16+

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ИЗБРАННЫМ ГЛАВАМ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Практикум

Нижневартовск
НВГУ
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Нижневартовский государственный университет»
Факультет информационных технологий и математики
Кафедра физико-математического образования

Дмитриев Н.П.

Сборник заданий по избранным главам экономико-математического моделирования

Практикум

Нижневартовск
НВГУ
2022

УДК 65в631 **16+**
ББК 519.86
С 23

Печатается по решению
Ученого совета ФГБОУ ВО «Нижневартовский государственный университет»
протокол № 1 от 26 января 2021

Рецензент: д-р физ.-мат. наук *П.М. Косьянов*

С 23 **Сборник заданий по избранным главам экономико-математического моделирования:** Практикум / Сост. Н.П. Дмитриев. Нижневартовск: изд-во НВГУ, 2022. 110 с.

ISBN 978-5-00047-628-4

Настоящий сборник заданий содержит учебные материалы по следующим главам экономико-математического моделирования: производственная функция, поведение потребителя, балансовые модели, управление запасами, матричные игры, статистические игры, финансовая арифметика. По каждой главе дана краткая теоретическая справка, приведены примеры с подробным решением соответствующей задачи и предложены варианты контрольных заданий для самостоятельной работы. Кроме того, в конце каждой главы приведено решение нулевого варианта, которое может помочь сориентироваться в ходе выполнения своего выбранного варианта задания.

Для студентов направления «Прикладная математика и информатика», а также для интересующихся задачами экономико-математического моделирования.

ББК 519.86

ISBN 978-5-00047-628-4
9 785000 476284

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

При подготовке бакалавров по направлению «Прикладная математика и информатика» изучение экономико-математических методов занимает особое место. Профессиональный уровень бакалавров этого направления в значительной степени зависит от того, насколько они овладели классическим и современным математическим аппаратом, насколько умеют использовать его при анализе сложных явлений и при принятии взвешенных оптимальных решений.

Математическое моделирование сложных технологических и экономических систем является одним из основных способов их теоретического анализа и дальнейшего использования соответствующих моделей на практике.

Под моделью понимают образ реального объекта в материальной или идеальной форме. Математические методы подразумевают описание реальных процессов знаковыми математическими средствами. Они являются важнейшим компонентом в человеко-машинных системах планирования, мониторинга и управления.

Моделирование сложных систем включает, как правило, следующие шаги:

1) постановка проблемы;

2) качественный анализ;

3) построение модели;

4) анализ модели;

5) подготовка данных;

6) численное решение;

7) анализ результатов;

8) применение на практике.

Математические модели классифицируют обычно:

1) по целевому назначению (аналитические, прикладные);

2) по степени агрегирования (макромодели, микромодели);

3) по конкретному предназначению (балансовые, трендовые, оптимизационные, имитационные);

4) по учету фактора времени (статические, динамические);

5) по учету фактора неопределенности (детерминированные, стохастические).

Данный сборник контрольных заданий охватывает материал по избранным моделям производства и потребления, балансовым моделям, моделям управления запасами, матричным и статистическим играм, моделям теории очередей. Особенность сборника состоит в том, что каждый раздел курса содержит теоретические сведения, контрольные вопросы, варианты заданий и решение варианта 0.

Сборник может быть использован студентами заочной формы обучения, а также теми, кто самостоятельно знакомится с типовыми математическими моделями в области принятия оптимальных решений.

1. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Эластичность функции

Многие производственные и экономические проблемы, такие как изменение спроса на некоторый товар при изменении его цены или при изменении дохода потребителя, исследование взаимозаменяемости ресурсов производства, прогнозирование прибыли под воздействием различных факторов и т. д., приводят к необходимости ответа на вопрос: на сколько процентов изменится одна величина, если другая изменится на 1%? Такая относительная зависимость одной величины от другой называется эластичностью.

Из математического анализа известно, что производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x – это предел отношения абсолютного приращения функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

к абсолютному приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$. Рассмотрим относительные приращения аргумента и функции:

$$\Delta^* x = \frac{\Delta x}{x}, \qquad \Delta^* y = \frac{\Delta y}{y}.$$

Эластичностью функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения относительного приращения функции $\Delta^* y$ к относительному приращению аргумента $\Delta^* x$ при $\Delta x \to 0$. Выражая эластичность функции через ее производную в точке, получаем:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = y' \frac{x}{y}.$$

Окончательно имеем

$$E_x(y) = y' \frac{x}{y}. \qquad (1.1)$$

Формула (1.1) имеет следующий экономический смысл: эластичность $E_x(y)$ показывает величину изменения значения функции в процентах при изменении аргумента на 1%.

Пример 1. Найти эластичность функции

$$y = 4x - 7$$

в точке $x = 2$.

