 D_{23} + u_9 D_{24} + u_{10} D_{34}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где  $\tau$  — машинное время, в общем случае  $\tau \neq t$ .

С помощью неопределенных коэффициентов в уравнениях (6.23) можно задавать различные алгоритмы коррекции, полагая известной величину сигнала ошибки  $x_5$ .

С помощью коэффициентов  $u_6$ ,  $u_9$ ,  $u_{10}$  может быть задан алгоритм линейной коррекции. Действительно, если

$$\begin{aligned} u_6 &= -\alpha x_5 D_{14}, \quad u_9 = -\alpha x_5 D_{24}, \quad u_{10} = -\alpha x_5 D_{34}, \\ u_2 &= u_3 = u_4 = u_5 = u_7 = u_8 = 0, \\ D_{45} &= 1, \quad D_{14} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \quad D_{24} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \quad D_{34} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

то получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u_1 D_{23} - \alpha x_5 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -u_1 D_{13} - \alpha x_5 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= u_1 D_{12} - \alpha x_5 \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \end{aligned} \right\}. \quad (6.25)$$



Коэффициент  $u_1$  определяется из условия для переменной  $y_2$ :

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -\delta u_1, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Если желательна работа в натуральном масштабе времени, то  $\tau = t$ ,  $u_1 = -\frac{1}{\delta}$ .

При этом:

$$\frac{dx_5}{d\tau} = -\frac{dx_3}{d\tau} \alpha [\sum_{j=1}^3 (\frac{\partial F}{\partial x_j})^2], \quad (6.26)$$

и при  $\alpha > 0$  обеспечивается устойчивое стремление к нулю, но при этом:

$$\frac{dx_4}{d\tau} = x_5 \alpha [D_{15}D_{14} + D_{25}D_{14} + D_{35}D_{34}], \quad (6.27)$$

т.е. не обеспечивается устойчивость относительно ошибки  $x_4$  в исходном уравнении.

При выполнении ортогонального расширения, т.е. когда

$$\sum_{j=1}^3 a_{1j} \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad \sum_{j=1}^3 a_{2j} \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad (6.28)$$

относительно  $x_4$  обеспечивается неопределенное положение:

$$\frac{dx_4}{d\tau} \equiv 0. \quad (6.29)$$

Аналогичный алгоритм может быть получен при следующем назначении коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_3 &= -x_5 \alpha D_{12}, \quad u_5 = -x_5 \alpha D_{13}, \quad u_8 = -x_5 \alpha D_{23}, \\ u_2 &= u_4 = u_6 = u_7 = u_9 = u_{10} = 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

В этом случае система с коррекцией будет описываться уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u_1 D_{23} - \alpha x_5 [D_{12}D_{25} + D_{13}D_{35}], \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -u_1 D_{13} - \alpha x_5 [-D_{12}D_{15} + D_{23}D_{35}], \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= u_1 D_{12} - \alpha x_5 [-D_{13}D_{15} - D_{23}D_{25}], \end{aligned} \quad (6.31)$$

а дифференциальные уравнения ошибок будут:

$$\frac{dx_4}{d\tau} \equiv 0, \quad \frac{dx_5}{d\tau} = -x_5 \alpha [(D_{12})^2 + (D_{13})^2 + (D_{23})^2]. \quad (6.32)$$

Ввиду того, что ошибка  $x_4$  ненаблюдаема, имеются большие трудности в построении такой цепи коррекции, при которой обеспечивается устойчивое стремление к нулю как ошибки  $x_5$ , так и ошибки  $x_4$ . Очевидно, если бы  $x_4$  и  $x_5$  были связаны функциональной зависимостью, то можно было бы более определенно судить о величине и скорости изменения одной ошибки, зная величину и скорость другой, и отмеченная выше трудность может быть преодолена.

Свяжем  $x_4$  и  $x_5$  уравнением:

$$\gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 = 0, \quad (6.33)$$

где  $\gamma_4$  и  $\gamma_5$  — постоянные коэффициенты.

Продифференцировав эти уравнения и добавив к соотношению (6.22), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - f_1(x_1 x_2 x_3) a_{2j}) dx_j &= dx_4 \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j &= dx_5 \\ \gamma_4 dx_4 + \gamma_5 dx_5 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.34)$$

Эквивалентная система дифференциальных уравнений в этом случае будет содержать 5 неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u_1 D_{234} + u_2 D_{235} + u_3 D_{245} + u_4 D_{345}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -u_1 D_{134} - u_2 D_{135} - u_3 D_{145} + u_5 D_{345}, \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= u_1 D_{124} + u_2 D_{125} - u_4 D_{145} - u_5 D_{245}, \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= -u_1 D_{123} + u_3 D_{125} + u_4 D_{135} + u_5 D_{235}, \\ \frac{dx_5}{d\tau} &= -u_2 D_{123} - u_3 D_{124} - u_4 D_{134} - u_5 D_{234}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

где  $D_{123} = 0$ ,  $D_{124} = \gamma_4 D_{12}$ ,  $D_{125} = \gamma_5 D_{12}$ ,  $D_{134} = \gamma_4 D_{13}$ ,

$$D_{135} = \gamma_5 D_{13}, \quad D_{234} = \gamma_4 D_{23}, \quad D_{235} = \gamma_5 D_{23},$$

$$D_{145} = \gamma_5 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \gamma_4 (a_{11} - f_i a_{21}), \quad D_{245} = \gamma_5 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \gamma_4 (a_{12} - f_i a_{22}),$$

$$D_{345} = \gamma_5 \frac{\partial F}{\partial x_3} + \gamma_4 (a_{13} - f_i a_{23}).$$

Положив:

$$u_3 = \alpha x_5 D_{124}, u_4 = \alpha x_5 D_{134}, u_5 = \alpha x_5 D_{234},$$

получим:

$$\frac{dx_5}{d\tau} = -\alpha x_5 \gamma_4^2 [(D_{12})^2 + (D_{13})^2 + (D_{23})^2], \quad (6.36)$$

а уравнение ошибки в исходном уравнении будет иметь вид:

$$\frac{dx_4}{d\tau} = \alpha x_5 \gamma_4 \gamma_5 [(D_{12})^2 + (D_{13})^2 + (D_{23})^2], \quad (6.37)$$

которое при выполнении условия (6.33) обращается в устойчивое

$$\frac{dx_4}{d\tau} = -\alpha x_4 \gamma_5^2 [(D_{12})^2 + (D_{13})^2 + (D_{23})^2]. \quad (6.38)$$

Расширенная система уравнений с коррекцией будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= (u_1 \gamma_4 + u_2 \gamma_5) D_{23} + x_5 \alpha \gamma_4 [D_{12} D_{245} + D_{13} D_{345}], \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -(u_1 \gamma_4 + u_2 \gamma_5) D_{13} + x_5 \alpha \gamma_4 [-D_{12} D_{145} + D_{23} D_{345}], \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= (u_1 \gamma_4 + u_2 \gamma_5) D_{12} + x_5 \alpha \gamma_4 [-D_{13} D_{145} - D_{23} D_{245}]. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Коэффициенты  $u_1$  и  $u_2$  находятся из условия, определяющего скорость решения в машинном времени по сравнению со временем исходной задачи. Действительно,

$$\frac{dy_2}{d\tau} = \sum_{j=1}^3 a_{2j} \frac{dx_j}{d\tau} = (u_1 \gamma_4 + u_2 \gamma_5) \delta, \quad (6.40)$$

где

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если требуется решение задачи в натуральном масштабе времени, то

$$\frac{dy_2}{d\tau} = 1, u_1 \gamma_4 + u_2 \gamma_5 = \frac{1}{\delta}. \quad (6.41)$$

Увеличив число избыточных переменных, можно наложить еще одно контрольное условие на расширенную задачу:

$$y_1 = \sum_{j=1}^4 a_{1j} x_j, y_2 = \sum_{j=1}^4 a_{2j} x_j, \quad (6.42)$$

$$F_1(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0, F_2(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0. \quad (6.43)$$

Продифференцировав уравнения (6.43), запишем всю систему с учетом уравнений (6.42) в виде уравнений Пфаффа:

$$\sum_{j=1}^4 Q_j dx_j = 0, \sum_{j=1}^4 \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j = 0, \sum_{j=1}^4 \frac{\partial F_2}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad (6.44)$$

где  $Q_j = a_{1j} - f_1(x_1 x_2 x_3 x_4) a_{2j}, j = 1, 2, 3, 4$ .

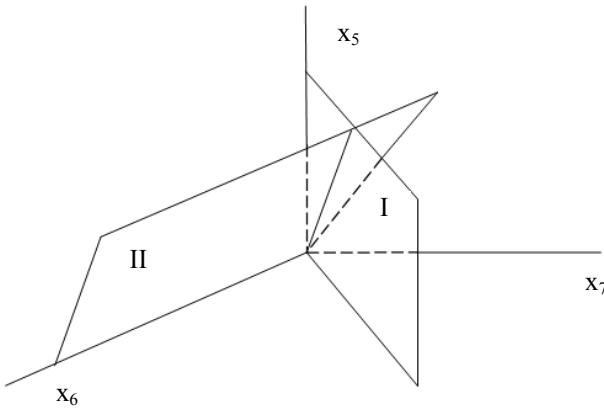
Чтобы синтезировать цепь коррекции, охватить вычислительный процесс обратной связью, введем новые переменные  $x_6$  и  $x_7$  — ошибки в выполнении контрольных условий, и будем рассматривать как дифференциал новой переменной  $x_5$  ошибку в исходном уравнении. После этого расширения основные соотношения запишутся в виде:

$$\sum_{j=1}^4 Q_j dx_j = dx_5, \sum_{j=1}^4 \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j = dx_6, \sum_{j=1}^4 \frac{\partial F_2}{\partial x_j} dx_j = dx_7. \quad (6.45)$$

Рассмотрим пространство ошибок с координатами  $x_5, x_6, x_7$ . Для того, чтобы можно было однозначным образом судить о величине и скорости одной ошибки, зная величину и скорость другой, свяжем их простейшей функциональной зависимостью:

$$\gamma'_5 x_5 + \gamma_6 x_6 = 0, \gamma''_5 x_5 + \gamma_7 x_7 = 0. \quad (6.46)$$

В этом случае ошибки будут лежать на пересечении плоскостей I и II в соответствии с рис. 9.



**Рис. 9.** Пространство ошибок с координатами  $x_5, x_6, x_7$

Продифференцировав уравнения (6.46), добавив их к соотношениям (6.45), построим эквивалентную им систему дифференциальных уравнений, которая в данном случае будет содержать семь произвольных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= u_1 D_{23456} + u_2 D_{23457} + u_3 D_{23467} + u_4 D_{23567} + \\
&+ u_5 D_{24567} + u_6 D_{34567}, \\
\frac{dx_2}{dt} &= -u_1 D_{13456} - u_2 D_{13457} - u_3 D_{13467} - u_4 D_{13567} - \\
&- u_5 D_{14567} + u_7 D_{34567}, \\
\frac{dx_3}{dt} &= u_1 D_{12456} + u_2 D_{12457} + u_3 D_{12467} + u_4 D_{12567} - \\
&- u_6 D_{14567} - u_7 D_{24567}, \\
\frac{dx_4}{dt} &= -u_1 D_{12356} - u_2 D_{12357} - u_3 D_{12367} + u_5 D_{12567} + \\
&+ u_6 D_{13567} + u_7 D_{23567}, \\
\frac{dx_5}{dt} &= u_1 D_{12346} + u_2 D_{12347} - u_4 D_{12367} - u_5 D_{12467} - \\
&- u_6 D_{13467} - u_7 D_{23467}, \\
\frac{dx_6}{dt} &= -u_1 D_{12345} + u_3 D_{12347} + u_4 D_{12357} + u_5 D_{12457} + \\
&+ u_6 D_{13457} + u_7 D_{23457}, \\
\frac{dx_7}{dt} &= -u_2 D_{12345} - u_3 D_{12346} - u_4 D_{12356} - u_5 D_{12456} - \\
&- u_6 D_{13456} - u_7 D_{23456},
\end{aligned} \tag{6.47}$$

где  $D_{12345} = D_{12346} = D_{12347} = 0$ ,

$$\begin{aligned}
D_{12367} &= D_{123}\gamma_6\gamma_7, \quad D_{13467} = D_{134}\gamma_6\gamma_7, \\
D_{12467} &= D_{124}\gamma_6\gamma_7, \quad D_{23467} = D_{234}\gamma_6\gamma_7, \\
D_{12356} &= -D_{123}\gamma_5''\gamma_6, \quad D_{12357} = D_{123}\gamma_5'\gamma_7, \\
D_{13456} &= -D_{134}\gamma_5''\gamma_6, \quad D_{12457} = D_{124}\gamma_5'\gamma_7, \\
D_{12456} &= -D_{124}\gamma_5''\gamma_6, \quad D_{13457} = D_{134}\gamma_5'\gamma_7, \\
D_{23456} &= -D_{234}\gamma_5''\gamma_6, \quad D_{23457} = D_{234}\gamma_5'\gamma_7.
\end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения ошибок зависят от четырех коэффициентов  $u_4$ ,  $u_5$ ,  $u_6$ ,  $u_7$ , которые и можно так назначить в функции от известных, измеряемых ошибок  $x_6$  и  $x_7$ , чтобы обеспечить устойчивое стремление  $x_5$ ,  $x_6$  и  $x_7$  к нулю. В частности, можно положить:

$$u_4 = \alpha x_7 D_{12356}, \quad u_5 = \alpha x_7 D_{12456},$$

$$u_6 = \alpha x_7 D_{13456}, u_7 = \alpha x_7 D_{23456}, \quad (6.48)$$

что обеспечивает устойчивое стремление переменной  $x_7$  к нулю. Чтобы использовать для коррекции как сигнал  $x_7$ , так и сигнал  $x_6$ , назначим:

$$\begin{aligned} u_4 &= -\alpha_1 x_6 D_{12357}, u_5 = \alpha_2 x_7 D_{12456}, \\ u_6 &= -\alpha_1 x_6 D_{13457}, u_7 = -\alpha_2 x_6 D_{23456}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

И третий вариант коррекции получим, назначив:

$$\begin{aligned} u_4 &= -x_6 \alpha D_{12357}, u_5 = -x_6 \alpha D_{12457}, \\ u_6 &= -x_6 \alpha D_{13457}, u_7 = -x_6 \alpha D_{23457}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Воспользовавшись уравнениями (6.46), рассмотрим уравнения для переменных  $x_5$ ,  $x_6$ ,  $x_7$ , которые получаются при разных вариантах коррекции. Для вариантов (6.48) и (6.50) получим:

$$\begin{aligned} \frac{dx_5}{d\tau} &= -x_5 \alpha B_1 [(D_{123})^2 + (D_{124})^2 + (D_{134})^2 + (D_{234})^2], \\ \frac{dx_6}{d\tau} &= -x_6 \alpha B_1 [(D_{123})^2 + (D_{124})^2 + (D_{134})^2 + (D_{234})^2], \\ \frac{dx_7}{d\tau} &= -x_7 \alpha B_1 [(D_{123})^2 + (D_{124})^2 + (D_{134})^2 + (D_{234})^2], \end{aligned} \quad (6.51)$$

где  $B_1 = (\gamma_5'' \gamma_6)^2$  для варианта (6.48) и  $B_1 = (\gamma_5' \gamma_7)^2$  для варианта (6.50).

Для варианта (6.49) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dx_5}{d\tau} &= -x_5 \alpha_1 \gamma_6^2 \gamma_7^2 [(D_{123})^2 (D_{134})^2] - \\ &\quad - x_5 \alpha_2 \gamma_6^2 \gamma_7^2 [(D_{124})^2 (D_{234})^2], \\ \frac{dx_6}{d\tau} &= -x_6 \alpha_1 (\gamma_5' \gamma_7)^2 [(D_{123})^2 (D_{134})^2] - \\ &\quad - x_6 \alpha_2 (\gamma_5'' \gamma_6)^2 [(D_{124})^2 (D_{234})^2], \\ \frac{dx_7}{d\tau} &= -x_7 \alpha_1 (\gamma_5' \gamma_7)^2 [(D_{123})^2 (D_{134})^2] - \\ &\quad - x_7 \alpha_2 (\gamma_5'' \gamma_6)^2 [(D_{124})^2 (D_{234})^2]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Из рассмотренных этих шести формул очевидно, что коррекция во всех случаях является полной, т.е. число особых точек коррекции равно числу особых точек основной расширенной системы (для варианта (6.49) это имеет место при  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ );

что устойчивость коррекции обеспечивается при любых  $\gamma'_5, \gamma''_5, \gamma_6, \gamma_7$ , не равных нулю, и при любых  $\alpha > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ .

Из соображений надежности коррекции предпочтительным является вариант (6.49), в котором используются оба сигнала ошибки. Для этого случая уравнения расширенной системы с коррекцией будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u_1^* D_{234} - x_6 \alpha_1 (D_{23567} D_{12357} + D_{34567} D_{13457}) + \\ &+ x_7 \alpha_2 D_{24567} D_{12456}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -u_1^* D_{134} + x_6 \alpha_1 D_{13567} D_{12357} - \\ &- x_7 \alpha_2 (D_{14567} D_{12457} - D_{34567} D_{23457}), \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{d\tau} &= u_1^* D_{124} - x_6 \alpha_1 (D_{12567} D_{12367} - D_{14567} D_{13457}) - \\ &- x_7 \alpha_2 D_{24567} D_{23456}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_4}{d\tau} &= -u_1^* D_{123} - x_6 \alpha_1 D_{13567} D_{13457} + x_7 \alpha_2 (D_{12567} D_{12456} + \\ &+ D_{23567} D_{23456}), \end{aligned}$$

где  $u_1^* = -u_1 \gamma'_5 \gamma_6 + u_2 \gamma'_5 \gamma_7 + u_3 \gamma_6 \gamma_7$  и определяется из условия соответствия машинного времени со временем исходной задачи.

Аналогичным образом можно строить цепи коррекции для любого числа исходных дифференциальных уравнений с любым числом контрольных условий.

4. Рассмотрим вопросы построения схемы коррекции, когда к исходным дифференциальным уравнениям примешивается контрольная задача в виде дифференциальных уравнений, первый интеграл которых известен и который может быть использован для контроля расширенной задачи. Итак, в качестве исходной задачи возьмем:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, t), \quad (6.54)$$

а в качестве контрольной задачи:

$$\frac{dy_2}{dt} = u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_3}, \quad \frac{dy_3}{dt} = -u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_2}, \quad (6.55)$$

первый интеграл этих уравнений предполагается известным:

$$F(y_2, y_3) = 0. \quad (6.56)$$

Перемешаем эти задачи, положив:

$$y_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, i = 1, 2, 3. \quad (6.57)$$

На этот раз не будем выполнять операцию расширения. Продифференцировав уравнения (6.57) по  $t$  и подставив вместо  $\frac{dy_i}{dt}$  правые части уравнений (6.54) и (6.55), определим  $\frac{dx_j}{dt}$  из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 a_{1j} \frac{dx_j}{dt} &= f_1(x_1 x_2 x_3, t) \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j} \frac{dx_j}{dt} &= u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_4} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j} \frac{dx_j}{dt} &= -u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_3} \end{aligned} \right\}, \quad (6.58)$$

при условии, что определитель  $\delta$  этой системы не равен нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{\delta} (\delta_{11} f_1 + \delta_{12} u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_4} + \delta_{13} u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_3}), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{\delta} (\delta_{21} f_1 + \delta_{22} u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_4} + \delta_{23} u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_3}), \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{\delta} (\delta_{31} f_1 + \delta_{32} u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_4} + \delta_{33} u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_3}), \end{aligned} \quad (6.59)$$

где  $\delta_{ij}$  — соответствующие миноры определителя  $\delta$ .

Отметим, что при таком введении избыточности правые части уравнений оказываются функцией от сумм правых частей исходных и контрольных уравнений, а не произведением их, как это получается при других способах введения избыточности, описанных, например, в предыдущем пункте. Это существенно для упрощения правых частей расширенных систем.

Начальные условия этих уравнений  $x_{j0}$  определяются в функции от начальных условий уравнений (6.54) и (6.55).

При построении цепи коррекции будем исходить из следующих уравнений Пфаффа:



$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 a_{1j} dx_j - f_1 dx_4 &= dx_5 \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j} dx_j - q_2 dx_4 &= dx_6 \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j} dx_j + q_1 dx_4 &= dx_7 \\ q_1 dx_6 + q_2 dx_7 &= dx_8 \\ \gamma_5 dx_5 + \gamma_8 dx_8 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (6.60)$$

где  $q_1 = u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_2}$ ,  $q_2 = u_1^* \frac{\partial F}{\partial y_3}$ ,  $dx_5$ ,  $dx_6$ ,  $dx_7$  — дифференциалы ошибок в исходном и дополнительных уравнениях,  $x_8$  — измеримая ошибка,

$$F(y_2, y_3) = x_8, \quad (6.61)$$

коэффициенты  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$  задают связь между ошибкой в исходном уравнении и ошибкой в контрольном условии,  $x_4 = t$ . Эквивалентная система дифференциальных уравнений будет содержать 28 коэффициентов. Как очевидно из рассмотрения всего набора произвольных коэффициентов для системы (6.60) в соответствии с методом синтеза, развитым в § 2, первые шесть коэффициентов,  $u_1 \div u_6$ , которые входят в уравнения  $\frac{dx_j}{dt}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  и не входят в остальные уравнения, могут быть использованы для создания темпа решения из условия  $\frac{dx_4}{dt} = 1$ . При этом выражения для правых частей уравнений первых трех переменных будут иметь вид (6.59). Коррекцию можем задать с помощью коэффициентов  $u_8$  и  $u_9$ . После этого уравнения для интересующих нас ошибок  $x_5$  и  $x_8$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_5}{dt} &= -u_8 D_{12368} - u_9 D_{12378}, \\ \frac{dx_8}{dt} &= -u_8 D_{12356} - u_9 D_{12357}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Положив  $u_8 = \alpha x_8 D_{12356}$ ,  $u_9 = \alpha x_8 D_{12357}$ , (6.63) получим:

$$\frac{dx_8}{dt} = -x_8 \alpha (D_{123})^2 (q_1^2 + q_2^2) \gamma_5^2. \quad (6.64)$$

А для ошибки  $x_5$  с учетом связи  $\gamma_5 x_5 + \gamma_8 x_8 = 0$  получим:

$$\frac{dx_5}{dt} = x_8 \alpha (D_{123})^2 (q_1^2 + q_2^2) \gamma_5 \gamma_8 = -x_5 \alpha \gamma_5^2 (D_{123})^2 (q_1^2 + q_2^2). \quad (6.65)$$

Как следует из уравнений (6.64) и (6.65),  $x_5$  и  $x_8$  при такой коррекции устойчиво стремятся к нулю. Решаемые в устройстве уравнения при этом будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= u_1^{**} D_{234} + u_8 D_{23568} + u_9 D_{23578}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -u_1^{**} D_{134} - u_8 D_{13568} - u_9 D_{13578}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= u_1^{**} D_{234} + u_8 D_{12568} + u_9 D_{12578},\end{aligned}\tag{6.66}$$

где  $u_1^{**} D_{234}$ ,  $u_1^{**} D_{134}$ ,  $u_1^{**} D_{234}$  имеют вид правых частей уравнений (6.59) соответственно,

$$\begin{aligned}D_{12568} &= -\delta_{13} q_1 \gamma_8 - \delta_{23} \gamma_5, & D_{12578} &= -\delta_{13} q_2 \gamma_8 + \delta_{33} \gamma_5, \\ D_{13568} &= -\delta_{12} q_1 \gamma_8 - \delta_{22} \gamma_5, & D_{13578} &= -\delta_{12} q_2 \gamma_8 + \delta_{32} \gamma_5, \\ D_{23568} &= -\delta_{11} q_1 \gamma_8 - \delta_{21} \gamma_5, & D_{23578} &= -\delta_{11} q_2 \gamma_8 + \delta_{31} \gamma_5, \\ D_{12356} &= -\delta q_1 \gamma_5, & D_{12357} &= -\delta q_2 \gamma_5.\end{aligned}$$

Интересно сравнить системы коррекции, рассмотренные в предыдущем пункте, с полученной системой. Различие между ними вытекает из различия между предпоследним уравнением системы (6.60) и уравнениями (6.46). Построенная избыточная система оказывается аналогичной известным системам с пробным сигналом, только в нашем случае генератор пробных воздействий замешивается в структуру системы и является неотъемлемой ее частью. Априорная информация о решениях уравнений (6.55) — о пробных сигналах — может быть использована для получения дополнительной информации о помехах, действующих на всю перемешанную систему, и для введения дополнительных коррекций.

5. Во всех рассмотренных выше случаях использовалась отрицательная обратная связь, которая снижала чувствительность контроля. Представляется интересным исследовать возможности положительной обратной связи для увеличения чувствительности контроля. Такой режим работы представляется целесообразным в период отладки программ, в предстартовый период приработки бортовых машин для выявления скрытых неисправностей. Для иллюстрации этой идеи рассмотрим расширенную систему (6.23), где  $x_4$  — ошибка в исходном уравнении,  $x_5$  — ошибка контрольного условия. Очевидно, в этом случае следует использовать такие коэффициенты  $u_5$ , которые входят в уравнение для  $x_5$

и не входят в уравнение для  $x_4$ . Назначим эти коэффициенты  $u_3, u_5, u_8$  так, чтобы величина  $x_5$  была явно неустойчивой, и положим коэффициенты  $u_2 = u_4 = u_6 = u_7 = u_9 = u_{10} = 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} u_3 &= x_5 \alpha_1 D_{12}, \quad u_5 = x_5 \alpha_2 D_{13}, \quad u_8 = x_5 \alpha_3 D_{23}, \\ \frac{dx_1}{dt} &= u_1 D_{23} + x_5 (\alpha_1 D_{12} D_{25} + \alpha_2 D_{13} D_{35}), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 D_{13} + x_5 (-\alpha_1 D_{12} D_{15} + \alpha_3 D_{23} D_{35}), \\ \frac{dx_3}{dt} &= u_1 D_{12} + x_5 (-\alpha_2 D_{13} D_{15} - \alpha_3 D_{23} D_{25}), \end{aligned} \quad (6.67)$$

при этом  $\frac{dx_4}{dt} = 0$ ,  $\frac{dx_5}{dt} = x_5 [-\alpha_1 (D_{12})^2 + \alpha_1 (D_{13})^2 + \alpha_3 (D_{23})^2]$ , и если выражение в квадратных скобках больше нуля, то неустойчивость обеспечивается.