Решение. По формуле (1) получаем:

$$E_x(y) = 4\frac{x}{y} = \frac{4x}{4x-7}.$$

Тогда

$$E_2(y) = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 2 - 7} = \frac{8}{1} = 8.$$

Пример 2. Найти эластичность функции

$$y = 5x^2 - 4$$

в точке $x = 3$.

Решение. По формуле (1) получаем:

$$E_x(y) = 10x\frac{x}{y} = \frac{10x^2}{5x^2 - 4}.$$

Тогда

$$E_3(y) = \frac{10 \cdot 3^2}{5 \cdot 3^2 - 4} = \frac{90}{41} \approx 2{,}195.$$

Справедливы следующие алгебраические свойства эластичности функции:

1) $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$,

2) $E_x(\frac{u}{v}) = E_x(u) - E_x(v)$,

3) $E_x(xv) = 1 + E_x(v)$,

$E_x(C) = 0, \quad C - const$,

$E_x(Cv) = E_x(v)$.

Нетрудно догадаться, что эти свойства напоминают соответствующие свойства логарифмической функции.

Пример 3. Доказать, что эластичность степенной функции $y = ax^b$ равна показателю степени *b*.

Решение. Действительно,

$$E_x(y) = y'\frac{x}{y} = (abx^{b-1})\frac{x}{ax^b} = b ,$$

что и требовалось доказать.

Однофакторные производственные функции

Возможности любого производства характеризуются зависимостью между объемом выпускаемой продукции и затратами сырья, полуфабрикатов, энергии, капиталовложений, труда и т.д. Такие затраты называют **факторами производства** или **ресурсами.** Они могут выражаться в натуральных показателях, таких как тонны, километры, киловатт-часы и т.д. Однако более удобной единицей измерения служат деньги, например, рубль или другая денежная единица.

Однофакторная производственная функция (ПФ) – это зависимость между суммарным количеством используемых в производстве ресурсов и объемом выпускаемой продукции. В этом случае все виды ресурсов объединены в единый фактор производства – суммарную стоимость всех затрат. Однофакторную производственную функцию называют также **функцией выпуска.** Обратную функцию по отношению к функции выпуска называют **функцией затрат.** В этой функции аргументом служит выпуск продукции, а значением – затраты.

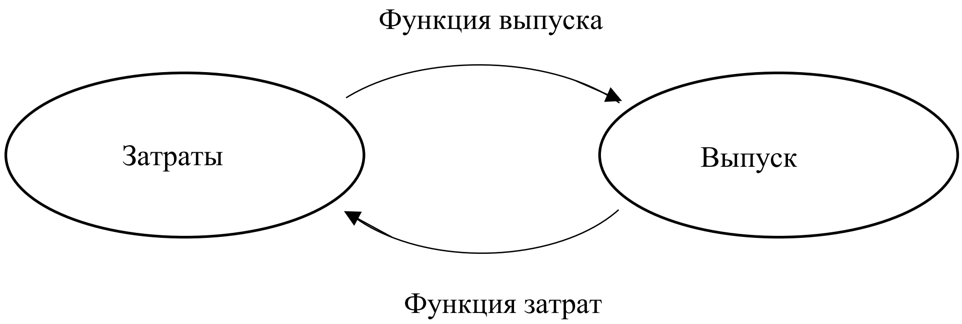


Рис. 1. Взаимозависимость затрат ресурсов и выпуска продукции

Известно, что затраты на производство продукции складываются из условно-постоянных a_0 и условно-переменных затрат $a_1 x$, где x – объем выпускаемой продукции. Тогда функция затрат имеет вид:

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Из экономических соображений ясно, что $a_0 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, $x \geq 0$. График такой зависимости представлен ниже на рисунке 2.

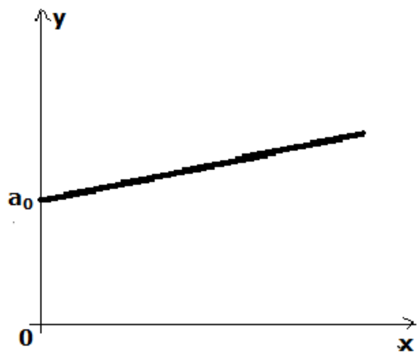


Рис. 2. График затрат в зависимости от объема выпуска продукции

Для моделирования удельных затрат, т.е. затрат на единицу выпускаемой продукции, обычно используют гиперболическую функцию

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x},$$

где $a_0 \geq 0, a_1 \geq 0, x \geq 0$. Удельные затраты имеют постоянную составляющую a_0 и переменную составляющую a_1 / x. Очевидно, что с увеличением объема производства доля переменных затрат неограниченно снижается. Ниже на рисунке 3 представлен график такой зависимости.

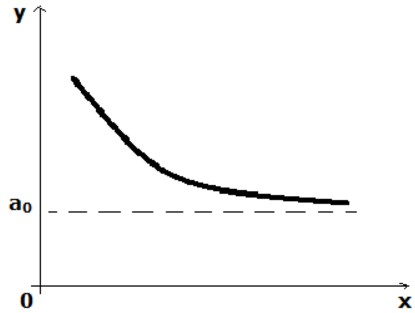


Рис. 3. График удельных затрат в зависимости от объема выпуска продукции

Зависимость урожайности y от количества внесенных удобрений x можно выразить следующей функцией:

$$y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2.$$

Здесь также $a_0 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $x \geq 0$. При x=0, т.е. при отсутствии всяких удобрений, урожайность составляет a_0 единиц. С увеличением количества вносимых удобрений урожайность растет и достигает максимального значения $y_{\max}$ при $x = a_1 / 2a_2$. Дальнейшее увеличение количества вносимых удобрений снижает урожайность и даже приводит к полной ее потере. Ниже на рисунке 4 представлен график зависимости урожайности от количества внесенных удобрений.

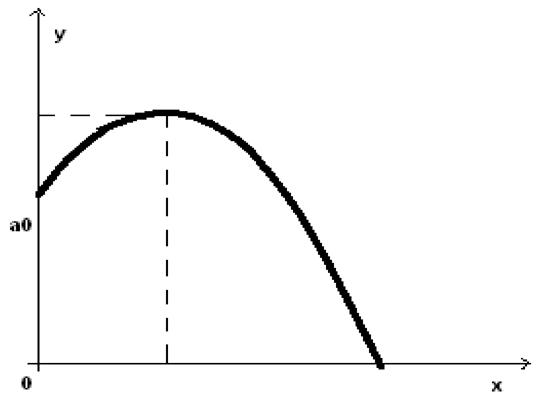


Рис. 4. Зависимость урожайности от количества внесенных удобрений

Достаточно часто при моделировании экономики используются степенные функции

$$y = ax^b,$$

где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $x \geq 0$. Такими функциями удобно описывать ситуации, в которых рост затрат некоторого ресурса ведет к неограниченному увеличению выпуска продукции. Ниже на рисунке 5 представлены графики степенных функций при a=1 и b=0,5; 1; 2.

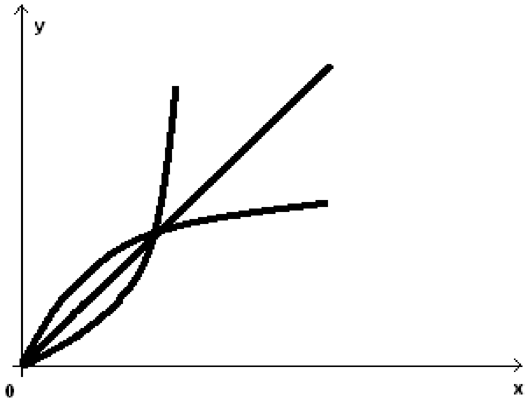


Рис. 5. Графики степенных функций при показателях 1/2, 1, 2

Двухфакторные производственные функции

В простейших моделях в качестве факторов производства обычно рассматривают:

• *K* – прошлый накопленный труд, основные производственные фонды (ОПФ);

• *L* – настоящий живой труд, трудовые ресурсы (ТР).

Общий вид двухфакторной ПФ:

$$X=F\ (K,\ L). \tag{1.2}$$

В формуле (1.2) валовой выпуск (ВВ) продукции *X* есть функция от затрат ресурсов, а именно, от фондов *K* и труда *L*.

На практике часто рассматривают степенную мультипликативную ПФ:

$$X = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{1.3}$$

где *A, á, β* – некоторые положительные параметры. Если $\beta = 1 - \alpha$, то функцию (1.3) называют **производственной функцией Кобба-Дугласа.**

Очевидно, что чем больше коэффициент *A* при постоянных факторах производства *K* и *L*, то тем больше выпуск продукции *X*, поэтому *A* называют **коэффициентом технического прогресса.** Для выяснения экономического смысла параметров α и β найдем эластичность функции (1) по аргументам *K* и *L*:

$$E_K(X) = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{K}{X} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\,\frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \alpha \tag{1.4}$$

$$E_L(X) = \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{L}{X} = AK^{\alpha}\beta L^{\beta-1}\,\frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \beta. \tag{1.5}$$

Итак, оказалось: α – эластичность по фондам, β – эластичность по труду.