Введение положительной обратной связи эквивалентно уменьшению зоны нечувствительности контрольного органа, что важно в период отладки программ и в предстартовом контроле. Введение отрицательной обратной связи эквивалентно увеличению зоны нечувствительности, что может быть полезным в период боевой работы бортовой машины для исключения ложных срабатываний.

6. Перейдем к рассмотрению избыточных структур с непрерывной обратной связью при наличии помех. Для системы (6.25) получим при

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= D_{23} - \Delta \alpha \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_1} + A_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, t), \\ \frac{d\tilde{x}_2}{dt} &= -D_{13} - \Delta \alpha \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_2} + A_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, t), \\ \frac{d\tilde{x}_3}{dt} &= D_{12} - \Delta \alpha \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_3} + A_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, t), \end{aligned} \quad (6.68)$$

и тогда

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\Delta \alpha \left[ \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_j} \right)^2 \right] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_j} A_j. \quad (6.69)$$

При медленно меняющихся  $A_j$  и в установившемся режиме для контрольного условия с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = m_j,$$

$$\Delta \approx \frac{\sum_{j=1}^3 m_j A_j}{\alpha \sum_{j=1}^3 m_j^2}, \quad (6.70)$$

откуда следует возможность определения самих  $A_j$ , а не их интегралов, как было показано в § 4. Для (6.70) можно показать, что  $\Delta$  будет иметь экстремум при:

$$\cos \alpha'_j = \cos \beta'_j, j = 1, 2, 3, \quad (6.70)$$

где

$$\cos \alpha'_j = \frac{m_j}{\sqrt{\sum m_j^2}}, \cos \beta'_j = \frac{A_j}{\sqrt{\sum A_j^2}}$$

при этом

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^3 m_j^2 \sum_{j=1}^3 A_j^2 \frac{1}{\alpha^2}. \quad (6.71)$$

Условие (6.70) может выполняться в каждый момент времени только для нелинейных контрольных условий, для которых в этом случае будем иметь:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_j}}{\sqrt{\sum \frac{\partial F^2}{\partial \bar{x}_j}}} = \frac{A_j}{\sqrt{\sum A_j^2}}, \quad (6.72)$$

и в идеальном случае  $A_j = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_j}$ .

В установившемся режиме из (6.69) для этого случая:

$$1 - \alpha \Delta = 0, \alpha = \frac{1}{\Delta}. \quad (6.73)$$

При подстановке этих значений в (6.68) получаем, что задача решается абсолютно точно. Этот идеальный случай предусматривает полную информацию о помехах  $A_j$  и работу по существу с бесконечным коэффициентом усиления  $\alpha$ .

При нескольких линейных контрольных условиях будем иметь:

$$\Delta_k \approx \frac{\sum_{j=1}^{n_1} m_j^k A_j}{\alpha \sum_{j=1}^{n_1} (m_j^k)^2}, k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.74)$$

откуда при таком выполнении ряда гипотез можно определить  $A_j$  либо способами кодовой диагностики, либо с помощью поворачивающейся плоскости (см. § 4).

Если на систему с линейным контрольным условием действуют помехи — постоянные величины, то

$$\Delta = \frac{\sum m_j A_j}{\alpha B} (e^{\alpha B t} - 1), \quad (6.75)$$

где  $B = \sum m_j^2, j = 1, 2, \dots, n_1$ .

Коэффициенты чувствительности для  $\Delta$  в этом случае будут:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A_j} = \frac{m_j}{\alpha B} (e^{\alpha B t} - 1), \quad (6.76)$$

и если  $\alpha B > 0$ , т.е. для систем с положительной обратной связью, чувствительность растет со временем, а если  $\alpha B < 0$ , т.е. для систем с отрицательной обратной связью, чувствительность с ростом времени стабилизируется, но она будет при  $|\alpha B| < 1$  меньше, чем в режиме без обратной связи.

7. Исследуем влияние обратной связи на первичные ошибки. В соответствии с (6.68) для исходных переменных получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\check{y}_1}{dt} &= f_1(\check{y}_1, t) - \Delta \alpha \sum_{j=1}^3 a_{1j} \frac{\partial F}{\partial \check{x}_j} + \sum_{j=1}^3 a_{1j} A_j, \\ \frac{d\check{y}_2}{dt} &= 1 - \Delta \alpha \sum_{j=1}^3 a_{2j} \frac{\partial F}{\partial \check{x}_j} + \sum_{j=1}^3 a_{2j} A_j, \end{aligned} \quad (6.77)$$

откуда следует, что для данного вида обратной связи при выполнении условий ортогональности (6.28) обратная связь на переменные после операции сжатия не действует. Поэтому будем рассматривать случай, когда условия ортогональности не выполняются, и воспользуемся разложением помех на составляющие  $N, V, R$  (5.7), положив  $m_j = \frac{\partial F}{\partial \check{x}_j}$ . Для медленно меняющихся  $A_j$  и  $\frac{\partial F}{\partial \check{x}_j}$  в установившемся режиме:

$$\Delta \approx \frac{\sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial \check{x}_j} A_j}{\alpha \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial F}{\partial \check{x}_j}\right)^2}. \quad (6.78)$$

Подставив (6.78) и (5.7) в (6.77), обнаружим, что в системе с такой обратной связью устраняется влияние составляющей  $N$ .

При наличии информации о векторе помех с помощью такой обратной связи можно обеспечить хорошее подавление первичных ошибок с момента начала решения.

Важно заметить, что такое подавление обеспечивается для любой матрицы расширения, в том числе и для диагональной, когда исходная задача не подвергается никаким изменениям, лишь параллельно с ней решается вспомогательная задача, составленная в соответствии с видом контрольного условия [6].

В системах с обратной связью типа (6.39), как можно показать аналогичным образом, обеспечивается подавление любых помех, если только составляющие этих помех связаны соотношением:

$$\left[ \gamma_5 \sqrt{\sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_j}} + \gamma_4 \left( \sum_{j=1}^3 a_{1j} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_j} - f_1 \sum_{j=1}^3 a_{2j} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_j} \right) \right] N + \gamma_4 \sqrt{(D_{12})^2 + (D_{13})^2 + (D_{23})^2} R = 0. \quad (6.79)$$

В системе с коррекцией типа (6.66) обеспечивается подавление всех составляющих помех, ортогональных контрольному многообразию (6.61) с учетом связей между ошибками.

8. Рассмотрим простой пример для иллюстрации действия обратной связи. Пусть исходная задача:

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad y_1(0) = y_{10} \quad (6.80)$$

решается в расширенной системе с диагональной матрицей и линейным контрольным условием:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -m_1 \lambda_1 x_1, \quad m_1 x_1 + x_2 = 0, \\ y_1 &= x_1, \quad x_{20} = -m_1 x_{10} = -m_1 y_{10}, \end{aligned} \quad (6.81)$$

и пусть на систему действуют ошибки в установке коэффициентов:

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = (\lambda_1 + \Delta\lambda_1) \tilde{x}_1, \quad \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = -(m_1 \lambda_1 + \Delta\lambda_1) \tilde{x}_1. \quad (6.82)$$

Эти ошибки заранее неизвестны, мы их определим с помощью поворачивающейся плоскости. В изображениях первичные ошибки будут иметь вид:

$$A_1(p) = \frac{\Delta\lambda_1 x_1(0)}{p(p - \lambda_1 - \Delta\lambda_1)}, \quad A_2(p) = \frac{\Delta\lambda_2 x_1(0)}{p(p - \lambda_1 - \Delta\lambda_2)}. \quad (6.83)$$

При введении обратной связи уравнения (6.82) преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\tilde{x}_1 + \alpha m_1 \Delta \\ \frac{d\tilde{x}_2}{dt} &= -(m_1\lambda_1 + \Delta\lambda_2)\tilde{x}_1 + \alpha\Delta \\ \Delta &= m_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.84)$$

и решение в изображениях для  $\tilde{x}_1(p) = \tilde{y}_1(p)$  будет:

$$\tilde{y}_1(p) = \frac{y_1(0)(p - \alpha - \alpha m_1^2)}{p^2 - (\lambda_1 + \Delta\lambda_1 + \alpha + \alpha m_1^2)p + \alpha(\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - m_1\Delta\lambda_2 + m_1^2\lambda_1)}. \quad (6.85)$$

При большом коэффициенте усиления  $|\alpha| \gg 1$

$$\tilde{y}_1(p) = \frac{-y_1(0)(1 + m_1^2)}{(1 + m_1^2)p + \lambda_1(1 + m_1^2) + (\Delta\lambda_1 - m_1\Delta\lambda_2)}. \quad (6.86)$$

Если известны из экспериментов с поворачивающейся плоскостью:

$$h_1 = \int_0^t A_1(t)dt, \quad h_2 = \int_0^t A_2(t)dt,$$

то должно назначить  $m_1 = \frac{h_1}{h_2}$ , и в соответствии с (6.83):

$$m_1 = \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}. \quad (6.87)$$

Подставив это выражение в (6.86), получим:

$$y_1(p) \approx \frac{y_1(0)}{p - \lambda_1}. \quad (6.88)$$

Таким образом, в системе с обратной связью при большом коэффициенте усиления и при известном расположении вектора помех имеем точное решение.

Сравним этот результат с коррекцией вперед. В соответствии с (6.83)

$$h_1(p) = \frac{\Delta\lambda_1 y_1(0)}{(p - \lambda_1 - \Delta\lambda_1)p^2}, \quad (6.89)$$

а в соответствии с (6.82)

$$\tilde{y}_1(p) = \frac{y_1(0)}{p - \lambda_1 - \Delta\lambda_1}. \quad (6.90)$$

Только после коррекции вперед (см. § 4) получим:

$$y^*(p) = \tilde{y}_1(p) - h_1(p) = \frac{y_1(0)}{(p-\lambda_1-\Delta\lambda_1)} \left(1 - \frac{\Delta\lambda_1}{p^2}\right), \quad (6.91)$$

откуда видно, что и в этом случае происходит повышение точности, но при коррекции с помощью обратной связи эта задача решается лучше.

9. Выше было рассмотрено влияние обратной связи на первичные ошибки, и при непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от изменения правой части и начальных условий уменьшение первичных ошибок непременно поведет к уменьшению ошибок вторичных. Но представляется важным исследовать непосредственно влияние обратной связи на устойчивость системы относительно вторичных ошибок.

Будем рассматривать систему с коррекцией после операции сжатия:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{d\tau} &= \Delta B_1 + P_1(\tilde{y}_1, \Delta, \tau), \\ \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} &= u_1 f_1(\tilde{y}_1, \tau) + \Delta B_2 + P_2(\tilde{y}_1, \Delta, \tau), \end{aligned} \quad (6.92)$$

где функции  $B_1$  и  $B_2$  определяются видом обратной связи,  $P_1$  и  $P_2$  — помехи, коэффициент  $u_1$  определяет зависимость машинного времени  $\tau$  от натурального  $t$ .

Положив  $\tilde{y}_1 = y_1 + e_1$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} &= \Delta B_1 + P_1(\tilde{y}_1, \Delta, \tau), \\ \frac{de_1}{dt} &= u_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} e_1 + \Delta B_2 + P_2(\tilde{y}_1, \Delta, \tau). \end{aligned} \quad (6.93)$$

Решение этой системы уравнений ( $e_1 = 0, \Delta = 0$ ) будем полагать устойчивым при постоянно действующих возмущениях [9], если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что при выполнении условий:

$$|e_{10}| < \delta, |\Delta_0| < \delta, |P_i(\tilde{y}_1, \Delta, \tau)| < \delta, i = 1, 2$$

решение этой системы удовлетворяет при всех  $t \geq t_0$  неравенству  $|e_1(\tau, e_{10}, \Delta_0)| < \varepsilon, |\Delta(\tau, e_{10}, \Delta_0)| < \varepsilon$ . Для исследования устойчивости в этом смысле воспользуемся вторым методом Ляпунова [48, 61, 63]. Функцию Ляпунова зададим в виде:



$$V = \Delta^2 + e_1^2. \quad (6.94)$$

Для устойчивости достаточно, чтобы

$$-\frac{dv}{d\tau} = -2e_1 \frac{de_1}{d\tau} - 2\Delta \frac{d\Delta}{dt} > 0. \quad (6.95)$$

Подставив в это выражение невозмущенные уравнения для  $\frac{d\Delta}{dt}$  и  $\frac{de_1}{d\tau}$ , получим:

$$-2B_1\Delta^2 - 2B_2\Delta e_1 - 2u_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} e_1^2 > 0. \quad (6.96)$$

Это неравенство выполняется в соответствии с условиями знакоопределенности квадратичных форм [17], если:

$$-B_1 > 0, B_1 u_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - 0.25B_2^2 > 0. \quad (6.97)$$

Первое из этих неравенств выполняется для систем с обратной связью, построенных в этом параграфе. Второе неравенство может выполняться только лишь для систем, у которых:

$$u_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} < 0. \quad (6.98)$$

Последнее имеет место при  $u_1 > 0$  только для исходных систем, у которых  $\frac{\partial f}{\partial y_1} < 0$ , в частности, для устойчивых линейных систем. Для неустойчивых исходных систем, при  $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ , устойчивость при постоянно действующих возмущениях обеспечивается только при обращении времени, при  $u_1 < 0$ . Аналогичные результаты получаются и для систем с большим числом контрольных условий и исходных переменных.

Следует отметить ограниченную точность проведенного анализа относительно вторичных ошибок, так как здесь учитываются вторичные ошибки только лишь в выходной переменной системы и не учитываются вторичные ошибки, которые влияют на устойчивость, в корректирующих членах уравнений возмущенного движения. Анализ устойчивости с учетом этих факторов производится в § 8.

## § 7. Гибкие структуры с избыточностью

В рассмотренных выше системах число переменных  $n_1$  в расширенных структурах было равно числу контрольных условий  $k$  плюс число исходных переменных  $n$ . В гибких структурах  $n_1 > n + k$  за счет этого с помощью произвольных коэффициентов оказывается возможным осуществлять перестройку работы системы без нарушения функционирования так, чтобы обходить неисправные места в схемах и алгоритмах.

1. Если исходная задача:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), y(0) = y_0, \quad (7.1)$$

то, введя избыточность и наложив контрольное условие:

$$y = \sum_{j=1}^3 a_j x_j, F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (7.2)$$

из эквивалентных уравнений Пфаффа:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 a_j dx_j - f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_4 &= 0, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j &= 0, dx_4 = dt, \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

получим расширенную систему, содержащую  $S = C_4^3 = 4$  произвольных коэффициента:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u_1 D_{23} + u_2 D_{24} + u_3 D_{34} \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -u_1 D_{13} - u_2 D_{14} + u_4 D_{34} \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= u_1 D_{12} - u_3 D_{14} + u_4 D_{24} \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= u_2 D_{12} + u_3 D_{13} + u_4 D_{23} \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Для решения задачи в натуральном масштабе времени необходимо иметь:

$$u_2 D_{12} + u_3 D_{13} + u_4 D_{23} = 1. \quad (7.5)$$

Будем называть это уравнение уравнением синхронности.

Если вычисление  $D_{14}$ ,  $D_{24}$ ,  $D_{34}$  реализуется с помощью отдельных блоков: блоков программы или блоков схем, то с помощью коэффициентов  $u_s$  оказывается возможным так изменить

структуру системы (7.4), чтобы исключить любой один из этих блоков в случае неисправности без нарушения условия (7.5). Действительно, если хотим исключить из работы блок  $D_{14}$ , то можем положить  $u_2 = u_3 = 0$ , из (7.5),  $u_4 = \frac{1}{D_{23}}$ ; если хотим исключить блок  $D_{24}$ , то  $u_2 = u_4 = 0$ ,  $u_4 = \frac{1}{D_{13}}$ ; если хотим исключить  $D_{34}$ , то  $u_3 = u_4 = 0$ ,  $u_2 = \frac{1}{D_{12}}$ .

Заметим, что при этом осуществляется устранение только первичных ошибок. Так, если произошло нарушение в блоке  $D_{14}$ , то это эквивалентно действию помех:

$$A_2 = u_2 D_{14} - u_2 D_{14}^*, A_3 = u_3 D_{14} - u_3 D_{14}^*,$$

и при коррекции, когда полагаем  $u_2 = u_3 = 0$ , мы устраняем именно первичную ошибку. Чем быстрее будет произведена коррекция, тем меньше будет накопленная вторичная ошибка.

Коэффициент  $u_1$  может быть использован для другого вида коррекции — для обращения в нуль правой части любого из трех первых уравнений системы (7.4). Действительно, если произошло нарушение в вычислительном канале первой переменной, то стоит так перестроить работу системы, чтобы исключить первый канал из работы.

Первый вариант для решения этой задачи — обратить в нуль правую часть уравнения, что достигается, если

$$u_1 = -\frac{1}{D_{23}}(u_2 D_{24} + u_3 D_{34}). \quad (7.6)$$

Но при этом на выходе блока интегрирования переменной остается неверно вычисленное значение. Второй вариант использования коэффициента  $u_1$  позволяет устранить и этот недостаток. Действительно, если положим:

$$u_1 = -x_1 \alpha D_{23}, \alpha > 0, \quad (7.7)$$

то координата  $x_1$  будет асимптотически стремиться к нулю. Аналогичным образом может быть осуществлена коррекция любой одной переменной.

Если избыточность увеличена:

$$y = \sum_{j=1}^4 a_j x_j, F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (7.8)$$

то из эквивалентных уравнений Пфаффа:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 a_j dx_j - f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) dx_5 &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j &= 0, dx_5 = dt \end{aligned} \right\}, \quad (7.9)$$

получим расширенную систему (6.23), содержащую 12 произвольных коэффициентов. Для решения задачи в натуральном масштабе времени необходимо

$$u_3 D_{12} + u_5 D_{13} + u_6 D_{14} + u_8 D_{23} + u_9 D_{24} + u_{10} D_{34} = 1. \quad (7.10)$$

В этой системе имеются большие возможности для коррекции.

Действительно, в этой системе любые два из блоков  $D_{15}$ ,  $D_{25}$ ,  $D_{35}$ ,  $D_{45}$  могут исключаться из работы, и при этом условие (7.10) не нарушается; любые две из переменных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  могут обращаются в нуль без нарушения функционирования, для этого можно управлять коэффициентами  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_4$ ,  $u_7$  в различных сочетаниях.

Для любого числа исходных уравнений и переменных  $n$  может быть построена гибкая структура с « $k$ » контрольными условиями, и если в этой структуре  $n_1 - (n + k) = n_2$ , то число  $n_2$  определяет корректирующие возможности гибкой структуры: если  $n_2 = 1$ , то может быть отключена одна любая переменная и один вычислительный блок в правых частях без нарушения работы в натуральном масштабе времени; если  $n_2 = 2$ , то могут быть отключены любые две переменные и два вычислительных блока в правых частях без нарушения работы в натуральном масштабе времени и т.д.

2. Определение номера отказавшего блока или переменной возможно с помощью кодовой диагностики, которая рассматривалась в § 4. Но в гибких структурах имеются дополнительные возможности для диагностики. Так как все вычислительные блоки  $D_{ij}$  умножаются на соответствующие коэффициенты  $u_s$ , то задачу диагностики можно свести к определению того, функцией какого же  $u_s$  является рассогласование на выходе контрольного органа. Эту задачу можно решить различными способами [11, 13, 14, 15].

Во-первых, можно периодически по очереди обращать  $u_s$  в нуль и следить за поведением сигнала на выходе контрольного органа. Если при обращении в нуль коэффициента  $u_k$  обращается в нуль и сигнал на выходе контрольного органа, значит, ошибка произошла в одном из блоков  $D$ , которые умножаются на коэффициент  $u_k$ , и так далее. Для сокращения времени поиска можно применять метод средней точки или какую-либо другую рациональную стратегию.

Во-вторых, можно каждое из  $u_s$  модулировать колебаниями различных частот и на выходе контрольного органа производить частотный анализ сигнала рассогласования. При большом числе коэффициентов  $u_s$  при таком методе потребуется слишком большая полоса пропускания устройств системы. Эта трудность может быть обойдена следующим образом. Можно построить генератор медленно меняющихся  $u_s$  с поведением, заданным с точностью до сферы,  $\sum u_k^2 = R^2$ , с учетом различных ограничений, наложенных на  $u_s$ . Далее производится анализ сигнала ошибки на выходе контрольного органа. Если в контрольном органе подсчитывается сумма:

$$\sum_{j=1}^{n_1} m_j \frac{dx_j}{dt} = \Delta_0, \quad (7.11)$$

то такой анализ может производиться следующим образом. В специальном устройстве — анализаторе сигнала ошибки — подсчитываются величины:

$$\begin{aligned} \int_0^t \Delta_0 u_1 dt &= \Delta_1, \int_0^t \Delta_0 u_2 dt = \Delta_2, \\ \int_0^t \Delta_0 u_3 dt &= \Delta_3, \int_0^t \Delta_0 u_4 dt = \Delta_4. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В зависимости от места ошибки, от номера  $u_s$ , на который умножается неисправный блок, одна из величин  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  будет иметь экстремум. Это обстоятельство и может быть использовано для идентификации  $u_s$ , для определения места ошибки.

В-третьих, если система (7.4) решается на цифровой машине и если правые части (7.4) вычисляются над полем целых чисел, то очевиден следующий способ нахождения места неисправности. Каждое из  $u_s$  может быть назначено простым числом, все  $u_s$  — разные. Сигнал ошибки на выходе контрольного органа будет в этом случае делиться без остатка, если произошло нарушение

в одной любой группе блоков  $D$ , умножаемых на соответствующий коэффициент  $u_s$ . В качестве делителя используются простые числа, соответствующие  $u_s$ .

Возможны и другие способы выявления места ошибок в системах, где число избыточных переменных больше числа контрольных условий.

Заметим, что в гибких структурах может быть организована и непрерывная коррекция с помощью обратной связи, как в § 6. Рассмотренные выше варианты с перестройкой структуры в зависимости от результатов диагностики могут быть названы системами с дискретной перестраивающейся обратной связью. В следующем пункте оценивается надежность таких систем.

3. Системы с гибкой структурой могут корректировать отказы, возникающие в одной, двух и вообще  $\nu$  переменных. Оценим увеличение надежности такой системы по сравнению с обычной системой без контроля и коррекции.

Пусть  $P_0$  — вероятность получения правильной переменной в исходной системе. Тогда, если принять, что переменные между собой мало связаны, вероятность верного решения будет  $P_0 = P_0^\nu$ . Пусть  $P'_0$  ( $P'_0 \geq P_0$ ) — вероятность получения правильной переменной в модели с гибкой структурой. Так как в гибкой структуре допускается выход из строя любых  $n_2 = n_1 - (n + k)$  переменных, то вероятность верного решения, полученного с ее помощью, будет равна:

$$P' = \sum_{\nu=0}^{n_2} C_{n_1}^\nu P_0'^{\nu} (1 - P_0')^{\nu}. \quad (7.13)$$

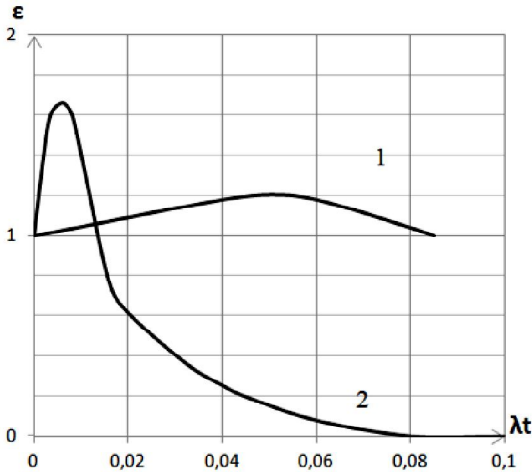
Величина:

$$\varepsilon^* = \frac{P'}{P} = \sum_{\nu=0}^{n_2} C_{n_1}^\nu \frac{P_0'^{\nu} (1 - P_0')^{\nu}}{P_0^n} \quad (7.14)$$

будет характеризовать увеличение надежности системы с гибкой структурой.

Можно показать, что  $\varepsilon^*$  может принимать значения, большие единицы. Например, если принять  $P_0 = e^{-\lambda t}$ ,  $P'_0 = e^{-2\lambda t}$ ,  $n_1 - (n + k) = 1$ , то существует такое  $t_m$ , что  $\varepsilon$  достигает максимума  $\varepsilon_m^*$ . При этом как сама величина  $\varepsilon_m^*$ , так и время  $t_m$  зависят от числа переменных исходной задачи. На рис. 10 показана

зависимость увеличения надежности системы с гибкой структурой от времени  $\varepsilon^* = \varepsilon(\lambda t)$  при  $n = 10$  (кривая 1), при  $n = 100$  (кривая 2) для  $k = 1$ .



**Рис. 10. Зависимость увеличения надежности системы с гибкой структурой от времени**

Следует отметить, что это увеличение надежности достигается, во-первых, за счет введения избыточности, которое может быть реализовано в виде дополнительной аппаратуры или дополнительного времени или памяти, и, во-вторых, за счет более интенсивной работы элементов системы, на которые перекладывается работа после отключения отказавших блоков или переменных, что менее очевидно. Покажем это, опираясь на рассмотренные выше примеры гибких структур.

Запишем уравнения синхронности для (7.4) в виде:

$$u_2 D_{12} + u_3 D_{13} + u_4 D_{23} = L, \quad (7.15)$$

а для (6.23) в виде:

$$u_3 D_{12} + u_5 D_{13} + u_6 D_{14} + u_8 D_{23} + u_9 D_{24} + u_{10} D_{34} = L, \quad (7.16)$$

где величина  $L$  определяет скорость решения задачи относительно натурального масштаба времени.

Если принять:

$$|D_{12}| \approx |D_{13}| \approx |D_{23}| \approx |D_{14}| \approx |D_{24}| \approx |D_{34}| \approx D,$$

то в нормальном режиме для (7.15):

$$|u_2| \approx |u_3| \approx |u_4| \approx u^*, u^* \sim \frac{L}{3D}, \quad (7.17)$$

а для (7.16):

$$|u_3| \approx |u_5| \approx |u_6| \approx |u_8| \approx |u_9| \approx |u_{10}| \approx u^{**}, u^{**} \approx \frac{L}{6D}. \quad (7.18)$$

В режиме отключения любого одного блока  $D_{ij}$  для (7.4) и для (6.23):

$$u^* = \frac{L}{D}, u^{**} = \frac{L}{3D}. \quad (7.19)$$

Из сравнения (7.17) и (7.19) видно, что в режиме коррекции при отключении одного любого блока оставшиеся переменные должны генерироваться для системы (7.4) со скоростью, в три раза больше обычной, а для системы (6.23) со скоростью, в два раза больше обычной. Таким образом, для реализации гибких систем с перестраиваемой структурой необходимо иметь запас по быстрдействию — для случая УЦВМ или запас по динамическому диапазону — для АВМ, либо идти на уменьшение скорости решения задачи при отключении блоков или переменных.