Например, ПФ ВВ Российской Федерации (в млрд руб.) в зависимости от стоимости ОПФ (в млрд руб.) и ТР (в млн чел.) по статистическим данным за 1960-1994 гг. имеет следующий вид:

$$X = 0{,}931K^{0{,}539}L^{0{,}594}.$$

Следовательно, при увеличении ОПФ на 1% *ВВ* возрастает на 0,539%, а при увеличении ТР на 1% ВВ возрастает на 0,594%.

ПФ называется **неоклассической,** если она дважды дифференцируема в области $\{K \geq 0 \cap L \geq 0\}$ и обладает следующими свойствами:

- $F(0, L) = F(K, 0) = 0$. Это означает, что производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса.
- $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial L} > 0$. Это означает, что при увеличении затрат производственных ресурсов выпуск продукции растет.
- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$. Это означает, что по мере увеличения затрат одного ресурса при постоянных затратах другого скорость роста выпуска продукции замедляется.
- $F(\infty, L) = F(K, \infty) = \infty$. Это означает, что при неограниченном увеличении хотя бы одного из ресурсов выпуск продукции неограниченно растет.

Очевидно, что если $0 < \alpha, \beta < 1$, то относительно ПФ вида (1.3) все свойства выполнены. Следовательно, при таких условиях данная функция является неоклассической.

Введем следующие величины:

$x_K = \dfrac{X}{K}$ – средняя фондоотдача;

$x_L = \dfrac{X}{L}$ – средняя производительность труда;

$x_K{}^* = \dfrac{\partial F}{\partial K}$ – предельная фондоотдача;

$x_L{}^* = \dfrac{\partial F}{\partial L}$ – предельная производительность труда.

Из соотношений (4) и (5) следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha \frac{X}{K}, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = \beta \frac{X}{L} \tag{6}$$

или

$$x_K{}^* = \alpha x_K, \qquad x_L{}^* = \beta x_L.$$

Таким образом, предельная фондоотдача пропорциональна средней фондоотдаче с коэффициентом пропорциональности, равным коэффициенту эластичности по фондам, а предельная производительность труда пропорциональна средней производительности труда с коэффициентом пропорциональности, равным коэффициенту эластичности по труду.

Пусть $X = X_0$, т.е. ВВ продукции постоянен. Тогда равенство

$$AK^{\alpha} L^{\beta} = X_0 \tag{7}$$

выражает неявную зависимость одного фактора производства от другого. Экономически это означает возможность взаимного замещения ресурсов K и L при постоянном выпуске X_0. Из равенства (7) можно получить явную зависимость, например, ОПФ от ТР:

$$K = \left(\frac{X_0}{A} \right)^{1/\alpha} L^{-\beta/\alpha}. \tag{8}$$

Функция (7) или (8) называется **изоквантой.** Геометрическим образом изокванты является **гипербола.** Вот ее некоторые свойства:

• Изокванты не пересекаются друг с другом.

• Изокванта разбивает первую четверть $\{K \geq 0 \cap L \geq 0\}$ на две части. В одной из них $X<X_0$, а в другой $X>X_0$.

• Более удаленная от начала координат изокванта соответствует большему выпуску продукции.

• Изокванты асимптотически сходятся к осям координат.

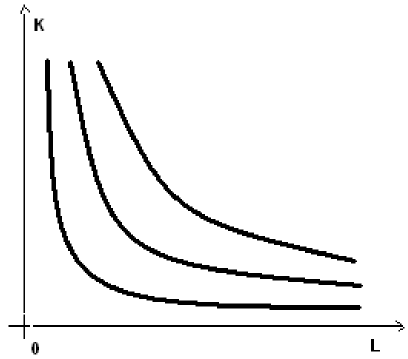


Рис. 7. Общий вид изоквант функции Кобба-Дугласа

Продифференцируем равенство (1.2):

$$dX = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL .$$

Если $X=X_0$ – постоянная, то $dX=0$. Значит, при $X=X_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0 . \qquad (1.9)$$

В предположении, что ПФ является неоклассической, из равенства (1.9) можно сделать вывод: дифференциалы dK и dL имеют разные знаки. Экономически это означает, что выбывший в абсолютном выражении труд dL замещается фондами в абсолютном объеме dK и наоборот.

Предельной нормой замещения труда фондами называется величина

$$s_K = -\frac{dK}{dL} \qquad (1.10)$$

Предельной нормой замещения фондов трудом называется величина

$$s_L = -\frac{dL}{dK} . \qquad (1.11)$$

Из равенства (1.9) получаем следующие выражения для этих величин:

$$s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}, \qquad s_L = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}.$$

Воспользовавшись (1.6), имеем

$$s_K = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L} .$$

Величину $k = \dfrac{K}{L}$ называют **фондовооруженностью**. Таким образом,

$$s_K = \frac{\beta}{\alpha} k \,. \qquad (1.12)$$

Из формулы (1.12) следует, что недостаток труда можно компенсировать увеличением фондовооруженности.

Более подробно с производственными функциями, их свойствами и применением в макроэкономике можно ознакомиться в [1; 3; 7; 8].

Контрольные вопросы

1. Что такое факторы производства?
2. Как определяется однофакторная производственная функция?
3. В чем различие производственной функции и функции затрат?
4. Как выглядит функция затрат от выпуска?
5. Какова функция удельных затрат?
6. Какова зависимость урожайности от количества внесенных удобрений?
7. В каких задачах экономики используются степенные функции?
8. В каких задачах финансового анализа используются показательные функции?
9. Как определяются двухфакторные производственные функции?
10. Каков аналитический вид производственной функции Кобба-Дугласа?
11. Каков геометрический вид производственной функции Кобба-Дугласа?
12. Каков смысл коэффициента технического прогресса?
13. Каков смысл коэффициентов эластичности по фондам и по труду?
14. Каковы свойства двухфакторной производственной функции?
15. Что такое неоклассическая производственная функция?
16. Как формулируется первый закон Госсена?
17. Какова связь между средними и предельными величинами фондоотдачи и производительности труда?
18. Что такое изокванта в экономическом анализе?
19. Каков геометрический вид изокванты?
20. Каковы свойства изокванты в зависимости от ее параметров?
21. Как связаны дифференциалы по фондам и труду?
22. Каково экономическое обоснование этой связи?
23. Что такое предельная норма замещения труда фондами?
24. Что такое предельная норма замещения фондов трудом?
25. Как определяется фондовооруженность?
26. Какова связь фондовооруженности с предельной нормой замещения труда фондами?

Варианты заданий

1. Предприятие производит x единиц продукции в месяц и реализует ее по цене $p(x)$. Суммарные издержки производства составляют $z(x)$. Найти объем производства x, при котором прибыль предприятия $v(x)$ максимальна.

2. По заданным значениям затрат X и выпуска Y методом наименьших квадратов найти коэффициент технического прогресса A и коэффициент эластичности α однофакторной производственной функции $Y = AX^{\alpha}$.

Вариант 0

1.	$p=50-0{,}1x$ $z=0{,}2x^2+5x+200$					
2.	X	1	2	3	4	5
	Y	3	5	6	7	7

Вариант 1

1.	$p=44-0{,}06x$ $z=0{,}1x^2+3x+160$										
2.	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	3,1	4,9	6,2	7,8	7,4	9,3	8,1	9,5	10,0	9,7

Вариант 2

1.	$p=50-0{,}07x$ $z=0{,}12x^2+x+210$										
2.	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	4,2	4,7	4,4	5,5	5,4	6,3	6,1	6,7	7,5	7,7

Вариант 3

1.	$p=42-0{,}05x$ $z=0{,}31x^2+2x+170$										
2.	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	3,3	4,0	4,2	5,7	7,3	6,9	7,2	7,3	8,1	8,6

Вариант 4

1.	$p=46-0{,}04x$ $z=0{,}11x^2+x+230$										
2.	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	3,4	5,4	6,9	7,5	7,8	7,9	8,3	7,8	9,3	9,5

Вариант 5

1.	$p=45-0{,}03x$ $z=0{,}13x^2+x+210$										
2.	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	1,5	1,4	2,6	3,6	3,2	4,7	4,8	5,6	5,7	6,6

Вариант 6

1.	$p=40-0,05x$ $z=0,11x^2+3x+170$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*2,2*	*4,6*	*6,3*	*7,5*	*7,4*	*8,3*	*8,6*	*9,7*	*10,2*	*9,8*

Вариант 7

1.	$p=50-0,07x$ $z=0,12x^2+x+210$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*4,5*	*4,7*	*4,9*	*5,7*	*5,9*	*6,8*	*7,1*	*6,7*	*7,9*	*8,7*

Вариант 8

1.	$p=42-0,05x$ $z=0,31x^2+2x+170$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*3,6*	*4,5*	*5,2*	*5,7*	*7,2*	*7,9*	*8,2*	*9,3*	*10,1*	*10,4*

Вариант 9

1.	$p=46-0,04x$ $z=0,11x^2+x+230$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*5,4*	*5,4*	*6,1*	*6,5*	*6,8*	*5,9*	*6,3*	*7,0*	*7,3*	*7,5*

Вариант 10

1.	$p=43-0,04x$ $z=0,15x^2+x+260$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*1,8*	*1,9*	*2,0*	*2,6*	*2,2*	*3,7*	*3,8*	*4,6*	*4,7*	*5,6*

Вариант 11

1.	$p=44-0,06x$ $z=0,1x^2+3x+160$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*3,1*	*4,9*	*6,2*	*7,8*	*7,4*	*9,3*	*8,1*	*9,5*	*10,0*	*9,7*