4. Разовьем более строгий подход к оценке надежности избыточных систем с контрольными условиями. Правые части контрольных уравнений в случайные моменты времени могут пересекать заданные уровни. Последние могут определяться требованиями к точности вычислительного процесса. Развивающийся во времени случайный процесс, выборочные функции которого пересекают заданные уровни, будем предполагать гауссовским и однородным на интервале времени решения задачи.

В общем случае имеется  $k$  контрольных условий,  $k$ -мерный гауссовский стационарный процесс  $v(t)$  и  $k$ -мерная допустимая область, деформируемая с течением времени. Выходы траекторий случайного процесса  $v(t)$  за пределы этой области определяют моменты времени, когда корректирующее воздействие блока контроля и коррекции (БКК) на параметрические входы основного вычислительного контура (ОК) становится необходимым.



Указанные моменты времени образуют поток случайных событий — компенсируемых параметрических отказов — с неизвестным заранее законом распределения. В качестве меры надежности системы относительно параметрических отказов выберем математическое ожидание числа таких событий в единицу времени.

Возникает естественный вопрос: если в системе некоторый класс отказов автоматически диагностируется и корректируется, то зачем вводить меру надежности системы относительно этих явлений?

Ответ на этот вопрос заключается в том, что можно выделить класс объектов управления быстротекущими процессами, которые в случае неисправности могут попасть в поглощающий экран раньше, чем адаптивный регулятор успеет приспособиться к новой, возникшей в результате отказа, ситуации. Поэтому любая правдоподобная модель надежности самоорганизующейся системы должна учитывать характеристики случайного времени адаптации и быть чувствительной к изменению этого параметра.

Поток параметрических отказов можно рассматривать как поток заявок, поступающих на вход БКК, а сам БКК — как специфическую систему массового обслуживания (СМО). Выходящим потоком этой СМО служит «поток» корректирующих воздействий на ОК, который сам является источником входящего потока.

Целью дальнейшего изложения является построение математической модели указанной замкнутой системы, получение характеристик ее безотказности и изучение их свойств.

Известно, что если вектор внутренних параметров  $k$ -мерный, то математическое ожидание числа пересечений многомерным гауссовским стационарным процессом  $v(t)$  многомерной поверхности  $S$  за время  $T$  определяется по формуле А.П.Черенкова:

$$M\{N_{v(t)}(0, T)\} = 2 \int_0^T \underbrace{\int \dots \int}_S \prod_{i=1}^k f(s_i) \left[ \int_0^\infty f\left(\frac{z-A}{B}\right) dz \right] ds dt, \quad (7.20)$$

где  $f(s_i)$  — плотность нормального распределения с параметрами  $(0,1)$ ,

$$A = A(t; s) = M\{J'_t(t; s)\},$$

$$B = B^2(t; s) = M\{Y'_t(t; s)\}^2,$$

$$y = y(t; s) = [n(t; s), v(t) - s] = \sum_{i=1}^k v_i [v_i(t) - s_i],$$

$n(t; s)$  — нормальный вектор к поверхности  $S = S(t, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$  в момент  $t$  в точке  $S = \{S_1, \dots, S_k\}$  поверхности, которая является достаточно гладко детерминированной;  $v(t) = \{v_1(t), \dots, v_k(t)\}$  — стационарный нормальный процесс, траектории которого с вероятностью 1 дифференцируемы.

Если  $k = 1$ , и уровень  $\delta = \delta(t)$  — дифференцируемая функция времени, то целесообразно применение формулы М.Р.Лидбеттера:

$$M[N_{v(t)}; \delta(t); 0, T] = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\rho(0)}} \int_0^T f\left(\frac{\delta(t)}{\sqrt{\rho(0)}}\right) \left[ 2\sqrt{-\rho''(0)} f\left(\frac{\delta'(t)}{\sqrt{-\rho''(0)}}\right) + \right. \\ \left. + \delta'(t) 2\phi\delta'(t) - \rho''(0) - 1 \right] dt, \quad (7.21)$$

где  $\rho(\tau)$  — дважды дифференцируемая нормированная корреляционная функция процесса  $v(t)$ ,

$f(y)$  — плотность нормального распределения,

$\phi(y)$  — функция Лапласа  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

При постоянном уровне определение  $M[N_v]$  осуществляется по формуле Е.В.Булинской:

$$M[N_{v(t)}; \delta; 0, T] = \frac{T}{2\pi} \sqrt{-\frac{\rho''(0)}{\rho(0)}} e^{-\frac{\delta^2}{2\rho(0)}}. \quad (7.22)$$

Мгновенная интенсивность компенсируемых параметрических отказов определяется по известной формуле:

$$v(t) = \frac{dM}{dt}.$$

В дальнейшем будем полагать, что параметрические отказы образуют неоднородный пуассоновский поток. Если выборочные функции процесса  $v(t)$  — гладкие кривые с ограниченными производными (что чаще всего и бывает в интересующих нас приложениях), то это допущение хорошо согласуется с действительностью.

В двухконтурных самоорганизующихся системах, рассмотрением которых ограничимся, нас будут интересовать следующие случайные ошибки:

— неоднородный по времени пуассоновский поток компенсируемых параметрических отказов с мгновенной интенсивностью  $\nu(t)$ ,

— однородный пуассоновский поток внезапных отказов в ОК (приводящих к составляющим вектора ошибок, параллельным контрольным плоскостям) с интенсивностью  $\eta$ ,

— однородный пуассоновский поток внезапных отказов блока контроля и коррекции с интенсивностью  $\lambda$ .

Будем полагать, что

— время адаптации  $t_{ad}$  является случайной величиной с произвольным законом распределения:

$$F(u) = P\{t_{ad} < u\};$$

— коррекция начинается в момент достижения траекторией случайной функции  $\nu(t)$  границы области  $S$ ;

— процесс адаптации квазистационарный, т.е. отсутствует очередь параметрических отказов.

Случайный процесс развития состояний самоорганизующейся системы будем изучать с помощью фазового пространства, состоящего из множества изолированных точек и полупрямой ( $0 \leq u < \infty$ ). При сделанных предположениях развитие состояний двухконтурной самоорганизующейся системы образует полумарковский случайный процесс. Для нас будут представлять интерес различные состояния системы, образующие полную группу несовместных событий:

— состояние  $w_0(t)$ , характеризующееся тем, что в рассматриваемый момент в системе отсутствуют параметрические и внезапные отказы;

— состояние  $w_1(t, u)$ , характеризующееся тем, что в момент  $t$  БКК занят компенсацией параметрического отказа в течение времени  $u$ , внезапные отказы в ОК и БКК не возникли;

— состояние  $w_2(t)$ , характеризующееся тем, что в момент  $t$  возник внезапный отказ БКК, но параметрические отказы не имели места, и ОК работает исправно; в этом состоянии возможна ложная (т.е. не оправданная состоянием ОК) адаптация;

— состояние  $w_3(t)$ , характеризующееся тем, что в момент  $t$  произошел параметрический отказ в ОК, неисправен БКК,

но отсутствуют внезапные отказы (поломки) в ОК; в этом состоянии система решает задачу с пониженной точностью, что может быть допустимым на отдельных участках времени ее работы;

— состояние  $w_4(t)$ , характеризующееся тем, что в момент  $t$  система полностью неработоспособна.

Состояниям  $w_0(t)$ ,  $w_2(t)$ ,  $w_3(t)$ ,  $w_4(t)$  в фазовом пространстве соответствуют изолированные точки, а состоянию  $w_1(t, u)$  — полупрямая ( $0 \leq u < \infty$ ).

Запишем вероятности пребывания системы в каждом и состояний в момент  $t + \Delta t$ :

$$\begin{aligned} P_0(t + \Delta t) &= \\ &= P_0(t)[1 - \pi_1(t, t + \Delta t)][1 - \eta\Delta t][1 - \lambda\Delta t] + \\ &+ \int_0^t P_1(t, u) \frac{F(u+\Delta t) - F(u)}{1 - F(u)} du + 0(\Delta t), \end{aligned}$$

где  $\pi_1(t, t + \Delta t)$  — вероятность того, что за период  $(t, t + \Delta t)$  возникнет хотя бы один параметрический отказ,  $P_1(t, u)$  — плотность вероятности (по  $u$ ) того, что к этому моменту адаптация длится время  $\xi(t)$ ,  $u < \xi(t) < u + \Delta u$ :

$$P_1(t + \Delta t, u + \Delta u) = P_1(t, u)[1 - \mu(u)\Delta t][1 - \eta\Delta t][1 - \lambda\Delta t] + 0(\Delta t),$$

$$\text{где } \mu(u) = \frac{F(u+\Delta t) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{g(u)du}{1 - F(u)}, \quad (7.23)$$

$$P_2(t + \Delta t) = \lambda\Delta t P_0(t) + P_2(t)[1 - \pi_1(t, t + \Delta t)][1 - \eta\Delta t] + 0(\Delta t),$$

$$\begin{aligned} P_3(t + \Delta t) &= \\ &= \lambda\Delta t \int_0^t P_1(t, u) du + \pi_1(t, t + \Delta t)P_2(t) + (1 - \eta\Delta t)P_3(t) + \\ &+ 0(\Delta t), \end{aligned}$$

$$P_4(t + \Delta t) = \eta\Delta t \left[ P_0(t) + \int_0^t P_1(t, u) du + P_2(t) + P_3(t) \right] + 0(\Delta t).$$

Граничное условие описывает обстоятельства перехода системы из состояния  $w_0(t)$  в состояние  $w_1(t)$ :

$$\begin{aligned} P_1(t + \Delta t)\Delta t &= \pi_1(t, t + \Delta t)(1 - \lambda\Delta t - \eta\Delta t)P_0(t) + \\ &+ 0(\Delta t) = \pi_1(t, t + \Delta t)P_0(t) \end{aligned} \quad (7.24)$$

(бесконечно малыми величинами второго и более высоких порядков малости относительно  $\Delta t$  пренебрегаем).

Начальные условия стандартные:

$$P_0(0) = 1, P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0. \quad (7.25)$$

Осуществляя предельный переход, получим из (7.23) систему интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \dot{P}_0(t) &= -[\nu(t) + \lambda + \eta]P_0(t) + \int_0^t P_1(t, u) \mu(u) du, \\ \frac{\partial P_1(t, u)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, u)}{\partial u} &= -[\mu(u) + \lambda + \eta]P_1(t, u), \\ \dot{P}_2(t) &= \lambda P_0(t) - [\nu(t) + \eta]P_2(t), \\ \dot{P}_3(t) &= \lambda \int_0^t P_1(t, u) du + \nu(t)P_2(t) - \eta P_3(t), \\ \dot{P}_4(t) &= \eta \left[ P_0(t) + \int_0^t P_1(t, u) du + P_2(t) + P_3(t) \right] \end{aligned} \quad (7.26)$$

и граничное условие:

$$P_1(t, 0) = \nu(t)P_0(t).$$

Условие нормировки:

$$P_0(t) + \int_0^t P_1(t, u) du + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) = 1.$$

Решение системы (7.26) может быть осуществлено численными методами, например, методом сеток. При  $\nu(t) = \text{const}$  решение системы (7.26) можно получить в замкнутой аналитической форме, применяя преобразование Лапласа и известные теоремы операционного исчисления (о свертке и др.). Опуская промежуточные выкладки, запишем решение системы (7.26) в изображениях при  $\nu(t) = \nu = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(S) &= \{S + \lambda + \eta + \nu[1 - \bar{g}(s + \lambda + \eta)]\}^{-1}, \\ \bar{P}_1(S) &= \bar{P}_0(S) \frac{\nu[1 - \bar{g}(s + \lambda + \eta)]}{s + \lambda + \eta}, \\ \bar{P}_2(S) &= \bar{P}_0(S) \frac{\lambda}{s + \nu + \eta}, \\ \bar{P}_3(S) &= \bar{P}_0(S) \frac{\nu\lambda}{s + \eta} \left[ \frac{1 - \bar{g}(s + \lambda + \eta)}{s + \lambda + \eta} + \frac{1}{s + \nu + \eta} \right], \end{aligned}$$

$$\bar{P}_4(S) = \eta \bar{P}_0(S) \left\{ 1 + \frac{\nu[1-\bar{g}(s+\lambda+\eta)]}{s+\lambda+\eta} + \frac{\lambda}{s+\nu+\eta} + \frac{\nu\lambda}{s+\eta} \left[ \frac{1-\bar{g}(s+\lambda+\eta)}{s+\lambda+\eta} + \frac{1}{s+\lambda+\eta} \right] \right\}. \quad (7.27)$$

Для системы, способной, по крайней мере, на отдельных участках времени выполнения задания функционировать с неисправным (но отключенным во избежание ложной адаптации) блоком контроля и коррекции, множество благоприятных состояний:

$$\Omega = \{w_0(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t)\}. \quad (7.28)$$

Следовательно, вероятность безотказной системы в изображениях:

$$\bar{P}(S) = \sum_{i=0}^3 \bar{P}_i(S). \quad (7.29)$$

Математическое ожидание времени до первого внезапного отказа (полной поломки) системы можно определить из выражения (7.29), не прибегая к обратному преобразованию Лапласа, а именно:

$$T_0 = \bar{P}(S)|_{S=0} = [\lambda + \eta + \nu(1 - \bar{g}(\lambda + \eta))]^{-1} \left\{ 1 + \frac{\nu[1-\bar{g}(\lambda+\eta)]}{\lambda+\eta} + \frac{\lambda}{\nu+\eta} + \frac{\nu\lambda}{\eta} \left[ \frac{(1-\bar{g}(\lambda+\eta))}{\lambda+\eta} + \frac{1}{\nu+\eta} \right] \right\}. \quad (7.30)$$

Если безотказная работа блока контроля и коррекции необходима на всем протяжении времени выполнения задания, то множество благоприятных состояний образуется из  $w_0(t)$ ,  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$ . В этом случае вероятность безотказной работы самоорганизующейся системы в изображениях:

$$\bar{P}(S) = \sum_{i=0}^2 \bar{P}_i(S).$$

Математическое ожидание времени до первого некомпенсированного параметрического отказа системы:

$$T_n = \sum_{i=0}^2 \bar{P}_i(S)|_{S=0} = \{\lambda + \eta + \nu(1 - \bar{g}(\lambda + \eta))\}^{-1} \left\{ 1 + \frac{\nu[1-\bar{g}(\lambda+\eta)]}{\lambda+\eta} + \frac{\lambda}{\nu+\eta} \right\}. \quad (7.31)$$

При известном законе распределения времени адаптации, применяя обратное преобразование Лапласа, можно получить

характеристики безотказности самоорганизующейся системы в оригиналах. Ранее полученные результаты являются частным случаем (7.26), (7.27), (7.30), (7.31) при  $g(t) = \mu e^{-\mu t}$ , а именно:

$$\bar{g}(s + \lambda + \eta) = \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda+\eta)t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{s+\mu+\lambda+\eta}. \quad (7.32)$$

Подставив (7.32) в (7.27), получим:

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(S) &= \frac{s+\mu+\lambda+\eta}{(s+\nu+\lambda+\eta)(s+\mu+\lambda+\eta)-\nu\mu}, \\ \bar{P}_1(S) &= \nu[(s+\nu+\lambda+\eta)(s+\mu+\lambda+\eta)-\nu\mu]^{-1}, \\ \bar{P}_2(S) &= \frac{\lambda(s+\mu+\lambda+\eta)}{(s+\nu+\eta)[(s+\nu+\lambda+\eta)(s+\mu+\lambda+\eta)-\nu\mu]}, \\ \bar{P}_3(S) &= \frac{\nu\lambda(2s+\nu+2\eta+\lambda+\mu)}{(s+\eta)(s+\nu+\eta)[(s+\nu+\lambda+\eta)(s+\mu+\lambda+\eta)-\nu\mu]}, \\ \bar{P}_4(S) &= \frac{-\nu[-\eta(s+\eta)(s+\nu+\eta)-\lambda\eta(s+\nu+\eta)]-(s+\mu+\lambda+\eta)[-v\lambda\eta-\eta(s+\eta)(s+\nu+\eta)-\lambda\eta(s+\eta)]}{s(s+\eta)(s+\nu+\eta)[(s+\nu+\lambda+\eta)(s+\mu+\lambda+\eta)-\nu\mu]}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим вероятности пребывания системы в каждом состоянии:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \frac{\mu}{\nu+\mu} e^{-(\lambda+\eta)t} + \frac{\nu}{\nu+\mu} e^{-(\nu+\mu+\lambda+\eta)t}, \\ P_1(t) &= \frac{\nu}{\nu+\mu} e^{-(\lambda+\eta)t} - \frac{\nu}{\nu+\mu} e^{-(\nu+\mu+\lambda+\eta)t}, \\ P_2(t) &= \frac{\lambda(\lambda+\mu-\nu)}{\lambda(\lambda+\mu-\nu)-\nu\mu} e^{-(\nu+\eta)t} + \frac{\lambda\mu}{(\nu-\lambda)(\nu+\mu)} e^{-(\lambda+\eta)t} - \\ &- \frac{\nu\lambda}{(\mu+\lambda)(\mu+\nu)} e^{-(\nu+\mu+\lambda+\eta)t}, \\ P_4(t) &= 1 - e^{-\eta t}, \\ P_3(t) &= e^{-\eta t} - \frac{\lambda(\mu+\lambda-\nu)}{\lambda(\mu+\lambda-\nu)-\nu\mu} e^{-(\nu+\eta)t} - \frac{\nu(\nu+\mu-\lambda)}{(\nu-\lambda)(\nu+\mu)} e^{-(\lambda+\eta)t} + \\ &+ \frac{\nu\lambda}{(\mu+\lambda)(\nu+\mu)} e^{-(\nu+\mu+\lambda+\eta)t}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Если время адаптации распределено по закону равномерной плотности:

$$g(t) = \begin{cases} (b-a)^{-1}, & a \leq t \leq b \\ 0, & t > b, t < a \end{cases},$$

то

$$\bar{g}(s + \lambda + \eta) = \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda+\eta)t} [\gamma(t-a) - \gamma(t-b)](b-a)^{-1} dt = \\ = \frac{e^{-a(s+\lambda+\eta)} [1 - e^{-(b-a)(s+\lambda+\eta)}]}{(s+\lambda+\eta)(b-a)},$$

где  $\gamma(t)$  — единичная функция.

Если условия работы системы предусматривают необходимость деятельности блока контроля и коррекции на всем протяжении времени выполнения задания, то математическое ожидание времени до первого попадания системы в поглощающее состояние  $w_3(t)$  при равномерном распределении времени адаптации определяется выражением:

$$T_n = \sum_{i=0}^2 \bar{P}_i(S) |_{S=0} = \left\{ \lambda + \eta + \nu \left( 1 - \frac{e^{-a(\lambda+\eta)} [1 - e^{-(b-a)(\lambda+\eta)}]}{(\lambda+\eta)(b-a)} \right) \right\}^{-1} \left\{ 1 + \frac{\nu}{\lambda+\eta} \left[ 1 - \frac{e^{-a(\lambda+\eta)} [1 - e^{-(b-a)(\lambda+\eta)}]}{(\lambda+\eta)(b-a)} \right] + \frac{\lambda}{\nu+\eta} \right\}. \quad (7.35)$$

Реальные самоорганизующиеся системы обладают ограниченной приспособляемостью, т.е. не способны компенсировать возмущения и ошибки любой величины. Поэтому знание вероятностей состояний целесообразно использовать в качестве части исходных данных для оценки эффективности самоорганизующейся системы:

$$E(t) = \sum_{i \in \Omega} P_i(t) e_i(t),$$

где  $e_i(t)$  — эффективность системы в  $i$ -м состоянии.

Таким образом удастся отобразить процесс реального функционирования системы с учетом внешних возмущений, времени адаптации и изменения работоспособности элементов системы с течением времени.

5. По аналогии с алгебраической коррекцией, рассмотренной в § 5, которая может применяться как в жестких, так и в гибких структурах и которая осуществляется в устройстве сжатия, а не с помощью обратной связи, в гибких структурах, помимо рассмотренных возможностей контроля и коррекции с помощью обратной связи, имеется дополнительная возможность для коррекции системы с помощью непрерывной перестройки гибкой



структуры в зависимости от априорных сведений о характере помех, действующих в системе [12]. Действительно, если имеем возмущенную систему (7.4):

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} &= u_2 D_{24} + u_3 D_{34} + A_1, \\ \frac{d\tilde{x}_2}{d\tau} &= -u_2 D_{14} + u_4 D_{34} + A_2, \\ \frac{d\tilde{x}_3}{d\tau} &= -u_3 D_{14} - u_4 D_{24} + A_3,\end{aligned}\tag{7.36}$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= -u_2 \psi_2 - u_3 \psi_3, \quad A_2 = u_2 \psi_1 - u_4 \psi_3, \quad A_3 = u_3 \psi_1 - u_4 \psi_2, \\ \psi_1 &= D_{14} - D_{14}^*, \quad \psi_2 = D_{24} - D_{24}^*, \quad \psi_3 = D_{34} - D_{34}^*,\end{aligned}$$

и если известны вероятностные характеристики  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то очевидно можно назначить такие  $u_j$ , чтобы существенно уменьшить величину первичных ошибок  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , при этом можно требовать выполнения уравнения синхронности (7.5).

Например, если  $\psi_i$  представлены своими каноническими разложениями:

$$\psi_i(t) = m_i(t) + \sum_{l=1}^q V_{il} \varphi_l(t),\tag{7.37}$$

где  $m_i(t)$  — математические ожидания случайных функций,  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_q(t)$  — координатные неслучайные функции,  $V_{il}$  — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, то очевидно подбором  $u_2, u_3, u_4$  можно минимизировать математическое ожидание  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  и уменьшить их дисперсию.

При увеличении числа произвольных коэффициентов увеличиваются возможности этого вида коррекции в гибких избыточных структурах.

## § 8. Об устойчивости избыточных систем

Метод избыточных переменных позволяет строить расширенные системы дифференциальных уравнений по заданным исходным уравнениям, при этом в расширенных системах имеются большие возможности для выбора параметров избыточных систем таким

образом, чтобы удовлетворить тому или иному критерию качества работы систем при воздействии помех. Будем исследовать возможности построения избыточных систем, устойчивых при постоянно действующих малых, в среднем случайных, возмущениях.

Если имеем исходную систему:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.1)$$

решение которой существует и единственно в заданной области изменения переменных, то в соответствии с изложенным в предыдущих параграфах может быть построена расширенная система:

$$\frac{dx_j}{dt} = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, t), \quad j = 1, 2, \dots, n_1, \quad (8.2)$$

решения которой после сжатия строго эквивалентны решениям системы (8.1), т.е. если:

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j(t),$$

то  $z_i(t) \equiv y_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

где  $x_j$  и  $y_i$  — решение систем (8.1) и (8.2) при соответствующих начальных условиях,  $y_i(0) = \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j(0)$ . Будем рассматривать случай, когда  $a_{ij} = \text{const}$  для всех  $i$  и  $j$ .

При реализации расширенных систем вместо уравнений (8.2) будут решаться уравнения:

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = \varphi_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t) + A_j(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1}, t), \quad (8.3)$$

где  $A_j$  — функции, к которым можно свести результат действия различных помех в правых и левых частях уравнений. Так как теория устойчивости позволяет исследовать устойчивость относительно нулевых решений, то построим уравнение в вариациях для систем (8.2) и (8.3).

Пусть

$$\tilde{x}_j(t) - x_j(t) = e_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n_1, \quad (8.4)$$

тогда

$$\frac{de_j}{dt} = \sum_{e=1}^{n_1} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_e} \right)_0 e_e + A_j + E_j, \quad (8.5)$$

где

$$\lim \frac{E_j(t, e_1, e_2, \dots, e_{n_1})}{|e_1| + \dots + |e_{n_1}|} = 0$$

при  $\sum_{e=1}^{n_1} |e_j| \rightarrow 0$ .

Будем исследовать устойчивость системы уравнений в вариациях:

$$\frac{de_j}{dt} = \sum_{e=1}^{n_1} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_e} \right)_0 e_e + R_j(e, t, \omega), \quad (8.6)$$

где  $R(e, t, \omega)$  — такая случайная функция, что для уравнения (8.6) выполнены соответствующие условия теоремы существования и единственности. Предположим также, что случайный процесс:

$$\eta(t, \omega) = \sup_e |R(e, t, \omega)|$$

имеет конечное математическое ожидание. Решение  $e(t) \equiv 0$  называется устойчивым, при  $t \geq t_0$  для системы:

$$\frac{de_j}{dt} = \sum_{e=1}^{n_1} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_e} \right)_0 e_e \quad (8.7)$$

при постоянно действующих малых, в среднем случайных, возмущениях, если решение уравнений (8.6), удовлетворяющих начальному условию  $e(t_0, \omega_0) = e_0$ , стремится к нулю по вероятности равномерно по времени  $t \geq t_0$  при

$$|e_0| + \sup_{t \geq t_0} M\eta(t, \omega) \rightarrow 0. \quad (8.8)$$

Другими словами, решение  $e(t) \equiv 0$  устойчиво для системы (8.7) при случайных возмущениях, если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\Delta > 0$  найдется  $\gamma > 0$  такое, что из неравенства:

$$|e_0| + \sup_{t \geq t_0} M\eta(t, \omega) < \gamma$$

следует при  $t \geq t_0$  неравенство:

$$P\{|e(t, \omega)| > \Delta\} < \varepsilon.$$

Для обеспечения устойчивости в указанном смысле достаточно существования функции Ляпунова  $V(e, t)$  со свойствами:

- 1)  $V(0, t) \equiv 0$ ,  $V_\delta > 0$  при  $\delta > 0$ ;
- 2) для любого  $\delta > 0$  найдется  $C_\delta > 0$  такое, что в области  $\{|e| > \delta\}\{t > t_0\}$  выполнено неравенство:

$$\frac{d^0V}{dt} < -C_\delta V. \quad (8.9)$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде:

$$V(e, t) = \sum_{e=1}^{n_1} e_j^2, \quad (8.10)$$

которая не только удовлетворяет вышеприведенной теореме, но и условиям устойчивости в большем [9]. Тогда:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{e=1}^{n_1} 2e_j \frac{de_j}{dt}, \quad (8.11)$$

подставив в которое уравнение (8.7), получим:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{e=1}^{n_1} 2e_j^2 \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \right)_0 + 2e_1 e_2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right)_0 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right)_0 \right] + \dots \quad (8.12)$$

Для выполнения условия (8.9) при выбранной функции Ляпунова необходимо:

$$-\left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \right)_0 = c, j = 1, 2, \dots, n_1, C > 0, \quad (8.13)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right)_0 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right)_0 = 0, \dots, \left( \frac{\partial \varphi_{n_1-1}}{\partial x_{n_1}} \right)_0 + \left( \frac{\partial \varphi_{n_1}}{\partial x_{n_1-1}} \right)_0 = 0,$$

откуда и могут определяться такие значения параметров избыточных систем, чтобы расширенная система была устойчива при случайных возмущениях их параметров.