Вариант 12

1.	$p=50-0,07x$ $z=0,12x^2+x+210$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*4,2*	*4,7*	*4,4*	*5,5*	*5,4*	*6,3*	*6,1*	*6,7*	*7,5*	*7,7*

Вариант 13

1.	$p=42-0,05x$ $z=0,31x^2+2x+170$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*3,3*	*4,0*	*4,2*	*5,7*	*7,3*	*6,9*	*7,2*	*7,3*	*8,1*	*8,6*

Вариант 14

1.	*p=46-0,04x z=0,11x²+x+230*										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*3,4*	*5,4*	*6,9*	*7,5*	*7,8*	*7,9*	*8,3*	*7,8*	*9,3*	*9,5*

Вариант 15

1.	*p=45-0,03x z=0,13x²+x+210*										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*1,5*	*1,4*	*2,6*	*3,6*	*3,2*	*4,7*	*4,8*	*5,6*	*5,7*	*6,6*

Вариант 16

1.	*p=40-0,05x z=0,11x²+3x+170*										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*2,2*	*4,6*	*6,3*	*7,5*	*7,4*	*8,3*	*8,6*	*9,7*	*10,2*	*9,8*

Вариант 17

1.	*p=50-0,07x z=0,12x²+x+210*										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*4,5*	*4,7*	*4,9*	*5,7*	*5,9*	*6,8*	*7,1*	*6,7*	*7,9*	*8,7*

Вариант 18

1.	*p=42-0,05x z=0,31x²+2x+170*										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*3,6*	*4,5*	*5,2*	*5,7*	*7,2*	*7,9*	*8,2*	*9,3*	*10,1*	*10,4*

Вариант 19

1.	*p=46-0,04x z=0,11x²+x+230*										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*5,4*	*5,4*	*6,1*	*6,5*	*6,8*	*5,9*	*6,3*	*7,0*	*7,3*	*7,5*

Вариант 20

1.	*p=43-0,04x z=0,15x²+x+260*										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*1,8*	*1,9*	*2,0*	*2,6*	*2,2*	*3,7*	*3,8*	*4,6*	*4,7*	*5,6*

Вариант 21

1.	*p=44-0,06x z=0,1x²+3x+160*										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*3,1*	*4,9*	*6,2*	*7,8*	*7,4*	*9,3*	*8,1*	*9,5*	*10,0*	*9,7*

Вариант 22

1.	$p=50\text{-}0{,}07x$ $z=0{,}12x^2+x+210$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*4,2*	*4,7*	*4,4*	*5,5*	*5,4*	*6,3*	*6,1*	*6,7*	*7,5*	*7,7*

Вариант 23

1.	$p=42\text{-}0{,}05x$ $z=0{,}31x^2+2x+170$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*3,3*	*4,0*	*4,2*	*5,7*	*7,3*	*6,9*	*7,2*	*7,3*	*8,1*	*8,6*

Вариант 24

1.	$p=46\text{-}0{,}04x$ $z=0{,}11x^2+x+230$										
2.	*X*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	Y	*3,4*	*5,4*	*6,9*	*7,5*	*7,8*	*7,9*	*8,3*	*7,8*	*9,3*	*9,5*

Вариант 25

1.	$p=45\text{-}0{,}03x$ $z=0{,}13x^2+x+210$										
2.	*X*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	1,5	1,4	2,6	3,6	3,2	4,7	4,8	5,6	5,7	6,6

Вариант 26

1.	$p=40\text{-}0{,}05x$ $z=0{,}11x^2+3x+170$										
2.	*X*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	2,2	4,6	6,3	7,5	7,4	8,3	8,6	9,7	10,2	9,8

Вариант 27

1.	$p=50\text{-}0{,}07x$ $z=0{,}12x^2+x+210$										
2.	*X*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	4,5	4,7	4,9	5,7	5,9	6,8	7,1	6,7	7,9	8,7

Вариант 28

1.	$p=42\text{-}0{,}05x$ $z=0{,}31x^2+2x+170$										
2.	*X*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	3,6	4,5	5,2	5,7	7,2	7,9	8,2	9,3	10,1	10,4

Вариант 29

1.	$p=46\text{-}0{,}04x$ $z=0{,}11x^2+x+230$										
2.	*X*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	5,4	5,4	6,1	6,5	6,8	5,9	6,3	7,0	7,3	7,5

Вариант 30

1.	p=43-0,04x z=0,15x^2+x+260										
2.	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	1,8	1,9	2,0	2,6	2,2	3,7	3,8	4,6	4,7	5,6

Решение варианта 0

Задание 1. Предприятие производит x единиц продукции в месяц и реализует ее по цене p=50-0,1x. Суммарные издержки производства составляют z=0,2x^2+5x+200. При каком объеме производства прибыль предприятия будет максимальной?