1. Рассмотрим систему с гибкой структурой.

Если исходная система  $\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, t)$ ,  $y_1(0) = y_{10}$ ,

$y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$ , то расширенная система будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1 a_2 - u_2 f_1(x_1, x_2 t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 a_1 - u_3 f_1(x_1, x_2 t) \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

где  $u_1, u_2, u_3$  — произвольные функции координат и времени. Для решения задачи в натуральном масштабе времени достаточно выполнения условия:

$$-u_2 a_1 - u_3 a_2 = 1. \quad (8.15)$$

В нашем случае  $\varphi_1 = u_1 a_2 - u_2 f_1(x_1, x_2 t)$ ,  $\varphi_2 = -u_1 a_1 - u_3 f_1(x_1, x_2 t)$  из (8.14), и тогда из (8.13) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} &= -c, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -c, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Рассмотрим случай  $u_2 = \text{const}$ ,  $u_3 = \text{const}$ .

Тогда

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \left(-c + u_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \frac{1}{a_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \left(c - u_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \frac{1}{a_1}, \quad (8.17)$$

и из третьего уравнения (8.16) получаем:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} \left(c + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right) = 0, \quad (8.18)$$

откуда следует, что в данном случае устойчивость обеспечивается при:

$$\begin{aligned} a_1 &\neq 0, \quad a_2 \neq 0, \\ c &= -\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Если  $f_1(y_1, t)$ , то устойчивость обеспечивается для  $\lambda < 0$ .

Рассмотрев случай, когда  $u_2$  и  $u_3$  — функции  $x_1$  и  $x_2$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{a_2} \left(-c + u_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} f_1\right), \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \frac{1}{a_1} \left(c - u_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} f_1\right). \end{aligned} \quad (8.19)$$

С учетом (8.15) из третьего уравнения (8.19) опять получим достаточное условие устойчивости (8.18).

Как можно показать и в более общем случае, в гибких структурах устойчивость обеспечивается только для устойчивых исходных систем.

2. Рассмотрим систему с коррекцией по воспроизводимой функции, которая описывается уравнениями (6.5). В этом случае

$$\varphi_1 = u_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} - \alpha u_3 \frac{\partial F}{\partial y_1}, \quad \varphi_2 = -u_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - \alpha u_3 \frac{\partial F}{\partial y_2},$$

и при  $u_1 = \text{const}$  условия устойчивости будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} u_1 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} \right) - 2\alpha \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial F}{\partial y_2} &= 0, \\ u_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} - \alpha \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 &= -c, \\ u_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} - \alpha \left( \frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 &= -c. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Из этих условий можно для заданной функции  $F(y_1, y_2) = 0$  определить область  $y_1, y_2$ , где эти условия выполняются.

Если решается задача отыскания корней двух уравнений, то система будет описываться уравнениями (6.17а), и условие:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = 0$$

выполняется тождественно для любых  $F_1, F_2$  при  $\alpha_1 = \alpha_1 = \alpha$ , а два других условия сводятся к требованию выполнения соотношения:

$$-\alpha \left( \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - x_1 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \right) = -c. \quad (8.21)$$

3. Рассмотрим систему с жесткой структурой с обратной связью. Для исходной системы  $\frac{dy_1}{dt} = f(y_1)$ ,  $y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$  и контрольного условия  $F(x_1, x_2) = 0$  уравнения системы с обратной связью, как было показано в § 6, могут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1 D_{23} - \alpha x_5 \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -u_1 D_{13} - \alpha x_5 \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{aligned} \right\}, \quad (8.22)$$

где  $D_{23} = f \frac{\partial F}{\partial x_2}$ ,  $D_{13} = f \frac{\partial F}{\partial x_1}$ .

Пусть  $D_{12} = 1$ ,  $u_1 = 1$ . Условия устойчивости в этом случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} + f \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \alpha \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 &= -c, \\ -\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_1} - f \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \alpha \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 &= -c, \\ 2\alpha \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} + f \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Из этих условий можно пытаться определить контрольные условия  $F$  по заданной правой части  $f$  исходного уравнения. Гораздо проще задача определения  $f$  по заданному контрольному условию. Действительно, определив  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  и  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  из первых двух уравнений (8.23) и подставив их в третье уравнение, получим конечное уравнение для определения  $f$ :

$$f = \frac{\alpha \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^4 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^4 \right] - 2\alpha \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 - c \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \right]}{\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \right]}. \quad (8.24)$$

Например, если  $F = x_1^2 + x_2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ , то стохастическая устойчивость будет обеспечиваться при решении следующего исходного уравнения:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{16\alpha y_1^4 - 4y_1^2(2\alpha + c) - c - \alpha}{-4y_1}.$$

Как легко видеть, структура обратной связи будет влиять лишь на числитель выражения (8.24). Знаменатель же зависит от вторых производных контрольного условия, т.е. знаменатель не обращается в нуль только для нелинейных контрольных условий. Только для нелинейных контрольных условий представляется возможность найти вид исходного дифференциального уравнения, которое будет устойчиво решаться в расширенной системе.

Методы теории устойчивости движения являются мощным средством совершенствования избыточных структур, но из-за громоздкости выкладок их следует применять для построения избыточных систем, предназначенных для погружения конкретных исходных уравнений.

Заметим, что при наличии многократных ошибок применение кодовых методов диагностики и коррекции затруднительно, и именно в этих случаях целесообразно применение методов построения систем, устойчивых при наличии постоянно действующих возмущений — детерминированных или стохастических.

## § 9. Сравнение метода избыточных переменных с другими способами контроля и управления вычислительными процессами

Введение избыточности на различных уровнях является эффективным способом улучшения качества протекания вычислительных процессов. Чтобы оценить место методов использования избыточности среди других средств, рассмотрим с лингвистической точки зрения процесс проектирования системы, который является отражением понятия о вычислительном процессе в его обобщенном виде. Целью рассматриваемых систем является решение задач, поставленных человеком. Поставить задачу — это значит сформулировать ее на том или ином языке. Человека или группу лиц, которые формулируют задачу, будем называть «Заказчик». После того как задача сформулирована, ее требуется решить. Решить задачу — это, кроме всего прочего, получить ответ, понятный заказчику.

Таким образом, подразумевается, что Заказчик обладает определенным словарем и системой правил для построения высказываний с соответствующей интерпретацией, иначе он не смог бы сформулировать задачу.

Задачу берется решить «Исполнитель», работа которого заключается в том, чтобы найти решение поставленной задачи. Иногда для этого Исполнитель должен произвести выкладки на бумаге, иногда для получения ответа он должен разработать устройство. Работа Исполнителя при решении больших задач оказывается сложной, выполнить ее может лишь коллектив людей разных профессий, вооруженных техникой. Например, первым этапом решения задачи может быть разработка соответствующей математической модели (перевод задачи на язык основных соотношений  $Y_{oc}$ ); вторым этапом может быть составление соответствующих программ для исследования этой модели на вычислительной машине (перевод задачи на язык программирования  $Y_{np}$ ); третьим этапом может быть разработка технологии и изготовление соответствующей физической модели или самого изделия, исследование которого и может дать ответ на поставленную задачу.

Каждый из Исполнителей этих этапов является носителем своего профессионального языка, и процесс решения задачи сводится



к переводу определенного текста, сформулированного Заказчиком, на языки исполнителей. Не останавливаясь на всех сторонах процесса принятия решений, рассмотрим некоторые лингвистические аспекты этого процесса.

В процессе перевода с одного языка на другой возникает много вопросов. Вот некоторые из них. Возможен ли перевод с языка Заказчика на языки Исполнителей? Если возможен, то будет ли перевод однозначным? С какими затратами связан такой перевод? Например, если требуется изготовить радиотехнический блок, то очевидно, что из одних пассивных элементов далеко не всякий блок может быть изготовлен. Включение в наш словарь усилительных элементов расширяет возможности реализации радиотехнических блоков. В этом случае может быть решено больше задач, т.е. больше задач переведено на язык радиотехнических схем. Далее, один и тот же функциональный блок может иметь различные схемы, т.е. перевод в данном случае неоднозначен.

Затраты на перевод определяются, во-первых, затратами на разработку соответствующего транслятора, и, во-вторых, объемом памяти и числом вычислительных операций, необходимых при трансляции, например, с языка основных соотношений  $Y_{oc}$  на язык программирования  $Y_{np}$ . Ответ на вопрос о возможности перевода с одного языка на другой связан с анализом идиоматики этих языков, с анализом их словарей и грамматик. Чтобы сделать перевод возможным, Исполнителю иногда требуется увеличить свой словарь, разработать новые радиотехнические элементы или новую математическую теорию. Ответ на вопрос об однозначности перевода связан с анализом изоморфизма и гомоморфизма переводимых языков, причем последний часто является желательным, так как позволяет обойти многие трудности реализации.

Будем предполагать, что решение задачи Заказчика существует, т.е. преодолены все лингвистические трудности, и возможен перевод с исходного языка на языки Исполнителей. Но при этом возникают другие трудности, не связанные с лингвистическим аспектом. К ним могут быть отнесены как чисто математические трудности, так и действие различного рода помех, как в процессе перевода, так и на уже переведенные или еще не переведенные куски текстов Заказчика и Исполнителей. Одним из способов преодоления

такого рода трудностей является введение избыточности. Когда говорят об избыточности, то имеет в виду следующее.

Пусть имеем  $T_1$  — текст Заказчика, построенный из  $n_1$  элементов словаря (словарь содержит  $N_1$  разных слов) с помощью  $z_1$  различных правил, и имеем соответствующий ему  $T_2$  — текст исполнителя из  $n_2$  элементов, построенный из словаря, содержащего  $N_2$  разных слов, с помощью  $z_2$  правил. Под действием помех оба этих текста искажаются, при этом нарушается соответствие между этими двумя текстами. О мере соответствия этих текстов Заказчик и Исполнитель договариваются предварительно. Для различных задач эта мера или критерий могут быть различными.

Для уменьшения влияния помех возможны различные способы. Можно изменять  $N_1$ ,  $z_1$ ,  $n_1$ ,  $N_2$ ,  $z_2$ ,  $n_2$ , сохраняя эквивалентность переводимых текстов. При введении избыточности пытаются пользоваться изменением только лишь  $z_1$ ,  $n_1$ ,  $z_2$ ,  $n_2$ , оставляя неизменными  $N_1$  и  $N_2$ . При этом в качестве текста Заказчика будем иметь текст  $T_1^*$ , а в качестве текста Исполнителя — текст  $T_2^*$ . При введении избыточности, т.е. для  $z_1^*$ ,  $n_1^*$ ,  $z_2^*$ ,  $n_2^*$  необходимо, чтобы было соответствие между  $T_1$  и  $T_1^*$ , между  $T_2$  и  $T_2^*$ , и чтобы не нарушалась осуществимость перевода из  $T_1^*$  в  $T_2^*$ .

Безусловно, не всегда за счет избыточности возможно преодоление действия помех. Иногда для этого единственным средством может явиться введение новых слов в алфавиты Заказчика и Исполнителя (увеличение  $N_1$  и  $N_2$ ), т.е. изобретение новых конструктивных материалов или новых функциональных элементов или введение новых математических понятий. Но как показывает опыт, введение избыточности часто является мощным средством для увеличения помехоустойчивости. Подтверждение этого — в наличии избыточности в естественных языках и в биологических системах на различных уровнях — от размножения до функционирования коллектива особей, в онтогенезе и филогенезе.

В настоящее время еще нет общей теории введения и использования избыточности, как есть, например, теория оптимизации внутри отдельных структур. И если проблема оптимальности в кибернетике довольно четко сформулирована, то проблема избыточности еще далека от такой четкой формулировки, что связано с неразвитостью системных исследований в настоящее время.

Вместе с тем введение избыточности используется уже давно в различных отраслях науки и техники, для преодоления различных трудностей. В качестве примеров, кроме широко известных методов резервирования и дискретного кодирования, можно указать на следующие.

Во-первых, в теории динамического программирования Р.Беллманом четко сформулирован принцип инвариантного погружения (the theory of invariant imbedding), которым пользовался еще А.Пуанкаре.

Во-вторых, при решении некорректных задач А.Н.Тихоновым и В.К.Ивановым разработаны так называемые методы регуляризации, которые основаны на введении дополнительных, избыточных функций.

В-третьих, разработанные Г.Е.Пуховым методы синтеза квазианалоговых систем основаны на получении совершенно новых свойств у вычислительных устройств за счет введения избыточности [22].

В настоящее время является общепризнанным, что высокую точность, надежность и эффективность сложных технических систем нельзя обеспечить только за счет повышения надежности элементарных блоков [1, 27, 29, 31, 33, 38, 40]. Весьма универсальным средством для этого является введение избыточности в проектируемые системы, создание структур и устройств, способных обнаруживать неисправные элементы системы и автоматически их отключать. Был предложен и технически осуществлен целый ряд способов контроля и управления для решения этой задачи. Все они основаны на введении аппаратурной или временной избыточности, и могут быть разделены на четыре большие группы.

а. Тестовый контроль. Он заключается в подаче на систему стимулирующего воздействия и сравнении ее реальной реакции с идеальной. Известно много разновидностей тестового контроля. К ним относятся проверка прохождения стандартных сигналов в радиоаппаратуре, решение тестовых задач на АВМ и ЦВМ, подача на вход динамической системы наряду с основным высокочастотного вспомогательного сигнала с последующим анализом реакции системы и т.д. Сюда же можно отнести способы контроля, заключающиеся в проверке характеристик аппаратуры и номинальных значений параметров схем. Для тестового контроля

характерна значительная временная избыточность при малых аппаратурных затратах [21, 23].

b. Контроль и управление на основе резервирования является очень универсальным способом повышения надежности, применимым к любым системам и на любом уровне. Резервирование позволяет осуществить контроль путем сравнения выходов основного и дублирующего блоков, диагностику и коррекцию при использовании мажоритарного принципа для большого класса ошибок произвольной кратности. Но за простоту и универсальность этого способа приходится расплачиваться большим объемом аппаратурной или временной избыточности (удвоение, утроение и т.д.).

c. Методы теории кодирования, которые первоначально развивались применительно к передаче двоичных сообщений по каналу связи, позволили получить ряд глубоких результатов как в смысле получения предельных оценок для избыточности при заданной корректирующей способности, так и на пути построения конкретных кодов. Оказалось, что основная идея теории кодирования очень плодотворна и может быть перенесена на ряд других областей. Так появились арифметические коды и коды для логических преобразований [35]. Необходимо отметить, что задача контроля обработки информации намного сложнее контроля ее передачи. Сопоставляя теорию кодирования с резервированием, следует сказать, что теория кодирования позволяет достичь значительно более сильных результатов при оптимизации контроля, диагностики и коррекции ошибок, но намного уступает резервированию по широте применения.

d. Четвертую группу составляют способы контроля при помощи вспомогательных уравнений, и здесь иногда употребляют термин «логический» или «программно-логический» контроль. Эта группа объединяет большое число довольно разнообразных способов, использующих для контроля и последующего управления проверку различных соотношений, связывающих контролируемые параметры. В качестве примеров из вычислительной техники можно указать на вычисление интеграла полной энергии или других известных первых интегралов при решении задач небесной механики, на проверку вспомогательных соотношений в сферической тригонометрии, на контроль вычислений при

решении алгебраических уравнений введением дополнительной переменной [2, 20, 34] и т.д. К этой группе способов контроля относится и рассматриваемый метод избыточных переменных [25]. В отличие от перечисленных способов, МИП дает регулярный метод построения вспомогательных уравнений для довольно широкого класса задач и может быть использован для контроля и управления в различных вычислительных процессах.

Способы четвертой группы требуют значительно меньшей избыточности, чем резервирование, и имеют большую область применения, чем теория кодирования. Они занимают промежуточное положение между ними и могут рассматриваться как обобщение теории кодирования на случай обработки информации. МИП можно рассматривать как способ функционального кодирования применительно к задачам, сформулированным прежде всего на языке основных соотношений.

Сравним МИП с некоторыми известными способами повышения помехоустойчивости. Один способ реализации МИП — использование операции сжатия для борьбы с помехами (§ 5). Матрица расширения в этом случае будет:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{n_1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n_1}^n \end{array} \right\|, \quad (9.1)$$

и как частный случай МИП может рассматриваться известный прием повышения точности копировальных систем, где используются копии, изготовленные в увеличенном масштабе. Действительно, если  $Y$  — требуемый линейный размер детали, то размер копира  $X = KY$ ,  $K > 1$ . Принимая в качестве исходной переменной  $Y$ , а избыточной  $X$ , можно записать матрицу расширения как  $\left\| \frac{1}{K} \right\|$ . Если  $\tilde{X} = X + P$ , где  $P$  — ошибка системы, не зависящая от размера копира, то после операции сжатия получим уменьшение ошибки:

$$\tilde{Y} = \frac{X}{K} + \frac{P}{K} = Y + \frac{P}{K}.$$

Далее, в технике измерений часто используют способ многократного отсчета, при этом  $Y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ , и матрица расширения в этом случае будет:

$$\left\| \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right\|. \quad (9.2)$$

При статически независимых отсчетах с равными дисперсиями получим улучшение точности системы:

$$D(Y) = \frac{1}{n} D(x_j). \quad (9.3)$$

Для систем с постоянным включением резерва тоже можно написать матрицы расширения.

В системах с контрольным условием, что равносильно включению в систему наблюдателя и нового уровня для оценки результатов контроля и принятия решений, оказывается возможным получение качественно новых результатов по сравнению с системами без наблюдателя. В этом случае матрица расширения по МИП будет иметь вид:

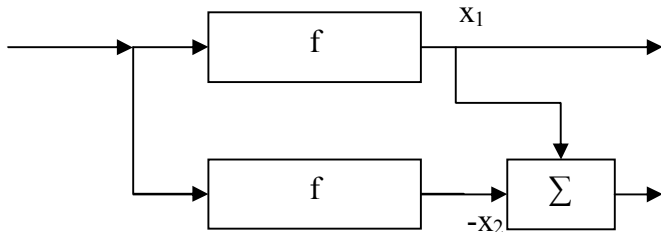
$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{n_1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n_1}^n \\ m_1^1 & m_2^1 & \dots & m_{n_1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^k & m_2^k & \dots & m_{n_1}^k \end{array} \right\|. \quad (9.4)$$

Дублирование и мажоритарные методы являются частными случаями МИП. Действительно, обозначив через  $X_1$  и  $X_2$  выходные сигналы дублированных блоков (рис. 11), можно записать контрольное условие:

$$X_1 - X_2 = 0,$$

и матрица расширения этого случая будет:

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right\|. \quad (9.5)$$



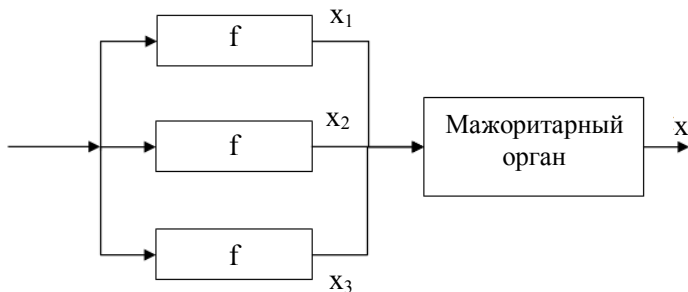
**Рис. 11. Дублирование**

Для системы с утроением блоков и мажоритарным выбором результата (рис. 12) контрольные условия будут:

$$X_1 - X_2 = 0, X_1 - X_3 = 0, X_2 - X_3 = 0,$$

а матрица расширения с учетом линейной зависимости этих контрольных условий будет:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right\|. \quad (9.6)$$



**Рис. 12. Система с утроением блоков и мажоритарным выбором результата**

Таким образом, МИП может рассматриваться как обобщение и развитие известных способов повышения надежности и точности.

2. Важным моментом при оценке метода является область его применения. В предыдущих параграфах было рассмотрено применение МИП главным образом к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом пункте опишем более широкий класс вычислительных процессов и обсудим вопросы применения МИП для их контроля.

Довольно общее описание вычислительного процесса можно представить в форме:

$$Y = F(Z), \quad (9.7)$$

где  $Y = [y_i]_{n,1}$  — матрица-столбец выходных переменных исходной задачи,  $Z = [z_i]_{m,1}$  — матрица-столбец входных переменных исходной задачи,  $F$  — оператор, определяющий сумму функций  $\{f_i(z)\}_{i=1,n}$ . Будем полагать, что оператор распадается на два сомножителя:

$$F = L\Phi, \quad (9.8)$$

где  $\Phi$  — оператор, определяющий систему элементарных функций,  $L$  — линейный оператор, задаваемый матрицей  $[L_{ij}]_{n,r}$ ,  $L_{ij}$  — линейные операции, такие как умножение на одинаковую переменную, дифференцирование, интегрирование и др. [16, 19]

Метод избыточных переменных с линейными контрольными условиями основан на избыточном линейном преобразовании задачи (9.7). В результате линейного комбинирования исходных функций получается новая система функций, удовлетворяющая требованиям контроля результатов вычислений. Поэтому рассмотрим функции, допускающие эффективное линейное комбинирование. Если известна функция  $f(z)$  и задана система базисных функций  $\{v_i(z)\}_{i=1,l}$ , то функция  $f(z)$  линейна относительно базисных функций, если:

$$f(z) = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i(z), \quad (9.9)$$

где  $\lambda_i$  — числа, не равняющиеся нулю одновременно.

Например, полином  $n$ -ой степени  $y = \sum_{i=0}^n a_i v_i$  линейен относительно  $v_0 = 1$ ,  $v_1 = z, \dots$ ,  $v_n = z^n$ , а гармоническая функция  $y = a \sin(z + b)$  линейна относительно  $v_i = \sin z$ ,  $v_i = \cos z$ .



Осуществим линейное избыточное преобразование выходных переменных:

$$Y = AX, \quad (9.10)$$

где  $X = [x_j]_{1, n_1}$  — матрица-столбец  $n_1$  новых переменных,  $n_1 > n$ ,  $A = [a_{ij}]_{n, n_1}$  — матрица расширения.

На новые переменные наложим  $n_1 - n$  дополнительных линейных условий:

$$MX = 0, \quad (9.11)$$

где  $M = [m_{ij}]_{k, n_1}$  — матрица контрольных условий.

Решая (9.10) и (9.11) совместно при:

$$\delta = \begin{vmatrix} A \\ M \end{vmatrix} \neq 0, \quad (9.12)$$

определим новые переменные:

$$X = LY, \quad (9.13)$$

где  $L = [\lambda_{ij}]_{n_1, n}$  — матрица, получающаяся обращением матрицы (9.12) по элементам матрицы  $A$ .

Новые переменные  $X$  будут результатом вычислительного процесса:

$$X = LF(Z), \quad (9.14)$$

и если оператор  $F$  определяет систему функций, линейных относительно базисной системы  $[v_j]_{i=1, l}$ , то:

$$X = CV(Z), \quad (9.15)$$

где  $V(Z) = [v_i(z)]_{l, 1}$  — матрица-столбец базисных функций,  $C$  — линейный оператор, задаваемый матрицей  $L$  и линейным оператором  $L$ .

При таком подходе весьма широкий класс вычислительных процессов оказывается в сфере действия МИП, в том числе и многие микропрограммные процессы УЦВМ, и рассмотренное ранее решение обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью контрольных условий (9.13) могут определяться

первичные ошибки, и эта информация может использоваться для управления вычислительным процессом.

3. Вычислительные процессы с избыточностью оказываются сложнее исходных, поэтому представляется важным оценить это усложнение, для чего будем пользоваться понятием алгоритмической сложности, введенным В.М.Глушковым.

Вычисление любой функции  $f(z_1, \dots, z_m)$  связано с затратами аппаратуры и машинного времени, которые можно оценивать алгоритмической сложностью  $N_f$  относительно стандартной операции — сложения двух 30-значных чисел. В единицах этой операции можно оценивать арифметические и логические операции в машине.

Сложность схем моделирования на АВМ можно определять количеством используемых решающих усилителей. В качестве стандартной алгоритмической единицы САЕ можно принять решающий усилитель с  $q$  входами. Алгоритмическая сложность схемы для решения канонической системы линейных дифференциальных уравнений в этом случае может вычисляться по формуле:

$$N_F = \sum_{i=1}^n \text{ent} \left[ \frac{m_i}{q} + 0.5 \right], \quad (9.16)$$

где  $n$  — порядок системы уравнений,  $m_i$  — число суммируемых величин в правой части  $i$ -того уравнения.

Нелинейные блоки АВМ содержат решающие усилители с нелинейными входными цепями или нелинейными обратными связями. Их сложность тоже может оцениваться в САЕ (см. табл. 1).

*Таблица 1*

**Сложность нелинейных блоков АВМ**

Типы машины	МН-7	МН-14	ЭМУ-8	ЭМУ-10	Аналог
Блок произв.	3	2	2	2	2
Функц. блок	2	2	2	2	2
Эл. мех. блок	—	2	—	2	—

Алгоритмическая сложность схем ЦДА определяется, естественно, числом цифровых интеграторов. При этом не учитываются логические элементы, связывающие цифровые интеграторы

в схему решения задачи. Алгоритмическая сложность некоторых операций, реализуемых в ЦДА, приведена в табл. 2.

Таблица 2

**Алгоритмическая сложность некоторых операций,  
реализуемых в ЦДА**

Алгоритмическая сложность в САЕ	Операции			
	сложение	умножение	деление	интегрирование
	1	3	3	1

Если на машине вычисляется оператор  $F$ , определяющий систему функций  $\{f_i(z)\}_{i=1,n}$ , то следует учесть возможность существования общих частей у различных функций. Поэтому формула алгоритмической сложности оператора будет следующей:

$$N_F = \sum_i N_{f_i} - \sum_{i,j} N_{f_i \cap f_j} + \sum_{i,j,k} N_{f_i \cap f_j \cap f_k} - \dots,$$

где суммы распространяются на различные значения индексов  $i$ ;  $i, j$ ;  $i, j, k$  и т.д.

Значит:

$$N_F \leq \sum_{i=1}^n N_{f_i}. \tag{9.17}$$

Например, пусть оператор  $F$  определяет функции преобразования сферических координат  $(R, \varphi, \lambda)$  в прямоугольные  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} x &= R \sin \varphi \cos \lambda, \\ y &= R \sin \varphi \sin \lambda, \\ z &= R \cos \varphi. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Тогда  $N_F = 4(N_T + N_{ум})$ , где  $N_T$  — алгоритмическая сложность тригонометрических функций, а  $N_{ум}$  — алгоритмическая сложность умножения. Полученное значение меньше той алгоритмической сложности, которая бы получилась при независимой реализации рассмотренных выше формул:

$$N_F < 5(N_T + N_{ум}).$$

Для сравнения двух операторов  $F$  и  $F'$  по сложности будем использовать относительную алгоритмическую сложность:

$$\delta N_{F'} = \frac{N_{F'} - N_F}{N_F}.$$

Именно эта характеристика будет использоваться в дальнейшем, что оправдывает приближенный характер определения алгоритмической сложности.

Сложность вычислительных процессов с избыточностью определяется не столько числом избыточных переменных, сколько относительной алгоритмической сложностью нового оператора  $F_u$  по сравнению с исходным оператором  $F$ :

$$\delta N_{F_u} = \frac{N_{F_u} - N_F}{N_F}. \quad (9.19)$$

В зависимости от ее величины избыточные переменные преобразования могут быть:

- а) экономичными, когда  $\delta N_{F_u} \leq \frac{k}{n}$ ,
- б) частично экономичными, когда  $\frac{k}{n} < \delta N_{F_u} < k$ ,
- в) неэкономичными, когда  $\delta N_{F_u} \geq k$ ,

где  $k$  — число контрольных линейных условий,  $n$  — число исходных выходных переменных.

Если функции оператора  $F$  реализуются независимо с алгоритмической сложностью  $N_{f_i} = N$  и  $N_F = nN$ , то избыточное преобразование будет экономичным. Действительно, для функций оператора  $F_u$  будем иметь  $N_{F_j} \leq N$  и:

$$N_{F_u} \leq (n + k)N, \quad \delta N_{F_u} \leq \frac{k}{n}.$$

Если алгоритмическая сложность оператора лежит в пределах  $\frac{n+k}{k+1}N < N_F < nN$ , то избыточное преобразование будет частично экономичным. Для проверки этого утверждения достаточно подставить указанные пределы  $N_F$  и получить:

$$\frac{k}{n} < \delta N_{F_u} < k.$$

Наконец, в том случае, когда  $N_F \leq \frac{n+k}{k+1}N$ , избыточное преобразование оказывается неэкономичным.

Таким образом, чем больше общих частей имеют функции оператора  $F$ , тем меньше  $N_F$  и тем больше в общем случае сложность преобразованных вычислительных процессов.

Но не меньшее влияние на сложность оказывает организация вычислений  $F_u$ . Если величина  $N_F$  определяет частично экономичное или даже неэкономичное избыточное преобразование, то при:

$$N_{F_u} \leq \frac{n+k}{n} N_F$$

можно сохранить условие экономичности, а при:

$$N_{F_u} < (k + 1)N_F$$

— условие частичной экономичности.

Приведем пример. Пусть на ЦВМ реализуется задача вида:

$$y_1 = \sin z, y_2 = \cos z.$$

Произведем линейное избыточное преобразование, задаваемое матрицей:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Тогда получим преобразованную задачу:

$$y_1 = \sin z,$$

$$y_2 = \cos z,$$

$$y_3 = \sqrt{2} \sin(z + \frac{\pi}{4}),$$

$$y_1 + y_2 - y_3 = 0.$$

Если  $\sin x$  и  $\cos x$  вычисляются по отдельным стандартным программам, то:

$$N_F = 2N_{\text{СП}}, N_{F_u} \approx 3N_{\text{СП}}.$$

Значит,  $\delta N_{F_u} \approx 0,5$ , что соответствует экономичному избыточному преобразованию.

Но при использовании общей синусно-косинусной стандартной программы:

$$N_F = N_{\text{СП}}, N_{F_u} \approx 2N_{\text{СП}}.$$

Значит,  $\delta N_{F_u} \approx 1$ , что соответствует неэкономичному преобразованию.

Правда, в последнем случае одновременно с  $y_3$  можно вычислить  $y_4 = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$ . Это соответствует экономичному преобразованию  $\delta N_{F_u} = 1$  с матрицей:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Итак, на основании вышерассмотренного можно сделать вывод об эффективности линейного избыточного преобразования, составляющего основу метода избыточных переменных.

Метод избыточных переменных, основанный на линейном избыточном преобразовании переменных исходной задачи, позволяет осуществлять непрерывный контроль и коррекцию вычислительного процесса по  $k$  введенным линейным контрольным условиям за счет относительно небольшой избыточности. Метод избыточных переменных эффективен в том случае, когда оператор  $F$  исходной задачи определяет систему функций, линейных относительно определенных базисных функций  $\{v_i(z)\}_{i=1,l}$ , а алгоритмическая сложность его находится в пределах:

$$\frac{n+k}{k+1}N < N_F < nN,$$

где  $N$  — число, характерное для класса функций, линейных относительно указанных базисных функций.

4. До сих пор предполагалось, что оператор  $F$  исходной задачи определяет систему функций  $\{f_i(z)\}_{i=1,n}$ , линейных относительно определенного базиса  $\{v_i(z)\}_{i=1,l}$ .

Иными словами, оператор  $F$  должен распадаться на два оператора:

$$F = CV,$$

где  $C$  — линейный оператор;

$V$  — оператор, определяющий базовые функции.

Метод избыточных переменных в этом случае наиболее эффективен, так как преобразованный оператор вида  $F_u = C_u V$  определяет

систему функций  $\{f_i(z)\}_{i=1,n}$ , линейных относительно наибольшей избыточности (при  $N_F > \frac{n+k}{k+1}N$ ).

Но не все функции обладают линейным свойством, в том смысле, что оказывается невозможным найти для них базисные функции. Например, для показательных функций  $a^z$  невозможно найти, по крайней мере известные, элементарные функции, которые могли бы стать базисом класса показательных функций.

Если оператор  $F$  исходной задачи определяет систему функций, для которых невозможно найти базисную систему функций, то обычно происходит вырождение метода избыточных переменных. В этом случае из  $X = LF(Z)$  следует, что, в частности, алгоритм вычислений преобразованных переменных может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}f'_1 + \dots + \lambda_{1n}f'_n(z), \\ \dots & \\ x_{n_1} &= \lambda_{n_1 1}f_1^{n_1} + \dots + \lambda_{n_1 n}f_n^{n_1}(z), \end{aligned}$$

где  $f_i^j(z)$  —  $i$ -ая функция исходной задачи, реализуемая в  $j$ -ой преобразованной переменной.

Рассмотрим основные характеристики вырожденного избыточного преобразования переменных. Во-первых, избыточность преобразованного оператора  $F_u = LF$  находится в пределах:

$$1 \leq \delta N_{F_u} \leq n_1 - 1.$$

Верхняя граница достигается при условии, что коэффициенты  $\lambda_{ij}$  обратного преобразования все отличны от нуля, а нижняя граница достигается, например, в частном случае  $\Lambda$ , который описывается ниже.

Во-вторых, при вырождении линейного избыточного преобразования изменяется модель ошибок  $\Delta\tilde{x}_j$ . Пусть  $P_j^i$  — ошибка  $i$ -той функции, реализуемой в  $j$ -той переменной.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}_1 &= \lambda_{11}P_1^1 + \dots + \lambda_{1n}P_n^1, \\ \dots & \\ \Delta\tilde{x}_{n_1} &= \lambda_{n_1 1}P_1^{n_1} + \dots + \lambda_{n_1 n}P_n^{n_1}. \end{aligned}$$

Если:

$$P_j^i = P_{1i} + P_{2j}^i,$$

где  $P_{1i}$  — ошибка, одинаковая для всех блоков вычислений  $i$ -той функции (методические, систематические погрешности);

$P_{2j}^i$  — ошибка, характерная для  $j$ -того блока,  $i$ -той функции (случайные погрешности), то контрольными условиями (9.12) могут обнаруживаться только ошибки  $P_{2j}^i$ :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \sum_{i=1}^n P_{1i} \sum_{j=1}^{n_1} m_{\alpha_j} \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_1} m_{\alpha_j} \lambda_{ij} P_{2j}^i &= \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_1} m_{\alpha_j} \lambda_{ij} P_{2j}^i, & \\ \alpha = 1, 2, \dots, k, & \end{aligned}$$

в силу свойств обратного преобразования  $\Lambda$ .

Наконец, вырожденные линейные преобразования специального вида приводят к известным методам борьбы с ошибками. Например, при  $k \geq n$  имеем

1) дублирование ( $k = n$ ), задаваемое:

$$\delta = \left\| \begin{array}{cc} 1 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots 1 & 0 \dots 0 \\ 1 \dots 0 & -1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots 1 & 0 \dots -1 \end{array} \right\|$$

и характеризующееся  $\delta N_{F_u} = 1$ ;

2) троирование ( $k = 2n$ ), задаваемое:

$$\delta = \left\| \begin{array}{ccc} 1 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 1 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 1 \dots 0 & 0 \dots 0 & -1 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 0 & -1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 1 & 0 \dots 0 & 0 \dots -1 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 1 & 0 \dots -1 \end{array} \right\|$$

и характеризующееся  $\delta N_{F_u} = 2$ ;



3) оптимальная обработка избыточной информации, задаваемая:

$$\delta = \left\| \begin{array}{cc} 0,5 \dots 0 & 0,5 \dots 0 \\ \dots \dots & \dots \dots \\ 0 \dots 0,5 & 0 \dots 0,5 \\ 1 \dots 0 & -1 \dots 0 \\ \dots \dots & \dots \dots \\ 0 \dots 1 & 0 \dots 1 \end{array} \right\|$$

и характеризующаяся  $\delta N_{F_u} = 1$  и увеличением точности в 2 раза.

Для того чтобы избежать вырождения линейного избыточного преобразования, опишем два способа, которые связаны либо с предварительным эквивалентным преобразованием исходной задачи, либо с разбиением ее на блоки.

Предварительное преобразование исходной задачи выполняется с целью приведения оператора  $F$ , для функций которого невозможно найти базиса, к оператору  $F'$ , для функций которого определяется известный базис.

Пусть при переходе  $F \rightarrow F'$  получается изменение алгоритмической сложности:

$$\delta N_{F'} = \frac{N_{F'} - N_F}{N_F},$$

а при преобразовании  $F' \rightarrow F'_u$  получаем:

$$\delta N_{F'_u} = \frac{N_{F'_u} - N_{F'}}{N_{F'}}.$$

Очевидно, избыточности следует оценивать величиной относительной алгоритмической сложности:

$$\delta N_{F_u} = \frac{N_{F'_u} - N_F}{N_F}.$$

Если для оператора  $F'$  линейное избыточное преобразование экономично:

$$\delta N_{F'_u} = \frac{k}{n} - \xi,$$

где  $0 \leq \xi < \frac{k}{n}$ , то при:

$$\delta N_{F'} \leq \xi$$

условие экономичности сохраняется, а при:

$$\delta N_{F'} < \xi + \frac{k(n+1)}{n}$$

выполняемое преобразование с избыточностью оказывается частично экономичным. Это следует непосредственно из того, что:

$$\delta N_{F_u} = \delta N_{F'_u} + \delta N_{F'}.$$

Аналогично, если

$$\delta N_{F'_u} = k - \xi^*,$$

где  $0 < \xi^* < \frac{k(n-1)}{n}$ , то избыточное преобразование частично экономично при:

$$\delta N_{F'} < \xi^*.$$

Таким образом, преобразуя исходную задачу для эффективного применения метода избыточных переменных, следует учитывать возможное увеличение избыточности.

Приведем пример. Пусть функции исходной задачи аналитические и разлагаются, следовательно, в степенной ряд:

$$y_1 = f_1(z) \cong \sum_{i_1+\dots+i_m < r} c_{i_1+\dots+i_m < r}^1 z_1^{i_1} \dots z_m^{i_m},$$

.....

$$y_n = f_n(z) \cong \sum_{i_1+\dots+i_m < r} c_{i_1+\dots+i_m < r}^n z_1^{i_1} \dots z_m^{i_m},$$

где  $r$  определяется заданной точностью разложения. Реализация полиномов на 30-разрядной УЦВМ в виде схем Горнера дает:

$$m = 1, N_{F'} \approx 6nr \text{ (CAE)},$$

$$m = 2, N_{F'} \approx 3nr^2 \text{ (CAE)}.$$

Линейное избыточное преобразование в этом случае экономично и сохраняется таковым при условии, что:

$$m = 1, N_F \approx 6nr \text{ (CAE)},$$

$$m = 2, N_F \approx 3nr^2 \text{ (CAE)},$$

и становится частично экономичным, если:

$$m = 1, N_F > \frac{6nr}{k+1} \text{ (CAE)},$$

$$m = 2, N_F > \frac{3nr^2}{k+1} \text{ (CAE)}.$$

Здесь  $N_F$  — алгоритмическая сложность реализации исходных функций  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  методом, отличным от разложения в степенной ряд.

При построении сложных алгоритмов часто пользуются разбиением их на блоки. Это упрощает изучение алгоритмов и облегчает отладку программы. Поэтому целесообразно исследовать блочное применение линейного преобразования задач методом избыточных переменных.

Пусть оператор  $F$  определяет систему функций, для которых неизвестен базис, но возможно разбиение оператора на блоки:

$$F = F_1 \dots F_g,$$

причем каждый подоператор  $F_i$  определяет систему функций, линейных относительно известного базиса.

Линейное избыточное преобразование переменных, являющихся результатом оператора  $F_i$  ( $i = 1, g$ ), приводит к избыточности:

$$\delta N_{F_{ui}} = \frac{N_{F_{ui}} - N_{F_i}}{N_{F_i}}.$$

Общая избыточность задачи будет:

$$\delta N_{F_u} = \sum_{i=1}^g \gamma_i \delta N_{F_{ui}}, \quad (9.20)$$

где  $\gamma_i = \frac{N_{F_i}}{N_F}$  — удельный вес  $i$ -того подоператора.

Если избыточность каждого подоператора определяется выражением:

$$\delta N_{F_{ui}} = k + \mu_i,$$

причем  $\mu_i \leq \frac{k(1-n_i)}{n_i}$  — при экономичном преобразовании;

$\mu_i < 0$  — при частично экономичном преобразовании;

$\mu_i \geq 0$  — при неэкономичном преобразовании, то избыточность задачи  $\delta N_{F_u}$  может удовлетворять условию:

а) экономичности, при  $\sum_{i=1}^g \gamma_i \mu_i \leq \frac{k(1-n)}{n}$ ;

б) частичной экономичности, при  $\frac{k(1-n)}{n} < \sum_{i=1}^g \gamma_i \mu_i < 0$ ;

в) неэкономичности, при  $\sum_{i=1}^g \gamma_i \mu_i \geq 0$ .

Это следует из (9.20) и равенства:

$$\sum_{i=1}^g \gamma_i = 1.$$

Таким образом, можно сделать два следующих вывода:

1) избыточность задачи  $\delta N_{F_u}$  удовлетворяет, по крайней мере, условию частичной экономичности, если избыточность каждого блока  $\delta N_{F_{ui}}$ ,  $i = 1, g$  удовлетворяет условию экономичности или частичной экономичности;

2) избыточность задачи  $\delta N_{F_u}$  удовлетворяет условию экономичности, если при экономичном преобразовании каждого блока выполняется также условие:

$$\sum_{i=1}^g \gamma_i v_i \leq 1,$$

где  $v_i = \frac{n}{n_i}$ .

Приведем пример.

Пусть система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dY}{dt} = C(Y, Y), Y(0) = Y^0,$$

где  $C(Y, Y) = [C_i(Y, Y)]_{n,1}$  — матрица-столбец квадратичных форм  $C_i(Y, Y)$ , решается на АВМ с использованием  $n$  сумматоров-интеграторов,  $n$  инвертеров и  $\frac{n(n+1)}{2}$  блоков произведения.

Следовательно, можно выделить

— линейный блок с  $N_{F_1} = 2n$  (САЕ);

— нелинейный блок с  $N_{F_2} = n(n+1)$  (САЕ).

Линейное избыточное преобразование

$$Y = AX, X = \Lambda Y$$

дает следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{dt} = C(X, X), Y(0) = Y^0,$$

в которой матрица  $j$ -той квадратичной формы  $C_j$  выражается через матрицы исходных квадратичных форм следующим образом:

$$C_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} A^T C_i A.$$

При реализации преобразования на АВМ результаты линейного блока контролируются по условиям:

$$MX = 0,$$

а нелинейного блока — по соотношениям:

$$X^T G_i M_\alpha, i = 1, k(n+k), j = 1, (n+k), \alpha = 1, k.$$

Линейный блок, имевший  $n$  переменных на выходе, определяется теперь  $(n+k)$  переменными, которые связаны линейными соотношениями. Избыточность его будет:

$$\delta N_{F_{u1}} = \frac{2(n+k)-2n}{2n} = \frac{k}{n}.$$

Нелинейный блок, имевший на выходе  $n(n+1)/2$  произведений  $y_i y_j$ , теперь имеет  $(n+k)(n+k+1)/2$  произведений  $x_i x_j$ , связанных  $k(n+k)$  линейными соотношениями. Избыточность его будет:

$$\delta N_{F_{u2}} = \frac{(n+k)(n+k+1)-n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{k}{n} \frac{2n+k+1}{n+1}.$$

Следовательно, при  $n \rightarrow \infty$  избыточность всей схемы определяется выражением

$$\delta N_{F_u} = \frac{2n}{N_{F_1} + N_{F_2}} \delta N_{F_{u1}} + \frac{n(n+1)}{N_{F_1} + N_{F_2}} \delta N_{F_{u2}} \rightarrow \frac{2k}{n}.$$

Значит, даже в асимптотике линейное преобразование только частично экономично. Положим теперь, что в исходных уравнениях отсутствует  $m$  блоков произведения. Тогда при  $n \rightarrow \infty$  избыточность схемы будет:

$$\delta N_{F_u} = \frac{2k}{n} \frac{n+m/k}{n-2m/n}.$$

Отсюда, в асимптотике сохраняется условие частичной экономичности, если:

$$m < \frac{n}{2+1/k}.$$

Блочное применение метода избыточных переменных оказывается перспективным при построении программ УЦВМ, при синтезе схем ЦДА.

5. При повышении качества вычислительных процессов необходимо сочетание различных методов использования избыточности на различных уровнях. Можно ставить задачу оптимального сочетания различных методов в рамках линейного программирования. Если  $m_{oc}$ ,  $m_{np}$ ,  $m_m$  — количество ошибок на уровнях  $Y_{oc}$ ,  $Y_{np}$  и  $Y_m$  соответственно (см. Введение), и если затраты на борьбу с ошибками при введении избыточности на уровне  $Y_{oc}$  будут  $C_{oc}^0$ , когда ошибки действуют на уровне  $Y_{oc}$ ,  $C'_{oc}$ , когда ошибки действуют на уровне  $Y_{np}$ , и  $C''_{oc}$ , когда ошибки действуют на уровне  $Y_m$ ; если затраты на борьбу с ошибками при введении избыточности на уровне  $Y_{np}$  будут  $C'_{np}$ , когда ошибки действуют на уровне  $Y_{np}$ ,  $C''_{np}$ , когда ошибки действуют на уровне  $Y_m$ ; если затраты на борьбу с ошибками при введении избыточности на уровне  $Y_m$  будут  $C''_m$ , то целевая функция будет иметь вид:

$$C = C_{oc}^0 m_{oc} + C'_{oc} m_{np}^0 + C''_{oc} m_m^0 + C'_{np} m'_{np} + C''_{np} m'_m + C''_m m''_m \rightarrow \min,$$

$$m_{np} = m_{np}^0 + m'_{np},$$

$$m_m = m_m^0 + m'_m + m''_m.$$

При решении задач минимизации суммарных затрат на обеспечение заданной надежности вычислительного процесса находятся величины  $m_{np}^0$  и  $m'_{np}$ ,  $m_m^0$ ,  $m'_m$  и  $m''_m$ , которые и определяют, с какими помехами целесообразно бороться на том или ином уровне.

В настоящее время определение весовых коэффициентов целевой функции возможно только лишь для нескольких частных случаев. Например, если экономится полный вес, то большая величина приписывается коэффициенту  $C''_m$ , и оказывается выгоднее вводить избыточность на уровне  $Y_{oc}$ . Это приводит, в частности, к замене утроенного комплекта вычислительного оборудования на удвоенный комплект с контролем по МИП, при этом надежность всего вычислительного комплекса сохраняется. Насущной задачей развития МИП является определение классов помех, ошибок, отказов и сбоев, при которых применение именно этого метода дает максимальный выигрыш.

Бурно развивающаяся микроэлектроника является реальной технической основой для широкого применения методов введения избыточности на различных уровнях. Развитие аналитического

или формульного программирования позволяет автоматизировать преобразование исходных задач к избыточным задачам. Введение избыточности на уровне основных соотношений представляет интерес для различных вычислительных машин независимо от их принципа действия — для аналоговых и цифровых, для специализированных и универсальных, для цифровых дифференциальных анализаторов и для рекурсивных машин и т.д.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен и разработан метод избыточных переменных для контроля, диагностики и коррекции вычислительных процессов при решении конечных и обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве отдельных направлений следует указать на следующее.

1. Разработан способ синтеза гибких и жестких избыточных структур и доказана их эквивалентность исходным уравнениям.

2. Разработаны и исследованы способы контроля решений в избыточных структурах — линейный и нелинейный контроль, способ поворачивающейся плоскости, различные способы кодовой диагностики.

3. Разработаны и исследованы различные способы управления вычислительным процессом — алгебраическая коррекция, коррекция вперед и с помощью обратной связи, непрерывная, кодовая коррекция, коррекция с помощью перестройки гибких структур.

4. Исследована помехоустойчивость построенных избыточных структур при детерминированных и стохастических помехах, и показано, что в ряде случаев помехоустойчивость этих систем существенно повышается.

Произведено сравнение метода избыточных переменных с известными способами повышения надежности и точности, такими как резервирование, мажорирование и др. и показано, что МИП является их обобщением и развитием.



# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Лабораторная работа № 1

### Введение в библиотеку Simulink пакета MatLab. Моделирование динамических систем

**Цель:** познакомиться с основными инструментами библиотеки Simulink для моделирования динамических систем, заданных системой дифференциальных уравнений.

В качестве среды моделирования были выбраны математический пакет MatLab и его составная часть — библиотека Simulink, позволяющие значительно ускорить и упростить процесс моделирования, обладающие достаточной наглядностью для использования в образовательных целях и широтой возможностей для использования в исследовательских целях в разнообразных областях научной деятельности.

Познакомимся с интерфейсом обозревателя библиотеки Simulink.

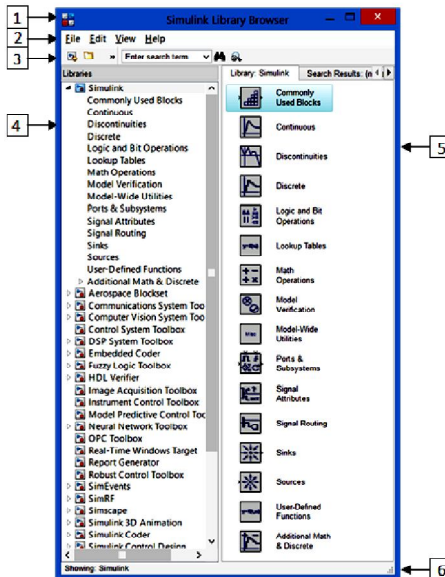






Рис. П1.1. Окно обозревателя библиотеки Simulink

Окно обозревателя библиотеки состоит из следующих элементов и областей:

1. Строка заголовка обозревателя Simulink Library Browser;
2. Меню обозревателя;
3. Панель инструментов с кнопками создания новой модели , открытия модели , поля для ввода поискового запроса  для поиска блока или подсистемы, кнопки запуска поиска  и кнопки настроек поиска ;
4. Перечень разделов библиотеки Simulink;
5. Окно содержимого библиотеки и разделов (при нажатии на конкретный раздел становятся доступными содержащиеся в нем блоки);

6. Строка состояния, содержащая также контекстные подсказки.

Библиотека Simulink состоит из нескольких разделов, на которые логичным образом разделены блоки:

1. Commonly Used Blocks — часто используемые блоки;
2. Continuous — аналоговые блоки;
3. Discontinuities — цифровые блоки;
4. Discrete — дискретные блоки;
5. Logic and Bit Operations — логические и битовые операторы;
6. Lookup Tables — вспомогательные таблицы;
7. Math Operations — математические операторы;
8. Model Verification — блоки, выполняющие верификацию модели, например, проверку динамических диапазонов;
9. Model-Wide Utilities — блоки линеаризации и сопровождения модели;
10. Ports & Subsystems — блоки входов/выходов, организации запуска, подсистем;
11. Signal Attributes — атрибуты сигналов;
12. Signal Routing — блоки маршрутизации сигналов;
13. Sinks — регистрирующие блоки;
14. Sources — источники сигналов;
15. User-Defined Function — функции, определяемые пользователем;
16. Additional Math & Discrete — дополнительные математические и дискретные блоки.

Для того, чтобы включить в модель тот или иной блок, его необходимо «перетащить» в окно создания модели, нажав и не отпуская левую кнопку мыши.

Более подробно о среде разработки MatLab и о библиотеке Simulink можно узнать в работе [47].

Рассмотрим простой **пример** моделирования свободных колебаний осциллятора в среде без сопротивления.

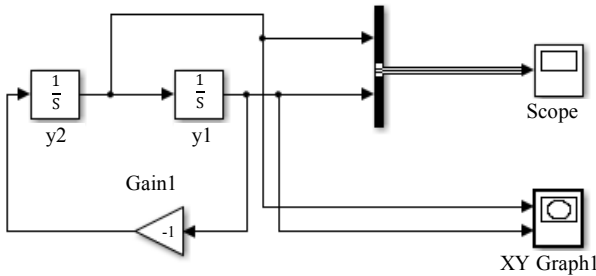
Система дифференциальных уравнений, моделирующая движение осциллятора, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1. \end{cases}$$

Для создания модели понадобятся следующие блоки (в скобках указан раздел, в котором находится данный блок):

- Integrator (Continuous) — интегрирующий блок;
- Gain (Math Operations) — усилитель, умножающий входной сигнал на постоянный коэффициент;
- Bus Creator (Signal Routing) — блок шинного формирователя;
- Scope (Sinks) — осциллограф;
- XY Graph (Sinks) — графопостроитель.