Решение. В простейшем случае прибыль v можно выразить формулой:

$$v=w-z,$$

где w – объем выпуска продукции. Ясно, что $w=px$. Тогда $w=px-z$. Конкретно

$$w=(50-0{,}1x)x-0{,}2x^2-5x-200 \text{ или } w=-0{,}3x^2+45x-200.$$

Для отыскания точки максимума такой функции воспользуемся известной теоремой Ферма. Продифференцируем эту функцию и приравняем производную нулю.

$$w'=-0{,}6x+45=0.$$

Отсюда x=75. Итак, при объеме производства x=75 прибыль предприятия будет максимальной. Ее величина составляет

$$w(75)=-0{,}3\cdot 75^2+45\cdot 75-200=1487{,}5.$$

Ниже на рисунке 6 приведен график зависимости величины прибыли от объема производства.

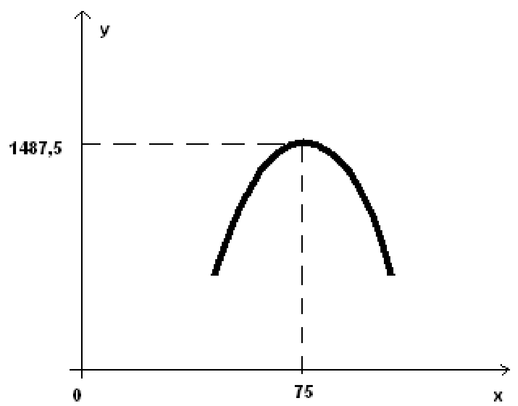


Рис. 6. График зависимости величины прибыли от объема производства

Задание 2. По заданным значениям затрат X и выпуска Y методом наименьших квадратов найти коэффициент технического прогресса A и коэффициент эластичности α однофакторной производственной функции $Y=AX^{\alpha}$

X	1	2	3	4	5
Y	3	5	6	7	7

Решение. Логарифмируя искомую функцию $Y = AX^{\alpha}$, получаем

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln X. \tag{1.13}$$

Обозначим $y = \ln Y,\ a = \ln A,\ b = \alpha,\ x = \ln X$. Тогда уравнение (1.13) примет вид:

$$y = a + bx. \tag{1.14}$$

В среде *Excel* находим соответствующие исходным данным значения *x* и *y*, а именно, $y = \ln Y,\ x = \ln X$.

X	Y	x	y
1	3	0,000	1,099
2	5	0,693	1,609
3	6	1,099	1,792
4	7	1,386	1,946
5	7	1,609	1,946

Параметры a, b линейной модели (1.14) находим методом наименьших квадратов, решая нормальную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} na + (\sum x_i)b = \sum y_i \\ (\sum x_i)a + (\sum x_i^2)b = \sum x_i y_i \end{cases}. \tag{1.15}$$

Из курса математического анализа хорошо известно, что такая система всегда имеет единственное решение. Для решения системы (1.15) предварительно сформируем следующую таблицу и найдем подходящие параметры a, b.

x	y	x^2	x*y
0,000	1,099	0,000	0,000
0,693	1,609	0,480	1,115
1,099	1,792	1,208	1,969
1,386	1,946	1,921	2,697
1,609	1,946	2,589	3,131
4,787	8,392	6,198	8,913

Итак,

$$\sum x_i = 4{,}787; \qquad \sum y_i = 8{,}392;$$
$$\sum x_i^2 = 6{,}198; \qquad \sum x_i y_i = 8{,}913.$$

Следовательно, система (1.15) принимает вид:

$$\begin{cases} 5a + 4{,}787b = 8{,}392 \\ 4{,}787a + 6{,}198b = 8{,}913 \end{cases}. \tag{1.16}$$

Решаем систему (1.16), например, матричным методом. Для этого вводим матрицу коэффициентов системы *A,* столбец свободных членов *B* и столбец неизвестных *X*:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4{,}787 \\ 4{,}787 & 6{,}198 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8{,}392 \\ 8{,}913 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях системе (1.16) соответствует матричное уравнение *AX*=*B.* Его решение можно найти так: $X = A^{-1}B$.

Последовательность действий и получение результата в среде *Excel* представлены ниже.