На рис. П1.2 показано, каким образом необходимо соединить данные блоки для создания модели движения осциллятора. Для создания соединительной линии нужно нажать левой клавишей мыши на выход соответствующего блока и протянуть соединительную линию к парному блоку.



*Рис. П1.2. Пример модели осциллятора*

Для корректной работы модели необходимо изменить параметры выбранных блоков. Для этого по блоку необходимо щелкнуть два раза левой клавишей мыши или, щелкнув правой, выбрать в выпадающем меню пункт Block Parameters.

Для блока Gain устанавливаем значение константы равным  $-1$  (параметр Gain), для блока Bus Creator значение параметра Number of inputs (количество входов) равным 2.

Выберем начальные условия  $y_{10}$  и  $y_{20}$ . Воспроизводимая функция в данном случае:

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2.$$

Начальные условия  $y_{10}$  и  $y_{20}$  выберем исходя из этого соотношения. Для случая  $R = 1$  это могут быть значения  $y_{10} = 1$  и  $y_{20} = 0$ .

Изменим параметр Initial condition (начальное значение) для первого интегратора на 1 и для второго на 0.

Установим интервал моделирования (время расчета модели) равным 100.

При помощи осциллятора Scope можно наблюдать за изменениями вычисляемых величин в процессе работы модели. Для этого его нужно запустить двойным щелчком левой клавиши мыши. Запуск графопостроителя XY Graph производится автоматически.

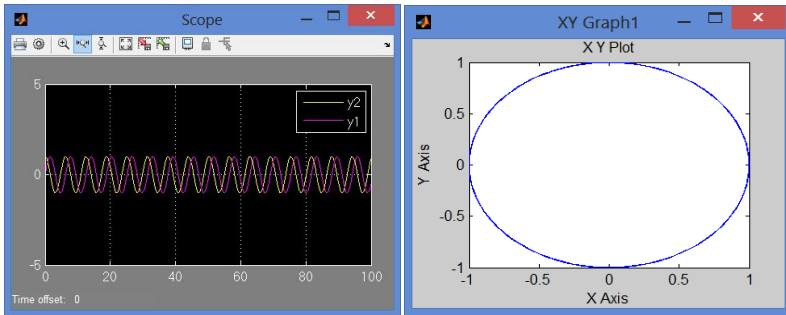
Для того, чтобы выбрать численный метод решения системы дифференциальных уравнений, необходимо в пункте меню Simulation выбрать Model Configuration Parameters, выбрать тип шага дискретизации (способ моделирования Type — постоянный/переменный) и метод расчета.

В системе представлены следующие методы численного интегрирования:

1. метод Эйлера [45];
2. метод Heun [3];
3. метод Dormand-Prince [44];
4. метод Рунге-Кутты [46];
5. метод трапеций [46];
6. метод Розенброка [45];
7. метод Bogacki-Shampine [43].

Укажем значение постоянного шага дискретизации равным 0,05. В качестве метода выберем ode4 (Рунге-Кутты).

Графики, полученные при помощи инструментов Scope и XY Graph, представлены на рис. П1.3.



**Рис. П1.3.** Графики, иллюстрирующие работу модели осциллятора

Задание: постройте модель, описанную системой дифференциальных уравнений. Сравните работу модели с применением различных численных методов (не менее 3-х методов) и значений шага дифференцирования (не менее 2-х значений), в том числе и методов с переменным шагом (не менее 2-х методов). Исследуйте модель при различных начальных условиях и коэффициентах.

Системы для моделирования:

1. Модель «хищник-жертва» Вольтерры-Лотки

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta x) \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x) \end{cases}'$$

где  $\alpha$  — скорость роста жертв,  $\gamma$  — скорость убыли хищников,  $\beta$ ,  $\delta$  — скорости взаимодействия популяций.

2. Аттрактор Лоренца, который может описывать конвекцию морской воды в плоском слое, конвекцию в замкнутой петле, вращение водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный гармонический осциллятор с инерционной нелинейностью

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

Исследуйте поведение системы при следующих значениях параметров

$\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ , для  $r = 0.3, 1.8, 3.7, 10, 16, 24.06, 28, 100$ .

3. Аттрактор Рёсслера — модель, возникшая при описании динамики химических реакций, протекающих в некоторой смеси с перемешиванием

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

Исследуйте поведение системы при значениях параметров  $a = b = 0.2, 2.6 \leq c \leq 4.2$ , при  $c = 4.5$ .

4. Тримолекулярная модель (брюсселятор), описывающая химические реакции

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b + 1)x + x^2y \\ \frac{dy}{dt} = bx + x^2y \end{cases}$$

Исследуйте поведение системы при  $a = 0.7, b = 3$ .

### Контрольные вопросы:

1. Каким образом устанавливаются начальные значения при решении систем дифференциальных уравнений?
2. Какой из выбранных вами методов дал наиболее приемлемое решение при одинаковых начальных условиях и шаге дискретизации?
3. Каким образом устанавливается численный метод?
4. Каким образом устанавливается интервал моделирования?
5. При помощи каких блоков можно получить графическое отображение результатов моделирования?

## Лабораторная работа № 2

### Создание систем уравнений с неопределенными коэффициентами

**Цель:** изучить метод создания системы с неопределенными коэффициентами.

**Внимание:** перед выполнением лабораторной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом § 2 данного учебного пособия.

**Пример 1.** Система уравнений с неопределенными коэффициентами для моделирования осциллятора.

В качестве **первого** примера используем систему дифференциальных уравнений, моделирующую движение осциллятора.

Воспроизводимая функция в данном случае:

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2. \quad (\text{П2.1})$$

Зададим произвольные коэффициенты, число которых в данном случае  $C_2^2 = 1$ ,  $u_1 = |12|$ . Эта запись означает, что коэффициент  $u_1$  соответствует сочетанию 12. Коэффициент  $u_1$  будет входить в обе строки расширенной системы, так как в соответствующей ему записи есть цифры 1 и 2. Расставим знаки перед членами уравнений системы. Для членов уравнений первой строки нет нарушений порядка (цифра 1 стоит на первом месте в сочетании 12), для членов уравнений второй строки имеем нечетное нарушение порядка 21, так что члены уравнений второй строки с данным неопределенным коэффициентом будут со знаком «-».

Эквивалентная данному уравнению система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = u_1 D_2^1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 D_1^2 \end{cases} \quad (\text{П2.2})$$

где буквой  $D$  обозначена сумма из произведений частных производных от функции (П2.1) по переменным, индексы которых входят в нижний индекс у буквы  $D$ :

$$D_1 = \frac{\partial F}{\partial y_1}, D_2 = \frac{\partial F}{\partial y_2}.$$

Верхний индекс у буквы  $D$  означает строку.  
 Т.е. система примет следующий вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2u_1y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -2u_1y_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = u_1y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1y_1 \end{cases}$$

### Пример 2.

В качестве **второго** примера используем систему из двух уравнений, количество переменных в которой равно 5.

$$\begin{cases} A_1^1E_1 + A_2^1E_2 + A_3^1E_3 + A_4^1E_4 + A_5^1E_5 = 0 \\ A_1^2E_1 + A_2^2E_2 + A_3^2E_3 + A_4^2E_4 + A_5^2E_5 = 0 \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

$$n = 5, m = 2, S = C_n^{m+1} = 10.$$

Соответствующие неопределенным коэффициентам сочетания указаны в табл. П2.1.

Таблица П2.1

#### Сочетания

$u_n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
сочетание	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345

Коэффициенты, которые соответствуют сочетаниям, содержащим 1, располагаются в первой строке системы уравнений; коэффициенты, которые соответствуют сочетаниям, содержащим 2, располагаются во второй строке и т.д., то есть

$$\begin{cases} E_1 = u_1D_{23}^1 + u_2D_{24}^1 + u_3D_{25}^1 + u_4D_{34}^1 + u_5D_{35}^1 + u_6D_{45}^1 \\ E_2 = -u_1D_{13}^2 - u_2D_{14}^2 - u_3D_{15}^2 + u_7D_{34}^2 + u_8D_{35}^2 + u_9D_{45}^2 \\ E_3 = u_1D_{12}^3 - u_4D_{14}^3 - u_5D_{15}^3 - u_7D_{24}^3 - u_8D_{25}^3 + u_{10}D_{45}^3 \\ E_4 = u_2D_{12}^4 + u_4D_{13}^4 - u_6D_{15}^4 + u_7D_{23}^4 - u_9D_{25}^4 - u_{10}D_{35}^4 \\ E_5 = u_3D_{12}^5 + u_5D_{13}^5 + u_6D_{14}^5 + u_8D_{23}^5 + u_9D_{24}^5 + u_{10}D_{34}^5 \end{cases}, \quad (\text{П2.4})$$



где буквой  $D$  обозначена сумма из произведений частных производных от функции (П2.3) по переменным, индексы которых входят в нижний индекс у буквы  $D$ :

$$D_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \quad \text{и т.д.}$$

Верхний индекс у буквы  $D$  означает строку.

Знаки перед членами уравнений (П2.4) определяются по следующему закону: рассматривается порядок верхних и нижних индексов у буквы  $D$ , например, против часовой стрелки, и если имеется нечетное число нарушений порядка, то перед этим членом ставится минус, в других случаях ставится плюс. То есть для членов верхней строки имеем порядки: 123, 124, 134 — в них нет нарушений, и они идут с плюсом; во второй строке имеем 213 — одно нарушение (2 больше 1) — знак минус, 214 — знак минус, 234 — нарушений нет — знак плюс, и т.д.

### Задание 1.

Рассчитайте количество неопределенных коэффициентов по формуле

$$S = C_n^{m+1},$$

где  $m$  — количество контрольных соотношений,  $n$  — количество исходных переменных.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m$	1	1	2	2	3	4	4	5	6
$n$	2	3	4	5	7	5	6	7	9

### Задание 2.

Составьте систему уравнений с неопределенными коэффициентами для следующих случаев:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m$	1	1	2	3	1	2	3	4	5
$n$	3	4	4	4	5	5	5	5	6

### **Контрольные вопросы:**

1. Является ли система уравнений с неопределенными коэффициентами эквивалентной исходному уравнению (исходной системе уравнений)?
2. Каким образом определяются знаки перед членами уравнений с неопределенными коэффициентами?
3. Каким образом можно использовать неопределенные коэффициенты при моделировании?
4. По какому правилу распределяются неопределенные коэффициенты в уравнениях системы?

## **Лабораторная работа № 3**

### **Моделирование динамических систем при помощи МИП. Контроль по воспроизводимой функции**

**Цель:** познакомиться с возможностями контроля и коррекции по воспроизводимой функции при помощи метода избыточных переменных.

**Внимание:** перед выполнением лабораторной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом § 6 данного учебного пособия.

Рассмотрим инструменты библиотеки Simulink, которые можно использовать при выполнении данной лабораторной работы.

В скобках указан раздел библиотеки Simulink, в котором находится данный блок/инструмент.

1. Constant (Sources) — источник постоянного сигнала. Для изменения значения сигнала достаточно двойным щелчком мыши по блоку вызвать окно параметров блока и изменить параметр Constant value.

2. Subsystem (Ports & Subsystems) — блок создания подсистемы. Начать работу с данным блоком можно двумя способами:

- выделив в модели те блоки, которые необходимо сгруппировать в подсистему, нажать правой клавишей мыши на выбранном фрагменте модели, выбрать команду Create Subsystem в появившемся меню; входы и выходы подсистемы будут созданы автоматически;

- выбрать блок Subsystem (Ports & Subsystems) и перетащить его в окно создания модели; в результате получим подсистему с одним входом и одним выходом; для того, чтобы добавить вход/выход, необходимо перетащить в подсистему блок In 1 (Sources)/Out 1 (Sinks); необходимое количество портов системы появится автоматически.

3. Fcn (User-Defined Functions) — блок, позволяющий задать вычисляемое выражение в стиле языка программирования С. Для задания выражения нужно щелкнуть дважды по блоку левой клавишей мыши и вписать выражение в поле Expression. Например, так:  $u(1)*u(2) + u(3)*u(4) - u(5)$ .

4. Product (Math Operations) — блок, перемножающий входные значения.

5. Sum (Math Operations) — блок, выполняющий суммирование или вычитание входных сигналов.

6. Display (Sinks) — блок, отображающий числовое значение сигнала на входе.

7. Mux (Signal Routing) — блок, объединяющий в вектор входные сигналы.

**Пример: моделирование движения осциллятора.**

Если известна воспроизводимая функция, контроль и коррекцию модели удобно производить по ней. В качестве примера рассмотрим модель осциллятора с контролем и коррекцией по воспроизводимой функции.

Воспроизводимая функция в данном случае:

$$y_1^2 + y_2^2 = R^2. \tag{ПЗ.1}$$

Введем в качестве сигнала ошибки новую переменную

$$y_1^2 + y_2^2 - R^2 = y_3. \tag{ПЗ.2}$$

После дифференцирования будем иметь

$$2y_1 dy_1 + 2y_2 dy_2 - dy_3 = 0. \tag{ПЗ.3}$$

Эквивалентная уравнению (ПЗ.3) система дифференциальных уравнений будет иметь вид (см. § 2):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = u_1 2y_2 - u_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 2y_1 - u_3, \\ \frac{dy_3}{dt} = -u_2 2y_1 - u_3 2y_2. \end{cases} \quad (\text{ПЗ.4})$$

Величина  $y_3$  подсчитывается в контрольном органе по формуле (ПЗ.2), она известна, и ее можно использовать для коррекции, назначив неопределенные коэффициенты  $u_2$  и  $u_3$  таким образом, чтобы  $y_3 \rightarrow 0$ .

Это осуществимо, если положить

$$u_2 = y_3 2y_1 \alpha, \quad u_3 = y_3 2y_2 \alpha. \quad (\text{ПЗ.5})$$

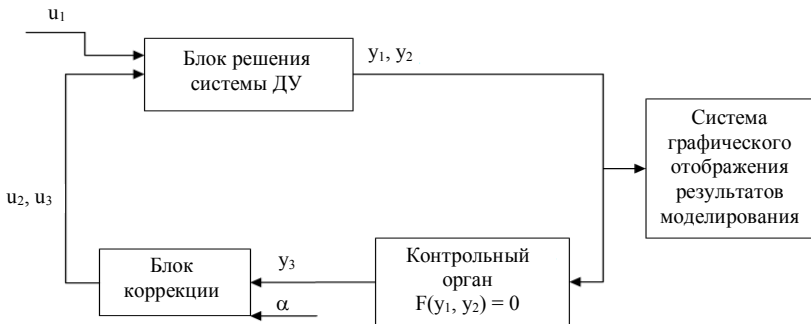
В системе с коррекцией по воспроизводимой функции будут решаться уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = u_1 2y_2 - 2y_3 y_1 \alpha, \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 2y_1 - 2y_3 y_2 \alpha \end{cases} \quad (\text{ПЗ.6})$$

с начальными условиями  $y_{10}$  и  $y_{20}$ , при которых  $F(y_{10}, y_{20}) = 0$ .

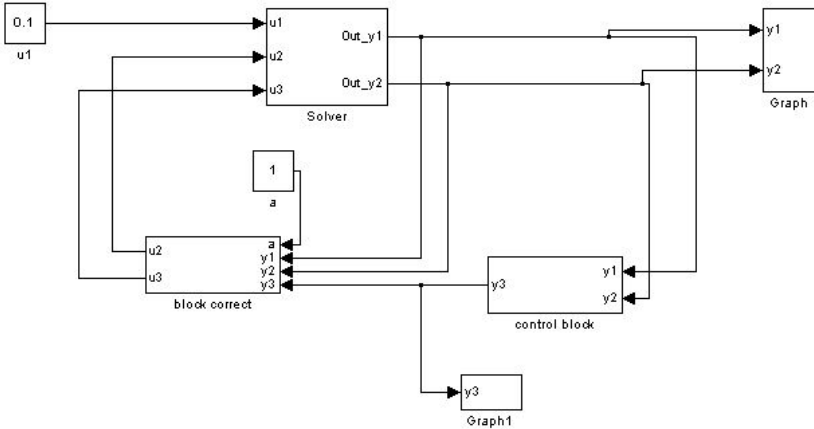
Последнее уравнение системы (ПЗ.4) прямо не рассматривается в системе. При подстановке в него (ПЗ.5) видно, что  $y_3 \rightarrow 0$  при  $\alpha > 0$ . С помощью коэффициента  $u_1$  задается скорость и направление движения по заданной траектории  $F(y_1, y_2) = 0$ .

Схема модели, реализующей систему с коррекцией, представлена на рис. ПЗ.1.



**Рис. ПЗ.1. Схема модели осциллятора**

Модель расширенной системы дифференциальных уравнений (ПЗ.6), где в качестве контрольного условия использовано уравнение (ПЗ.2), представлена на рис. ПЗ.2.

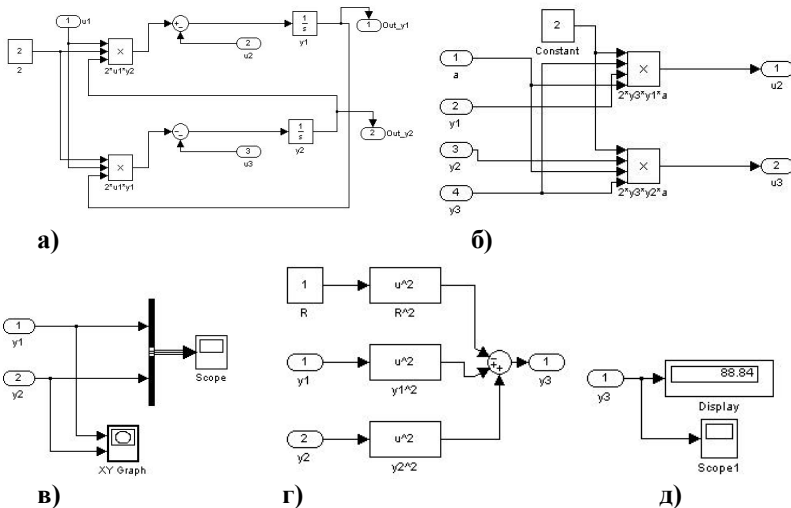


**Рис. ПЗ.2. Модель осциллятора в Simulink**

На рис. ПЗ.2:

1. Подсистема Solver — блок решения системы уравнений (ПЗ.6)
2. Подсистемы Graph и Graph1 — подсистемы графического отображения результатов моделирования.
3. Подсистема Control Block — контрольный орган.
4. Подсистема Block correct — блок коррекции, вырабатывающий корректирующий сигнал.

Данные подсистемы приведены на рис. ПЗ.3.



**Рис. ПЗ.3. Подсистемы модели осциллятора:**

**а) блок решения системы уравнений Solver; б) блок коррекции Block correct; в) блок графического вывода Graph; г) контрольный орган Control Block; д) блок графического вывода Graph1**

Рассмотрим подробнее создание подсистемы Solver.

На вход подсистемы подается три сигнала:  $u_1$  и два управляющих сигнала, вычисляемых в подсистеме Block correct —  $2u_3 y_1 \alpha$  и  $2u_3 y_2 \alpha$ . Для вычисления системы дифференциальных уравнений необходимы два интегратора, два блока Sum и два блока Product.

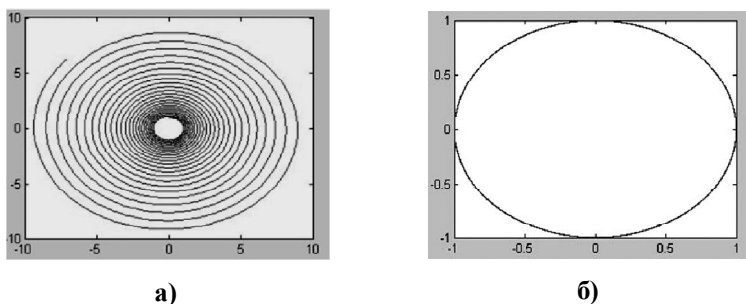
Для корректного выполнения работы модели необходимо в блоках Integrator установить начальные значения вычисляемых величин  $y_1$  и  $y_2$  (см. Лабораторная работа 1). Они должны удовлетворять условию (ПЗ.1). При  $R = 1$  это могут быть, например,  $y_1 = 1$  и  $y_2 = 0$ . Установим эти значения. Для этого двойным щелчком мыши по первому блоку Integrator откроем окно параметров блока и в поле Initial condition установим значение 1. Соответственно изменим начальное значение для  $y_2$ .

Для непосредственного наблюдения за результатами прямо во время работы модели создадим подсистему Graph1, на вход

которой подадим сигнал ошибки  $e$ , который будем выводить двумя способами: при помощи осциллографа Scope1 (для построения графика зависимости от времени) и при помощи цифрового дисплея Display, выводящего числовое значение сигнала (см. Лабораторная работа 1).

Для того, чтобы рассмотреть решение данной системы уравнений различными численными методами с различным шагом дискретизации, необходимо в пункте меню Simulation выбрать Model Configuration Parameters, далее указать тип численного метода (с постоянным шагом дискретизации Fixed-step или с переменным Variable-step) и сам метод.

На рис. ПЗ.4 приведены графики зависимости  $y_2$  от  $y_1$  для моделей с коррекцией и без. В качестве численного использовался метод Эйлера [46] с шагом дискретизации 0,5.



*Рис. ПЗ.4. Графики зависимости  $y_2$  от  $y_1$  (метод Эйлера с шагом дискретизации 0,5) без коррекции (а) и с коррекцией (б)*

**Задание.** Постройте расширенную систему дифференциальных уравнений и создайте модель при помощи библиотеки Simulink математического пакета MatLab для приведенных ниже плоских кривых. Контроль и коррекцию осуществляйте по воспроизводимой функции, для этого подберите такой параметр  $\alpha$ , чтобы сигнал ошибки  $y_3$  был минимальным. Рассмотрите различные численные методы решения и различные шаги дискретизации. Приведите графики зависимости  $y_1$  от  $y_2$ , а также  $y_1$  и  $y_2$  от времени, а также величину ошибки для систем с коррекцией и без. Ответьте на контрольные вопросы.

Плоские кривые для моделирования:

1. Декартов лист:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

2. Офиурида:

$$x(x^2 + y^2) - y(cy - bx) = 0;$$

3. Трисектриса Маклорена:

$$x(x^2 + y^2) - a(y^2 - 3x^2) = 0;$$

4. Улитка Паскаля:

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0;$$

5. Кардиоида:

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0;$$

6. Кривая Штейнера:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8rx(x^2 + y^2) + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^4 = 0;$$

7. Астроида:

$$(x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27R^2x^2y^2 = 0;$$

8. Лемниската Буга:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 + b^2y^2 = 0;$$

9. Овал Кассини:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) - a^4 + c^4 = 0;$$

10. Лемниската Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

### Контрольные вопросы:

1. Каким образом должны быть назначены неопределенные коэффициенты, чтобы величина сигнала ошибки стремилась к 0?

2. Для чего можно использовать коэффициент  $u_1$  в системе, рассмотренной в примере?

3. Каким образом можно использовать для построения цепей коррекции априорной информации о частных производных исходной системы уравнений (исходного уравнений)?

4. Каким образом МИП можно использовать для численного решения нелинейных уравнений (систем нелинейных уравнений)?

5. В чем отличие отрицательной обратной связи от положительной обратной связи? Для достижения каких целей можно их использовать? Каким образом необходимо назначить неопределенные коэффициенты, чтобы организовать каждый из этих видов обратной связи?



6. Каким образом можно осуществить переход от реального времени к машинному и обратно при моделировании?

7. Какой метод численного интегрирования из использованных вами позволяет добиться наибольшей точности без использования коррекции? С коррекцией?

8. При каком шаге интегрирования из использованных вами была достигнута наибольшая точность при работе модели с коррекцией?

## Лабораторная работа № 4

### Контроль и коррекция модели поверхности второго порядка

**Цель:** рассмотреть возможности применения метода избыточных переменных для контроля и коррекции при моделировании поверхностей второго порядка.

**Внимание:** перед выполнением лабораторной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом § 4, 6 данного учебного пособия.

Контроль и коррекцию моделей поверхности второго порядка рассмотрим на примере модели сферы.

**Пример 1:** модель сферы с одним контрольным условием.

Воспроизводимая функция в данном случае:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2. \quad (\text{П4.1})$$

Введем в качестве сигнала ошибки новую переменную

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - R^2 = y_4. \quad (\text{П4.2})$$

После дифференцирования будем иметь

$$2y_1 dy_1 + 2y_2 dy_2 + 2y_3 dy_3 - dy_4 = 0. \quad (\text{П4.3})$$

Эквивалентная уравнению (П4.3) система дифференциальных уравнений (см. Лабораторная работа 2) будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = u_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} + u_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} - u_3, \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + u_4 \frac{\partial F}{\partial y_3} - u_5, \\ \frac{dy_3}{dt} = -u_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} - u_4 \frac{\partial F}{\partial y_2} - u_6, \\ \frac{dy_4}{dt} = -u_3 \frac{\partial F}{\partial y_1} - u_5 \frac{\partial F}{\partial y_2} - u_6 \frac{\partial F}{\partial y_3}. \end{array} \right. \quad (\text{П4.4})$$

Величина  $y_4$  подсчитывается в контрольном органе по формуле (П4.2), она известна и ее можно использовать для коррекции, назначив неопределенные коэффициенты  $u_3$ ,  $u_5$  и  $u_6$  таким образом, чтобы  $y_4 \rightarrow 0$ .

Это осуществимо, если положить

$$u_3 = y_4 \frac{\partial F}{\partial y_1} \alpha, \quad u_5 = y_4 \frac{\partial F}{\partial y_2} \alpha, \quad u_6 = y_4 \frac{\partial F}{\partial y_3} \alpha. \quad (\text{П4.5})$$

В системе с коррекцией по воспроизводимой функции будут решаться уравнения:

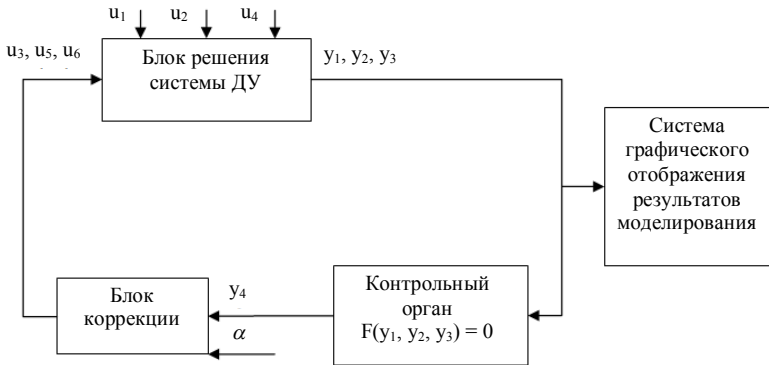
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = u_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} + u_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} - y_4 \frac{\partial F}{\partial y_1} \alpha, \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + u_4 \frac{\partial F}{\partial y_3} - y_4 \frac{\partial F}{\partial y_2} \alpha, \\ \frac{dy_3}{dt} = -u_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} - u_4 \frac{\partial F}{\partial y_2} - y_4 \frac{\partial F}{\partial y_3} \alpha, \end{array} \right. \quad (\text{П4.6})$$

с начальными условиями  $y_{10}$ ,  $y_{20}$  и  $y_{30}$ , при которых  $F(y_{10}, y_{20}, y_{30}) = 0$ .

Последнее уравнение системы (П4.4) прямо не рассматривается. При подстановке в него (П4.5) видно, что  $y_4 \rightarrow 0$  при  $\alpha > 0$ . С помощью коэффициентов  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_4$  задается скорость и направление движения по заданной траектории

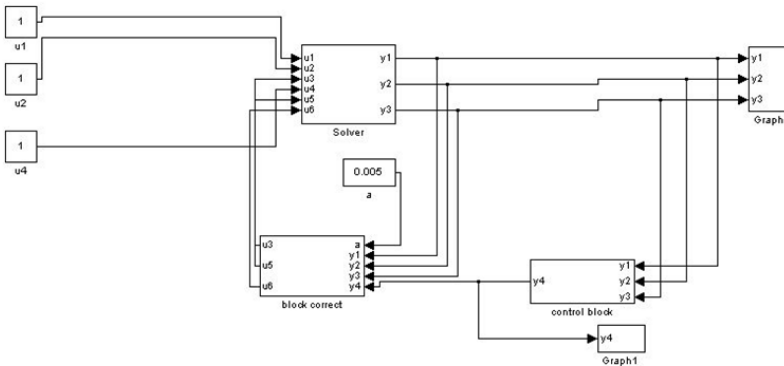
$$F(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Схема модели, реализующей систему с коррекцией, представлена на рис. П4.1.



**Рис. П4.1. Схема модели сферы**

Модель расширенной системы дифференциальных уравнений (П4.6), эквивалентной уравнению (П4.1), где в качестве контрольного условия использовано уравнение (П4.2), представлена на рис. П4.2.



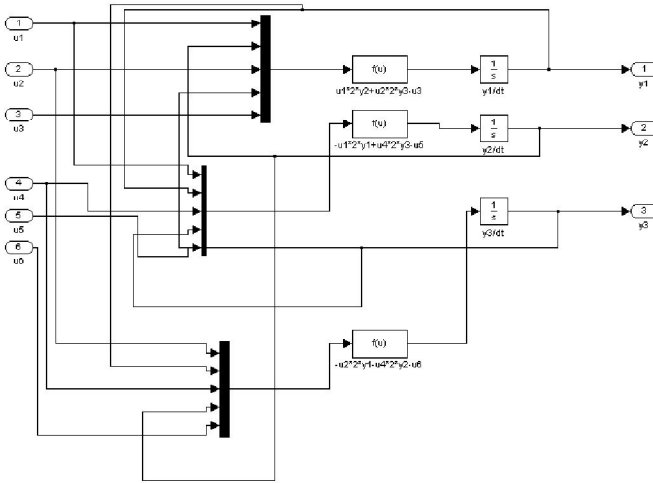
**Рис. П4.2. Модель сферы в Simulink**

На схеме рис. П4.2:

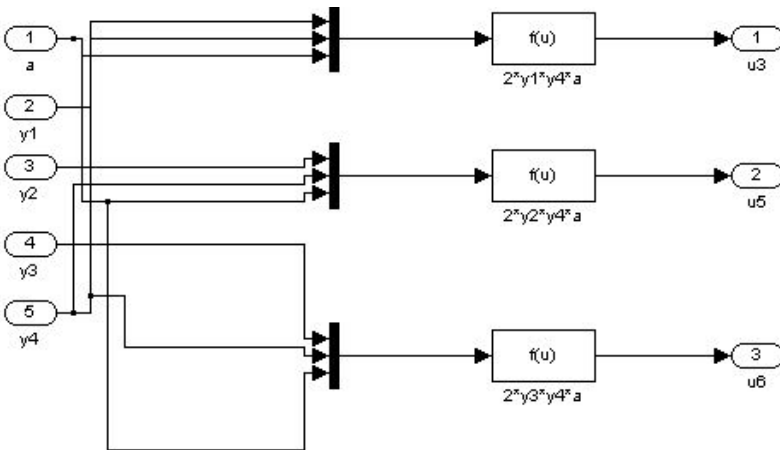
- Подсистема Solver — блок решения системы уравнений (П4.6).
- Подсистемы Graph и Graph1 — подсистемы графического отображения результатов моделирования.

- Подсистема Control Block — контрольный орган.
- Подсистема Block correct — блок коррекции, вырабатывающий корректирующий сигнал.

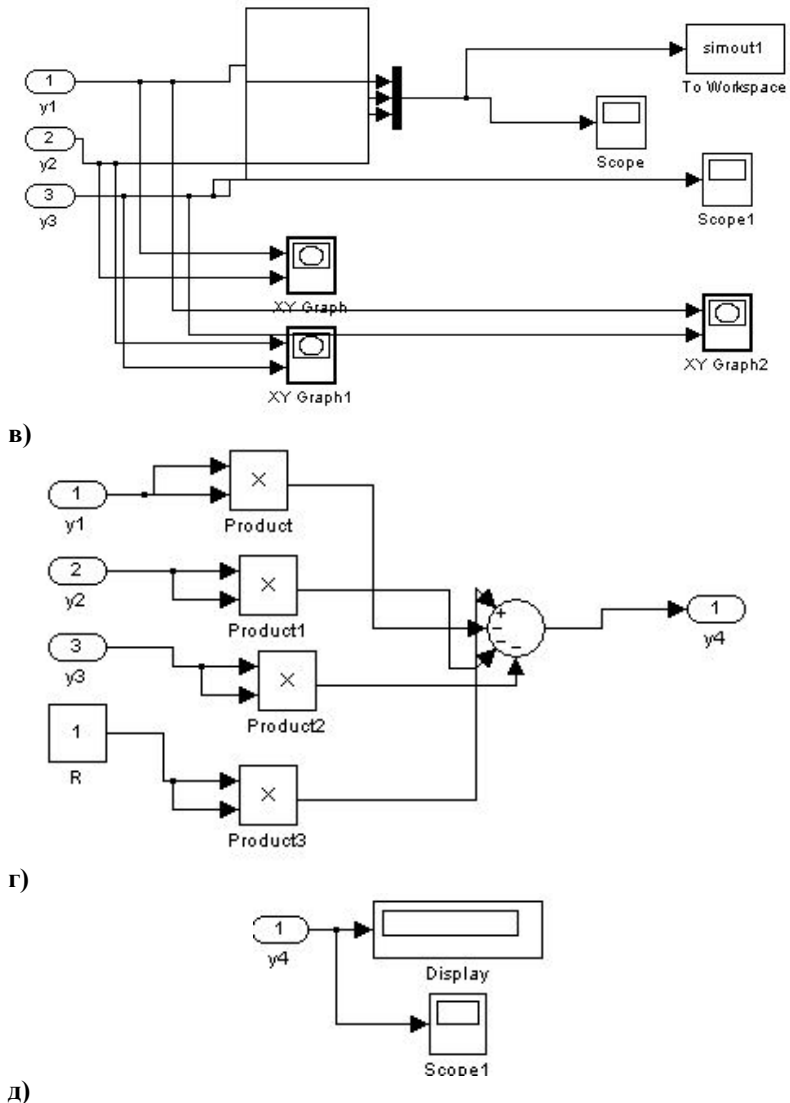
Данные подсистемы приведены на рис. 3. Необходимые инструменты библиотеки Simulink системы MatLab описаны в Лабораторной работе 1 и Лабораторной работе № 3.



a)

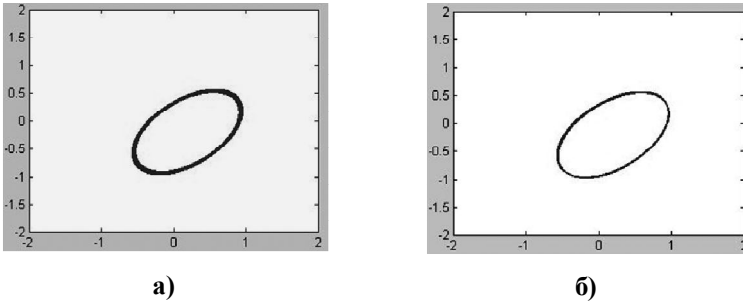


b)



**Рис. П4.3. Подсистемы модели сферы: а) блок решения системы уравнений Solver; б) блок коррекции Block correct; в) блок графического вывода Graph; г) контрольный орган Control Block; д) блок графического вывода Graph1**

На рис. П4.4 приведены примеры зависимости от для систем с коррекцией и без. В качестве численного метода использован метод Bogacki-Shampine [42] с шагом дискретизации 0,5.



**Рис. П4.4. Графики зависимости  $u_2$  от  $u_1$  без коррекции (а) и с коррекцией (б)**

Как видно на графиках рис. П4.4, несмотря на значительное уменьшение сигнала ошибки, при помощи одного контрольного условия не удастся полностью контролировать движение точки по заданной траектории. Для того чтобы достигнуть желаемого эффекта, необходимо, например, добавить еще одно контрольное условие.

**Пример 2:** модель сферы с двумя контрольными условиями.

В качестве второго контрольного условия можно выбрать уравнение плоскости

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + D = 0. \quad (\text{П4.7})$$

Введем в качестве сигнала ошибки новые переменные

$$(\text{П4.8})$$

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + D = y_5. \quad (\text{П4.9})$$

В данном случае количество неопределенных коэффициентов будет равно 10, и система дифференциальных уравнений будет иметь вид (см. Лабораторная работа 2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = u_1 D_{23}^1 + u_2 D_{24}^1 + u_3 D_{25}^1 + u_4 D_{34}^1 + u_5 D_{35}^1 + u_6 D_{45}^1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 D_{13}^2 - u_2 D_{14}^2 - u_3 D_{15}^2 + u_7 D_{34}^2 + u_8 D_{35}^2 + u_9 D_{45}^2 \\ \frac{dy_3}{dt} = u_1 D_{12}^3 - u_4 D_{14}^3 - u_5 D_{15}^3 - u_7 D_{24}^3 - u_8 D_{25}^3 + u_{10} D_{45}^3 \\ \frac{dy_4}{dt} = u_2 D_{12}^4 + u_4 D_{13}^4 - u_6 D_{15}^4 + u_7 D_{23}^4 - u_9 D_{25}^4 - u_{10} D_{35}^4 \\ \frac{dy_5}{dt} = u_3 D_{12}^5 + u_5 D_{13}^5 + u_6 D_{14}^5 + u_8 D_{23}^5 + u_9 D_{24}^5 + u_{10} D_{34}^5, \end{array} \right. \quad (\text{П4.10})$$

где  $D_{12} = 2y_1 B - 2y_2 A$ ,  $D_{13} = 2y_1 C - 2y_3 A$ ,  $D_{14} = A$ ,  $D_{15} = -2y_1$ ,  
 $D_{23} = 2y_2 C - 2y_3 B$ ,  $D_{24} = B$ ,  $D_{25} = -2y_2$ ,  $D_{34} = c$ ,  $D_{35} = -2y_3$ ,  
 $D_{45} = 1$ .

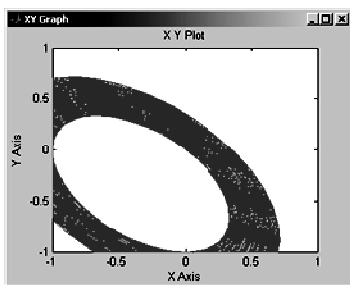
Положим  $u_6 = u_9 = u_{10} = 0$ , а  $u_2 = -y_4 D_{12}^4 \alpha$ ,  $u_4 = -y_4 D_{13}^4 \alpha$ ,  
 $u_7 = -y_4 D_{23}^4 \alpha$ ,  $u_3 = -y_5 D_{12}^5 \beta$ ,  $u_5 = -y_5 D_{13}^5 \beta$ ,  $u_8 = -y_5 D_{23}^5 \beta$ .

С помощью коэффициента  $u_1$  задается скорость и направление движения по заданной траектории.

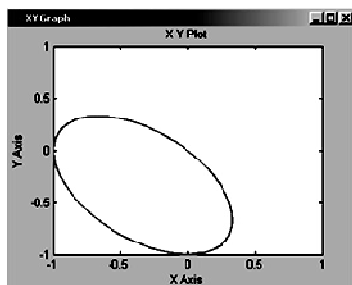
В системе с коррекцией будут решаться уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = u_1 D_{23}^1 - y_4 D_{12}^4 \alpha D_{24}^1 - y_5 D_{12}^5 \beta D_{25}^1 - y_4 D_{13}^4 \alpha D_{34}^1 - y_5 D_{13}^5 \beta D_{35}^1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 D_{13}^2 + y_4 D_{12}^4 \alpha D_{14}^2 + y_5 D_{12}^5 \beta D_{15}^2 - y_4 D_{23}^4 \alpha D_{34}^2 - y_5 D_{23}^5 \beta D_{35}^2, \\ \frac{dy_3}{dt} = u_1 D_{12}^3 + y_4 D_{13}^4 \alpha D_{14}^3 + y_5 D_{13}^5 \beta D_{15}^3 + y_4 D_{23}^4 \alpha D_{24}^3 + y_5 D_{23}^5 \beta D_{25}^3. \end{array} \right. \quad (\text{П4.11})$$

Как видно на графиках рис. П4.5, применение двух контрольных условий позволяет не только значительно снизить величину ошибки, но и удерживать точку на заданной траектории.



а)



б)

**Рис. П4.5.** Графики зависимости  $y_2$  от  $y_1$  (метод Рунге с шагом дискретизации 0,05) без коррекции (а) и с коррекцией

**Задание.** Постройте расширенную систему дифференциальных уравнений с двумя контрольными условиями и создайте модель при помощи библиотеки Simulink математического пакета MatLab для приведенных ниже поверхностей. Для осуществления коррекции подберите такие параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы сигналы ошибок  $y_3$  и  $y_4$  были минимальными. Рассмотрите различные численные методы решения и различные шаги дискретизации. Приведите графики зависимости  $y_1$  от  $y_2$ , а также  $y_1$  и  $y_2$  от времени, а также величину ошибки для систем с коррекцией и без. Ответьте на контрольные вопросы.

Поверхности второго порядка для моделирования:

1. Эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ где } a, b, c \text{ — полуоси};$$

2. Однополостной гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ где } c \text{ — действительная полуось, } a \text{ и } b \text{ —}$$

мнимые полуоси;

3. Двуполостной гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \text{ где } c \text{ — действительная полуось, } a \text{ и } b \text{ —}$$

мнимые полуоси;



4. Конус:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ , вершина конуса в начале координат, направляющая кривая — эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , плоскость которого находится на расстоянии  $c$  от начала координат;

5. Эллиптический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z;$$

6. Гиперболический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z;$$

7. Эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ } a \text{ и } b \text{ — полуоси};$$

8. Гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

9. Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px, \text{ } p \text{ — фокальный параметр.}$$

### Контрольные вопросы:

1. В чем отличие первичных ошибок от вторичных?
2. Почему на избыточную систему действует больше помех, чем на исходную?
3. Каким образом должны быть расположены контрольные плоскости для определения ошибок?
4. Каким образом при помощи линейных контрольных условий можно осуществить локализацию ошибки?
5. Какой метод численного интегрирования из использованных вами позволяет добиться наибольшей точности без использования коррекции? С коррекцией?
6. При каком шаге интегрирования из использованных вами была достигнута наибольшая точность при работе модели с коррекцией?
7. Почему использование одного контрольного условия не позволяет сохранить траекторию точки на поверхности?
8. Почему использование двух линейных контрольных условий лучше позволяет сохранить траекторию точки, по сравнению с одним линейным контрольным условием?

## Лабораторная работа № 5

### Контроль и коррекция модели поверхности второго порядка с применением нелинейного контрольного условия

**Цель:** рассмотреть возможности использования нелинейного условия для контроля и коррекции при моделировании поверхностей второго порядка.

**Внимание:** перед выполнением лабораторной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом § 4, 6 данного учебного пособия.

Создание модели с контролем и коррекцией рассмотрим на примере модели сферы.

**Пример:** модель сферы с нелинейным контрольным условием. Воспроизводимая функция в данном случае:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2. \quad (\text{П5.1})$$

Введем в качестве сигнала ошибки новые переменные

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - R^2 = y_4, \quad (\text{П5.2})$$

$$Ay_1^2 + By_2^2 + Cy_3 + D = y_5. \quad (\text{П5.3})$$

В данном случае количество неопределенных коэффициентов будет равно 10, и система дифференциальных уравнений будет иметь вид (см. Лабораторная работа № 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = u_1 D_{23}^1 + u_2 D_{24}^1 + u_3 D_{25}^1 + u_4 D_{34}^1 + u_5 D_{35}^1 + u_6 D_{45}^1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 D_{13}^2 - u_2 D_{14}^2 - u_3 D_{15}^2 + u_7 D_{34}^2 + u_8 D_{35}^2 + u_9 D_{45}^2 \\ \frac{dy_3}{dt} = u_1 D_{12}^3 - u_4 D_{14}^3 - u_5 D_{15}^3 - u_7 D_{24}^3 - u_8 D_{25}^3 + u_{10} D_{45}^3 \\ \frac{dy_4}{dt} = u_2 D_{12}^4 + u_4 D_{13}^4 - u_6 D_{15}^4 + u_7 D_{23}^4 - u_9 D_{25}^4 - u_{10} D_{35}^4 \\ \frac{dy_5}{dt} = u_3 D_{12}^5 + u_5 D_{13}^5 + u_6 D_{14}^5 + u_8 D_{23}^5 + u_9 D_{24}^5 + u_{10} D_{34}^5, \end{array} \right. \quad (\text{П5.4})$$

где  $D_{12} = 4y_1y_2B - 4y_1y_2A$ ,  $D_{13} = 2y_1C - 4y_1y_3A$ ,

$$D_{14} = 2y_1A, \quad D_{15} = -2y_1, \quad D_{23} = 2y_2C - 4y_2y_3B, \quad (\text{П5.5})$$

$$D_{24} = 2By_2, \quad D_{25} = -2y_2, \quad D_{34} = c, \quad D_{35} = -2y_3, \quad D_{45} = 1.$$

Положим  $u_6 = u_9 = u_{10} = 0$ , а  $u_2 = -y_4 D_{12}^4 \alpha$ ,  $u_4 = -y_4 D_{13}^4 \alpha$ ,  $u_7 = -y_4 D_{23}^4 \alpha$ ,  $u_3 = -y_5 D_{12}^5 \beta$ ,  $u_5 = -y_5 D_{13}^5 \beta$ ,  $u_8 = -y_5 D_{23}^5 \beta$ .

С помощью коэффициента  $u_1$  задается скорость и направление движения по заданной траектории.

В системе с коррекцией будут решаться уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = u_1 D_{23}^1 + y_4 D_{12}^4 \alpha D_{24}^1 - y_5 D_{12}^5 \beta D_{25}^1 - y_4 D_{13}^4 \alpha D_{34}^1 - y_5 D_{13}^5 \beta D_{35}^1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -u_1 D_{13}^2 + y_4 D_{12}^4 \alpha D_{14}^2 + y_5 D_{12}^5 \beta D_{15}^2 - y_4 D_{23}^4 \alpha D_{34}^2 - y_5 D_{23}^5 \beta D_{35}^2 \\ \frac{dy_3}{dt} = u_1 D_{12}^3 + y_4 D_{13}^4 \alpha D_{14}^3 + y_5 D_{13}^5 \beta D_{15}^3 + y_4 D_{23}^4 \alpha D_{24}^3 + y_5 D_{23}^5 \beta D_{25}^3 \end{cases} \quad (П5.6)$$

с начальными условиями  $y_{10}$ ,  $y_{20}$  и  $y_{30}$ , при которых  $F(y_{10}, y_{20}, y_{30}) = 0$ .

Два последних уравнения системы (П5.4) прямо не рассматриваются. При подстановке в них (П5.5) видно, что  $y_4 \rightarrow 0$  и  $y_5 \rightarrow 0$  при  $\alpha, \beta > 0$ . С помощью коэффициента  $u_1$  задается скорость и направление движения по заданной траектории

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Схема модели, реализующей систему с коррекцией, представлена на рис. П5.1.

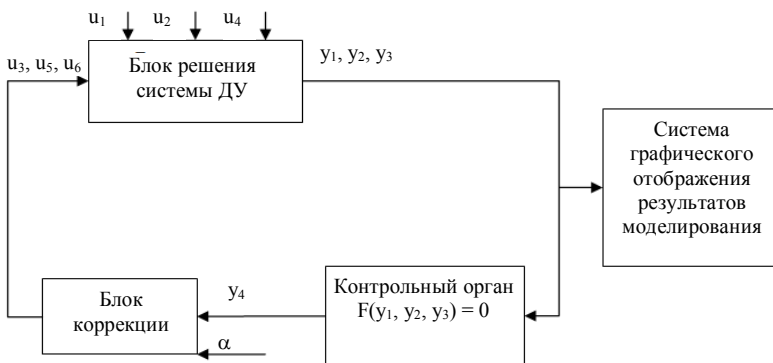
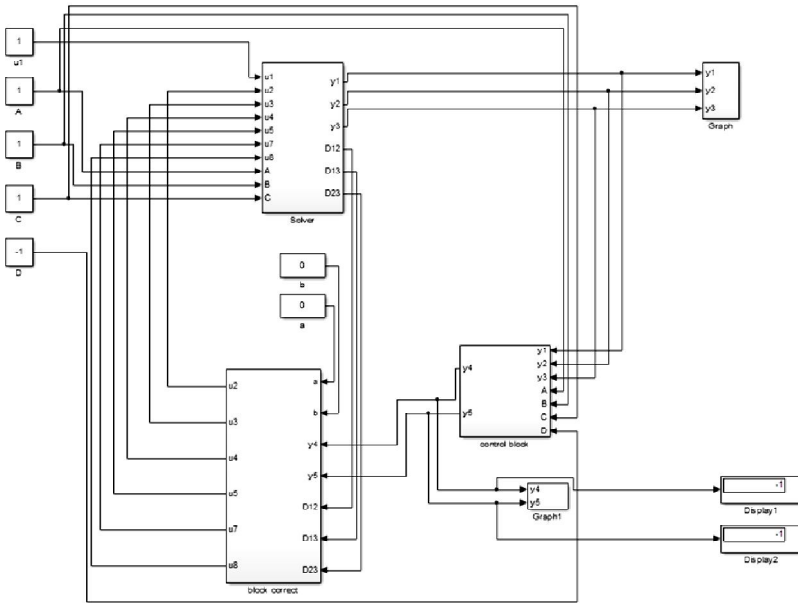


Рис. П5.1. Схема модели сферы

Модель расширенной системы дифференциальных уравнений представлена на рис. П5.2.

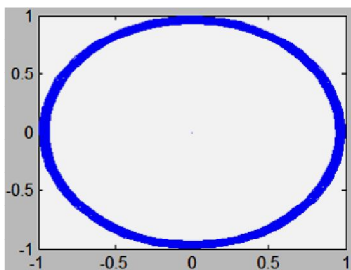


*Рис. П5.2. Модель сферы в Simulink*

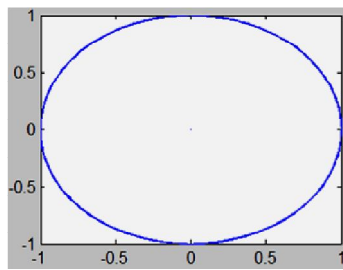
На схеме рис. П5.2:

- Подсистема Solver — блок решения системы уравнений (П5.6).
- Подсистемы Graph и Graph1 — подсистемы графического отображения результатов моделирования.
- Подсистема Control Block — контрольный орган.
- Подсистема Block.

На рис. П5.3 приведены примеры зависимости  $y_2$  от  $y_1$  для систем с коррекцией и без. В качестве численного метода использован метод Bogacki-Shampine с шагом дискретизации 0,1.



а)



б)

*Рис. П5.3. Графики зависимости  $y_2$  от  $y_1$  без коррекции (а) и с коррекцией (б)*

**Задание.** Постройте расширенную систему дифференциальных уравнений с нелинейным контрольным условием и создайте модель при помощи библиотеки Simulink математического пакета MatLab для поверхностей, описанных в лабораторной работе № 4. Для осуществления коррекции подберите такие параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы сигналы ошибок  $y_3$  и  $y_4$  были минимальными. Рассмотрите различные численные методы решения и различные шаги дискретизации. Приведите графики зависимости  $y_1$  от  $y_2$ , а также  $y_1$  и  $y_2$  от времени, а также величину ошибки для систем с коррекцией и без. Проанализируйте работу модели.

### **Контрольные вопросы:**

1. В чем состоят преимущества и недостатки использования нелинейного контрольного условия?
2. Позволяет ли использование нелинейного контрольного условия обнаруживать вторичные ошибки?
3. Чем определяются выявительные свойства нелинейного контроля?
4. Какой метод численного интегрирования из использованных вами позволяет добиться наибольшей точности без использования коррекции? С коррекцией?
5. При каком шаге интегрирования из использованных вами была достигнута наибольшая точность при работе модели с коррекцией?

6. Почему использование одного нелинейного контрольного условия позволяет достичь лучших результатов по удержанию точки на заданной траектории, чем использование линейного контрольного условия?

## Лабораторная работа № 6

### Поворачивающаяся контрольная плоскость

**Цель:** рассмотреть возможности коррекции работы модели с использованием поворачивающейся контрольной плоскости.

**Внимание:** перед выполнением лабораторной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом § 4 данного учебного пособия.

#### Пример.

Прежде чем приступить к выполнению лабораторной работы необходимо изучить § 4 и 5.

Пусть необходимо корректировать работу компьютерной модели, воспроизводящей уравнение Пфаффа в виде

$$F_1 dy_1 + F_2 dy_2 = 0. \quad (\text{П6.1})$$

Для этого введем избыточность (см. § 2)

$$y_1 = \sum a_j x_j, \quad y_2 = \sum b_j x_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{П6.2})$$

Наложим линейное контрольное условие на имеющиеся переменные

$$\sum m_j x_j = 0, \quad m_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{П6.3})$$

Дифференциальные формы расширенной системы имеют вид

$$\sum_{j=1}^3 (a_j F_1 + b_j F_2) dx_j = 0, \quad \sum_{j=1}^3 m_j dx_j = 0. \quad (\text{П6.4})$$

Возможности применения коррекции «вперед» на основе метода избыточных переменных рассмотрим на примере системы, предложенной в п. 6 § 5.

Назначим коэффициентам  $a_j, b_j$  значения  $a_1 = 1, a_2 = 1,1, a_3 = 0,9, b_1 = 0,9, b_2 = 1, b_3 = 1,1$ .

Расширенная система дифференциальных уравнений будет содержать один неопределенный коэффициент и иметь вид (см. § 2, Лабораторная работа № 2):

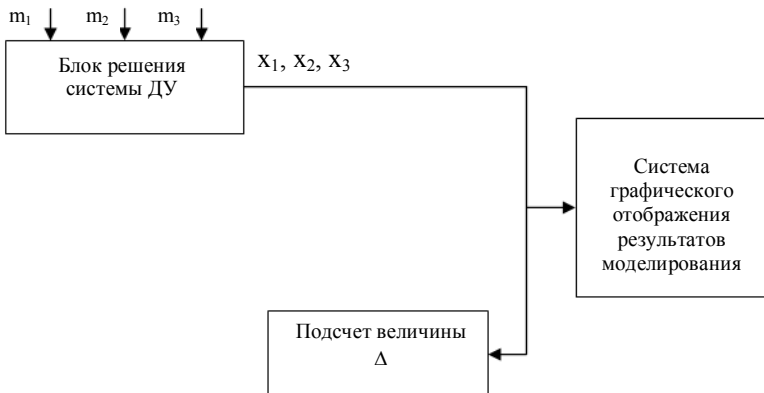
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = u_1 D_{23}^1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -u_1 D_{13}^2, \\ \frac{dx_3}{dt} = u_1 D_{12}^3 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0,11x_1 + 0,32x_2 + 0,07x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0,08x_1 - 0,11x_2 + 0,13x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = -0,19x_1 - 0,21x_2 - 0,2x_3 \end{cases} \quad (\text{П6.5})$$

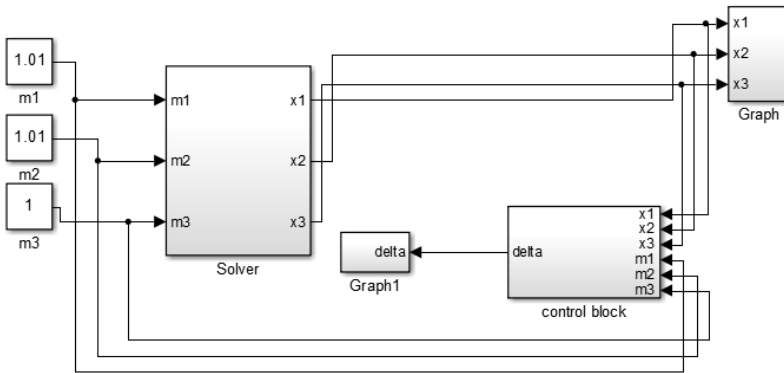
а начальные условия  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $x_{30}$  определяются из решения уравнений (П6.2) и (П6.3) для  $y_1 = y_{10}$ ,  $y_2 = y_{20}$ .

Схема модели, реализующей систему (П6.5) для определения параметров коррекции «вперед», представлена на рис. П6.1.



**Рис. П6.1. Схема модели для подсчета величины Δ**

Модель расширенной системы дифференциальных уравнений представлена на рис. П6.2.



**Рис. П6.2. Модель для подсчета величины  $\Delta$  в Simulink**

На схеме рис. П6.2:

- Подсистема Solver — блок решения системы уравнений (П6.5).
- Подсистемы Graph и Graph1 — подсистемы графического отображения результатов моделирования.
- Подсистема Control Block — контрольный орган, ведущий подсчет величины  $\Delta$ .

Для проверки действия коррекции по описываемому здесь методу создадим модель, реализующую ту же самую систему, но без дополнительного линейного контрольного условия.

Таким образом, компьютерная модель воспроизводит уравнение

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = 0,$$

где  $A_1 = 1,81x_1 + 2x_2 + 1,89x_3$ ,

$$A_2 = 2x_1 + 2,21x_2 + 2,09x_3,$$

$$A_3 = 1,89x_1 + 2,09x_2 + 2,02x_3.$$

Расширенная система для этого уравнения будет иметь три произвольных коэффициента, при помощи которых, при необходимости, можно управлять направлением и скоростью движения точки по траектории. Расширенная система дифференциальных уравнений имеет вид (см. Лабораторная работа № 2)



$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = u_1 A_2 + u_2 A_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -u_1 A_1 + u_3 A_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -u_2 A_1 - u_3 A_2 \end{cases} \quad (\text{П6.6})$$

Для каждого рассмотренного метода будем рассчитывать погрешность вычислений по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_{F6} &= |R^2 - (\tilde{x}_1 + 1,1\tilde{x}_2 + 0,9\tilde{x}_3)^2 - (0,9\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 1,1\tilde{x}_3)^2|, \\ \Delta_{FK} &= |R^2 - (x_1^* + 1,1x_2^* + 0,9x_3^*)^2 - (0,9x_1^* + x_2^* + 1,1x_3^*)^2| \end{aligned}$$

для случаев без коррекции и с коррекцией соответственно.

Далее представим результаты исследований.

1. В первом эксперименте рассмотрим метод Рунге-Кутты с шагом дискретизации, равным 0,0005, интервал моделирования  $t_1 = 0,0005$ , т.е. наименьшему возможному значению, одному шагу дискретизации.

Зададим матрицу коэффициентов

$$\begin{vmatrix} m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ m''_1 & m''_2 & m''_3 \\ m'''_1 & m'''_2 & m'''_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1,001 & 1 & 1 \\ 1,001 & 1,001 & 1 \end{vmatrix}$$

и коэффициенты  $m_1'''' = 1,002$ ,  $m_2'''' = 1$ ,  $m_3'''' = 1$ .

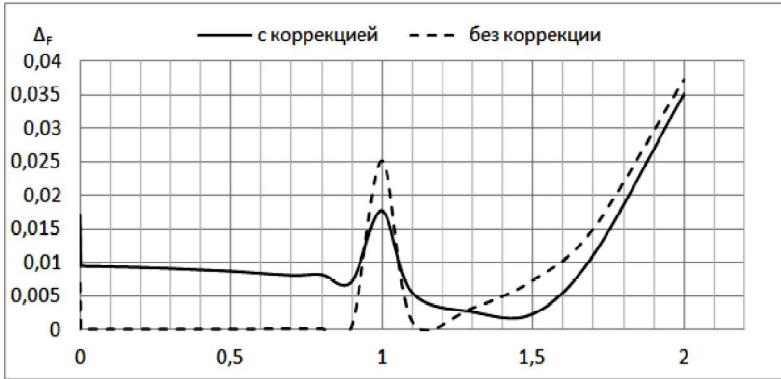
В ходе эксперимента получены значения  $\Delta_1 = 0.000447183$ ,  $\Delta_2 = 0.00044763$ ,  $\Delta_3 = 0.00046788$ , подставляя которые в (4.42), найдем

$$h_1 = 0,000447, h_2 = 0,02025, h_3 = -0,020249817.$$

Тогда можно сравнить теоретически рассчитанную  $\Delta_{4T} = 1,002h_1 + h_2 + h_3 = 0,000448077$  и практически полученную  $\Delta_{4П} = 0,000448078$ . Т.к. они различаются незначительно, можно сделать вывод, что данные значения  $h_j, j = 1, 2, 3$  можно использовать для коррекции модели (П6.6).

Проведем исследования влияния данной коррекции на работу модели. Оказалось, что при увеличении шага дискретизации, т.е. при уменьшении затрат на расчет модели, в некоторых случаях выгодно применять такую коррекцию. Графики зависимости  $\Delta_{FK}$

(с коррекцией) и  $\Delta_{F\bar{0}}$  (без коррекции) от шага дискретизации представлены на рис. Пб.3. Как видно на графике рис. Пб.3, например, при шаге дискретизации равном 1, погрешность при работе модели без коррекции значительно выше, чем с коррекцией.

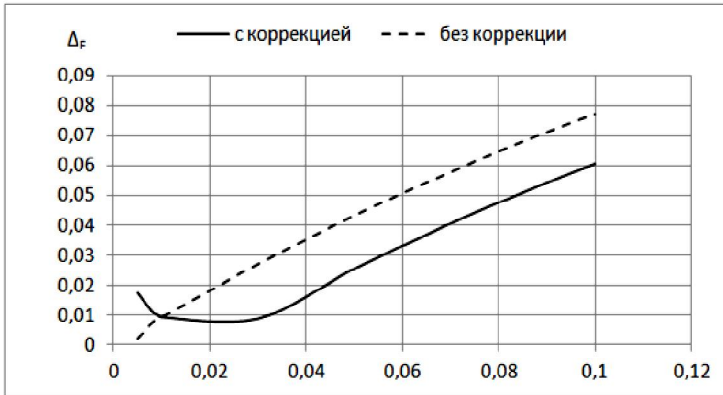


**Рис. Пб.3. Графики зависимости  $\Delta_{F_K}$  и  $\Delta_{F\bar{0}}$  от шага дискретизации (Рунге-Кутты, 0,005)**

2. Во втором эксперименте были рассмотрены два случая, когда интервал работы модели равен одному шагу дискретизации ( $t_l = 0,005$ ) двум шагам дискретизации ( $t_l = 0,01$ ). Численный метод — Рунге-Кутты, шаг дискретизации был выбран равным 0,005.

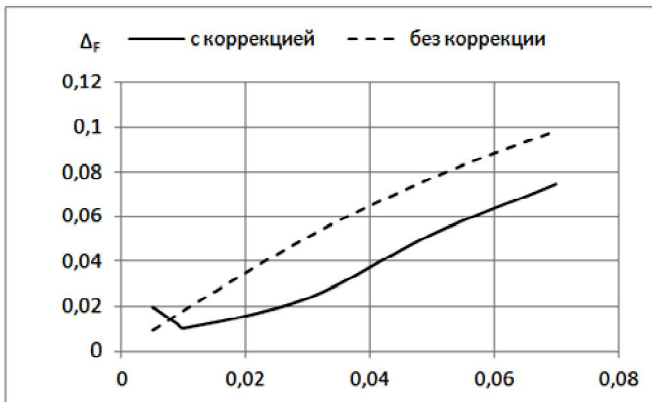
2.1. при  $t_l = 0,005$ :

$\Delta_{4T} = \Delta_{4T} = 0,004478353$ , т.е. с большой долей вероятности можно говорить о том, что такой метод коррекции возможно применять для данного случая. Действительно, на графике рис. Пб.4 видно, что, применяя данный метод коррекции на отрезке времени длиною в один шаг дискретизации, можно снизить значение погрешности при расчетах с большим шагом дискретизации, чем тот, что использовался для определения информации об ошибках.



**Рис. П6.4.** Графики зависимости  $\Delta_{Fk}$  и  $\Delta_{F\bar{b}}$  от шага дискретизации (Рунге-Кутты, шаг дискретизации 0,005,  $t_l = 0,005$ )

2.2. при  $t_l = 0,01$ :  $\Delta_{4T} = 0,008951326$ ,  $\Delta_{4Tl} = 0,008951327$ , т.е. разница незначительна. Результаты моделирования, также показывающие возможность применения коррекции, представлены на рис. П6.5.

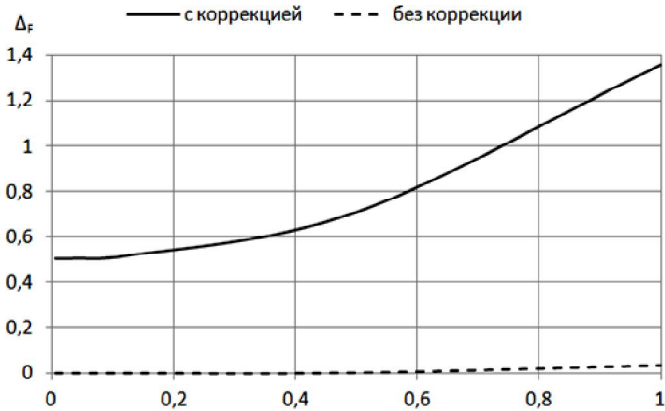


**Рис. П6.5.** Графики зависимости  $\Delta_{Fk}$  и  $\Delta_{F\bar{b}}$  от шага дискретизации (Рунге-Кутты, шаг дискретизации 0,005,  $t_l = 0,01$ )

3. Рассмотрим еще один пример. Выберем другой численный метод, на этот раз *Heun*, с шагом дискретизации 0,005.

3.1. при  $t_l = 0,005$ :

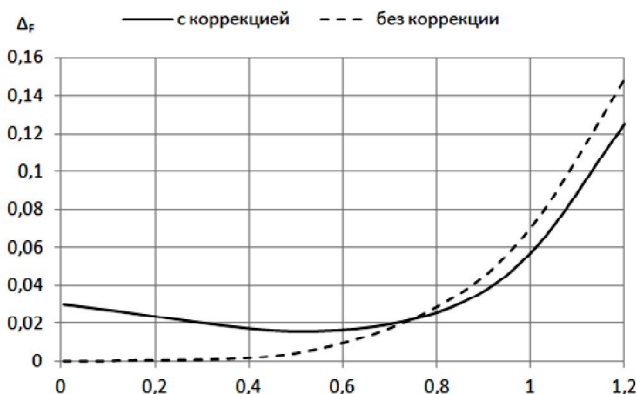
$\Delta_{4T} = 0,004783527$ ,  $\Delta_{4IT} = 0,00478353$ , но, не смотря на это, дальнейший анализ показывает, что в данном случае метод коррекции применить невозможно, на рис. П6.6 представлены графики, подтверждающие это.



*Рис. П6.6. Графики зависимости  $\Delta_{Fk}$  и  $\Delta_{F\bar{b}}$  от шага дискретизации (*Heun*, шаг дискретизации 0,005,  $t_l = 0,005$ )*

3.2. при  $t_l = 0,01$ :

$\Delta_{4T} = 0,008951325$ ,  $\Delta_{4IT} = 0,008951326$ . Графики зависимости погрешности (с коррекцией) и (без коррекции) от шага дискретизации представлены на рис. П6.7.



**Рис. П6.7.** Графики зависимости  $\Delta \epsilon$  от шага дискретизации (Heun, шаг дискретизации 0,005,  $t_1 = 0,01$ )

Таким образом, можно сделать вывод, что использовать метод коррекции при помощи поворачивающийся контрольной плоскости можно в том случае, когда величина погрешности с коррекцией удовлетворяет условиям задачи. Для этого необходимо провести предварительно ряд исследований, которые могут быть выполнены автоматически в режиме реального времени.

**Замечание:** при выполнении работы необходимо находить начальные условия  $x_{10}, x_{20}, x_{30}$  при каждой смене коэффициентов  $m_j$ .

**Задание.** В уравнения плоских кривых, перечисленные в лабораторной работе 3, введите избыточность и наложите дополнительное линейное контрольное условие (см. § 4). Параметры  $a_j, b_j$  подберите самостоятельно. Постройте расширенную систему дифференциальных уравнений и создайте модель при помощи библиотеки Simulink математического пакета MatLab. Проведите исследования, используя как минимум два метода численного дифференцирования. Приведите результаты работы моделирования  $\Delta_{nT}$  и  $\tilde{x}_j(t_l)$  при различных значениях  $m_j^n$  — поворотах плоскости (см. замечание). Рассчитайте значения  $h_j, \Delta_{4T}, x_j^*(t_l)$ .

### **Контрольные вопросы:**

1. Каким образом можно определить, какая доля помех поворачивается вместе с контрольной плоскостью?
2. Каким образом можно использовать полученную в результате экспериментов с поворачивающейся плоскостью информацию о помехах?
3. Каким образом определяется количество поворотов одной контрольной плоскости? двух и т.д. контрольных плоскостей?
4. Использование какого метода численного дифференцирования позволило добиться лучших результатов без коррекции, с коррекцией?

## ЛИТЕРАТУРА

### Список основной литературы

1. Воронин А.А. Надежность информационных систем: Учеб. пособие / А.А.Воронин, Б.И.Морозов. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. — 89 с.
2. Иванов В.П. Контроль и диагностика измерительно-вычислительных комплексов: Учеб. пособие / В.П.Иванов, В.Г.Никитин, В.Ю.Чернов. — СПб.: СПбГУАП, 2004. — 98 с.: ил.
3. Игнатьев М.Б. Информационные технологии в микро-, нано- и оптоэлектронике: монография / М.Б.Игнатьев. — СПб.: ГУАП, 2008. — 200 с.: ил.
4. Игнатьев М.Б. Кибернетическая картина мира: Учеб. пособие / М.Б.Игнатьев. — СПб.: ГУАП, 2010. — 416 с.: ил.
5. Игнатьев М.Б. Метод избыточных переменных для контроля и диагностики вычислительных процессов в реальном времени / М.Б.Игнатьев, Т.С.Катермина // Труды СПИИРАН. — СПб., 2013. — Вып. 3(26). — С. 234—252.

### Список дополнительной литературы

1. Ignatiev M.B. The checking and correction of analog and hybrid computation by the redundant variables method / M.B.Ignatiev // Annales de l'Association Internationale pour le Calcul analogique. V. 3. — Bruxelles, 1968. — P. 23—33.
2. Ignatyev M.B. The redundancy phenomenon in cybernetics, informatics and systemic / M.B.Ignatyev // Proceedings of the XI international symposium on problems of redundancy in information and control systems. — Saint-Petersburg, 2007. — P. 273—278.
3. А.С. 171174 СССР, МКП G 06d. Способ контроля и коррекции вычислительных устройств / М.Б.Игнатьев, В.В.Михайлов (СССР). — № 788149/26—24; Заявлено 23.07.62; Опубл. 11.05.65. Бюл. № 10. Приоритет 23.07.1962.
4. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А.Барбашин. — Изд. 2-е. — М.: Книжный дом «Либроком», 2013. — 224 с.
5. Босинзон М. Современные системы ЧПУ и их эксплуатация / М.Босинзон. — М.: ИЦ «Академия», 2010. — 192 с.
6. Бритов Г.С., Мироновский Л.А. Автоматизированное проектирование устройств функционального диагностирования // Информационно-управляющие системы. 2010. — № 2. — С. 55—60.

7. Бритов Г.С., Мироновский Л.А. Динамическая избыточность систем автоматического управления // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. 2011. — № 4. — С. 18—23.
8. Бритов Г.С., Мироновский Л.А. Моделирование системы функционального диагностирования // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. 2009. — № 4. — С. 29—34.
9. Бритов Г.С., Мироновский Л.А. Проблемы технического диагностирования систем управления // Известия МАН ВШ. 2011. — № 11. — С. 41—48.
10. Бритов Г.С., Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование систем с модальным управлением // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. 2010. — № 4. — С. 3—9.
11. Винберг Э.Б. Курс алгебры / Э.Б.Винберг. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. — 544 с.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 560 с.
13. Игнатъев М.Б. Семиблочная модель города для поддержки принятия решений / М.Б.Игнатъев // Компьютерные модели развития города: тр. семинара. — СПб.: Наука, 2003. — С. 40—45.
14. Ильин В.А. Линейная алгебра: Учеб. для вузов / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 280 с. — (Курс высшей математики и математической физики; вып. 4).
15. Каган Б.М. Основы эксплуатации ЭВМ: Учеб. пособие для вузов / Б.М.Каган, И.Б.Мкртумян. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 432 с.: ил.
16. Карпов Ю.Г. Model Checking. Верификация параллельных и распределенных программных систем. — СПб.: БХВ-Петербург, 2009. — 551 с.
17. Катермина Т.С. Методы и средства контроля цифровых измерительно-вычислительных комплексов / Т.С.Катермина // Культура, наука, образование: проблемы и перспективы: материалы Всерос. научн.-практ. конф., г.Нижевартовск, 7—8 февр. 2012 г. Ч. IV / Отв. ред. А.В.Коричко. — Нижевартовск: Изд-во НГТУ, 2013. — С. 87—90.
18. Катермина Т.С. Методы контроля, диагностики и коррекции вычислительных процессов / Т.С.Катермина // Информационные ресурсы в образовании: материалы Всерос. научн.-практ. конф., г.Нижевартовск, 14—16 апр. 2011 г. / Отв. ред. Т.Б.Казиахмедов. — Нижевартовск: Изд-во НГТУ, 2011. — С. 209—210.
19. Катермина Т.С. Моделирование тора при помощи метода избыточных переменных / Т.С.Катермина // Информационные ресурсы в образовании: материалы Международ. научн.-практ. конф., г.Нижевартовск,



17—19 апр. 2013 г. / Отв. ред. Т.Б.Казиахмедов. — Нижневартовск: НВГУ, 2013. — С. 62—68.

20. Литвин А.И. Использование метода избыточных переменных в параллельных вычислительных процессах цифровых систем / А.И.Литвин, Н.В.Молчунов // Автотметрия. — 1992. — № 2. — С. 78—82.

21. Ловыгин А.А. Современный станок с ЧПУ и CAD/CAM система. Иллюстрированное пособие / А.А.Ловыгин, А.В.Васильев, С.Ю.Кривцов. — М.: «Эльф ИПР», 2006. — 286 с.: ил.

22. Лонгботтом Р. Надежность вычислительных систем / Р.Лонгботтом. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 288 с.

23. Майстренко А.В. Численные методы расчета, моделирования и проектирования технологических процессов и оборудования: учеб. пособие / А.В.Майстренко, Н.В.Майстренко. — Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2011. — 144 с.

24. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение / Р.Морелос-Сарагоса. — М.: Техносфера, 2005. — 320 с.

25. Мудров А.Е. Численные методы для ЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / А.Е.Мудров. — Томск: МП «РАСКО», 1991. — 272 с.

26. Надежность информационных систем: Учеб. пособие / Ю.Ю.Громов [и др.]. — Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. — 160 с.

27. Павский К.В. Методы расчета показателей и анализ эффективности функционирования большемасштабных распределенных вычислительных систем: Автореф. ... дис. д-ра тех. наук. — Новосибирск, 2013.

28. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А.Г.Зюко и др.; под ред А.Г.Зюко. — М.: Радио и связь, 1985. — 272 с.: ил.

29. Прикладная теория цифровых автоматов / К.Г.Самофалов и др. — Киев.: Вища шк., 1987. — 375 с.

30. Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник / Под ред. Я.Д.Ширмана. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Радиотехника, 2007. — 512 с.

31. Сосонкин В.Л. Программирование систем числового программного управления: Учеб. пособие / В.Л.Сосонкин, Г.М.Мартинов. — М.: Логос, 2008. — 344 с. + компакт-диск.

32. Сосонкин В.Л. Системы числового программного управления: учеб. пособие / В.Л.Сосонкин, Г.М.Мартинов. — М.: Логос, 2005. — 296 с.

33. Ушаков И.А. Вероятностные модели надежности информационно-вычислительных систем / И.А.Ушаков. — М.: Радио и связь, 1991. — 132 с.
34. Формалёв В.Ф. Численные методы: Учеб. пособие / В.Ф.Формалёв, Д.Л.Ревизников. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Физматлит, 2006. — 400 с.
35. Чесноков М.Н. Микропроцессорные помехоустойчивые устройства приема цифровых сигналов / М.Н.Чесноков. — СПб.: ВАС, 1994. — 172 с.
36. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: практическое руководство: Учеб. издание / Пер. с англ. / Т.Шуп. — М.: Мир, 1982. — 237 с.: ил.

### **Список литературы, рекомендуемой при выполнении лабораторных работ**

1. Bogacki P. A 3 (2) pair of Runge-Kutta formulas / P.Bogacki, L.F.Shampine // Applied Mathematics Letters. 1989. — V. 2 (4). — P. 321—325.
2. Burrage K. Numerical Methods for Second-Order Stochastic Differential Equations / K.Burrage, I.Lenane, G.Lythe // SIAM Journal on Scientific Computing. 2007. — V. 29. No. 1. — P. 245—264.
3. Dormand J.R. A family of embedded Runge-Kutta formulae / J.R.Dormand, P.J.Prince // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1980. — V. 6 (1). — P. 19—26.
4. Rosenbrock H. Some general implicit processes for numerical solution of differential equations / H.Rosenbrock // Computer J. — 1963. — V. 5. № 4. — P. 329—330.
5. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие / А.А.Амосов, Ю.А.Дубянский, Н.В.Копченков. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.
6. Черных И.В. Simulink: Инструмент моделирования динамических систем [Электронный ресурс]: Интернет-учебник. URL: <http://matlab.exponenta.ru/simulink/book1/index.php>

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИЗБЫТОЧНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ (МИП) .....	8
§ 1. Системы с естественной и искусственно введенной избыточностью .....	9
§ 2. О структуре уравнений систем с избыточностью .....	17
§ 3. Об эквивалентности исходных и расширенных систем .....	25
§ 4. О контроле, диагностике и коррекции в избыточных структурах .....	32
§ 5. Жесткие избыточные структуры с алгебраической коррекцией .....	54
§ 6. Избыточные структуры с непрерывной обратной связью .....	71
§ 7. Гибкие структуры с избыточностью .....	98
§ 8. Об устойчивости избыточных систем.....	113
§ 9. Сравнение метода избыточных переменных с другими способами контроля и управления вычислительными процессами .....	120
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	144
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	145
Лабораторная работа № 1 Введение в библиотеку Simulink пакета MatLab. Моделирование динамических систем.....	145
Лабораторная работа № 2 Создание систем уравнений с неопределенными коэффициентами .....	151
Лабораторная работа № 3 Моделирование динамических систем при помощи МИП. Контроль по воспроизводимой функции.....	154

Лабораторная работа № 4	
Контроль и коррекция модели поверхности второго порядка.....	161
Лабораторная работа № 5	
Контроль и коррекция модели поверхности второго порядка с применением нелинейного контрольного условия.....	170
Лабораторная работа № 6	
Поворачивающаяся контрольная плоскость .....	174
ЛИТЕРАТУРА.....	183
Список основной литературы .....	183
Список дополнительной литературы.....	183
Список литературы, рекомендуемой при выполнении лабораторных работ .....	186

---

Изд. лиц. ЛР № 020742. Подписано в печать 17.09.2014. Формат 60×84/16  
Бумага для множительных аппаратов. Гарнитура Times  
Усл. печ. листов 11,75. Тираж 300 экз. Заказ 1589

*Отпечатано в Издательстве  
Нижевартовского государственного университета  
628615, Тюменская область, г.Нижевартовск, ул.Дзержинского, 11  
Тел./факс: (3466) 43-75-73, E-mail: izdatelstvo@nggu.ru*