Исходная матрица *A*	
5	4,787
4,787	6,198

Обратная матрица *C*	
0,768	-0,593
-0,593	0,619

Правая часть	Неизвестные *X*	X=CB
8,392	*a*	1,158
8,913	*b*	0,544

Правый столбец этой таблицы содержит результаты матричных преобразований, а именно, a=1,158, b=0,544. Стало быть, уравнение (1.14) в нашем случае такое:

$$y^* = 1{,}158 + 0{,}544\,x. \tag{1.17}$$

Для сравнения приведем таблицу исходных и сглаженных данных:

y	1,099	1,609	1,792	1,946	1,946
y^*	1,158	1,535	1,756	1,912	2,034

Перейдем от линейной модели (1.14) к искомой степенной модели $Y = AX^{\alpha}$. Из формул $a = \ln A,\ b = \alpha$ находим искомые параметры:

$$A = e^{1{,}158} = 3{,}184, \quad \alpha = b = 0{,}544\,.$$

Таким образом, однофакторная производственная функция имеет следующий аналитический вид:

$$Y = 3{,}184X^{0{,}544}. \tag{1.18}$$

Ниже представлен график исходных данных (Ряд 1) и сглаженных по формуле (.118) данных (Ряд 2).

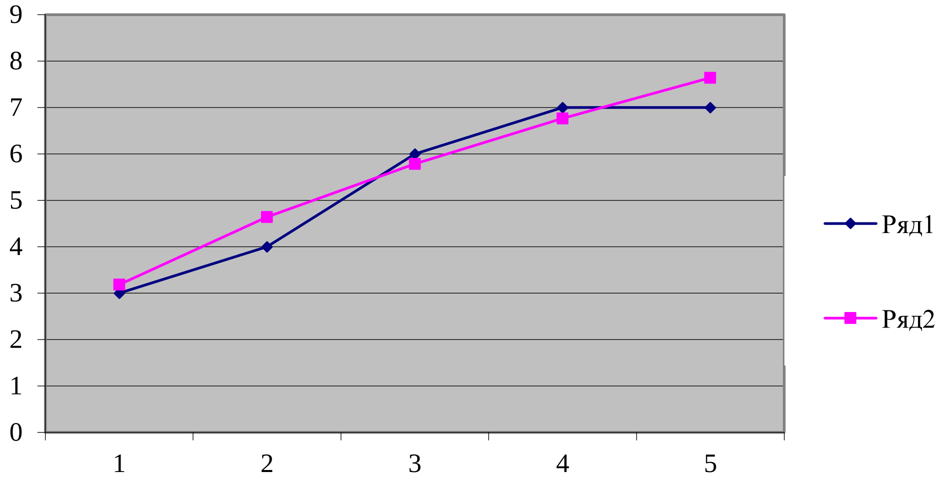


Рис. 7

Ответ: $Y = 3{,}184X^{0{,}544}$

2. ПОВЕДЕНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЯ

Теоретические сведения

Товар – это материальное благо или услуга, поступившая в продажу. Обозначим через $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектор (корзину) товаров, приобретенных потребителем за определенный период при заданных ценах и известном доходе потребителя. Множество всех наборов товаров X будем называть *пространством товаров.* Решение потребителя о покупке некоторого определенного товара – это выбор некоторой определенной точки пространства товаров.

Любой потребитель имеет свои определенные предпочтения на рынке товаров. Если потребитель предпочитает товар X товару Y, то такое предпочтение будем обозначать $X \geq Y$ или $Y \leq X$. Если потребитель не делает никаких различий между этими товарами, то этот факт будем обозначать $X \sim Y$. Это означает, что для него наборы товаров X и Y равноценны. Строгое предпочтение будем обозначать $X>Y$ или $Y<X$. Строгое предпочтение исключает равноценность товаров X и Y.

В дальнейшем будем считать, что имеют место следующие аксиомы:

1) $X \geq X$ *для любого* X (рефлексивность);

2) $X \geq Y$, $Y \geq Z \rightarrow X \geq Z$ (транзитивность).

Кроме того, будем считать также, что для любой пары товаров всегда выполняется одно из соотношений: $X \leq Y$, $X \geq Y$ или $X \sim Y$.

Отношение предпочтения $<$ называется *непрерывным* на множестве D, если множество $\{(X, Y): \ X < Y\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $D \times D$. Это означает, что при малом изменении каждого из этих наборов отношение строгого предпочтения сохраняется.

Эластичность спроса по цене

Обозначим через p цену товара, а через d спрос на него. Тогда зависимость спроса от цены можно выразить формулой

$$d=d(p).$$

Очень часто экономиста интересует не только прямая зависимость спроса от цены, но и характер изменения спроса при изменении цены. В этом случае используют эластичность спроса относительно цены. В соответствии с определением получаем

$$E_p(d) = \frac{p}{d(p)} d'(p). \tag{2.1}$$

В общем случае спрос является убывающей функцией относительно цены. Следовательно,

$$d'(p) < 0.$$

Значит, $E_p(d)<0$. В экономических расчетах удобнее использовать положительный показатель эластичности. Таким образом, скорректированный показатель эластичности спроса по цене будет иметь вид:

$$E_p(d) = -\frac{p}{d(p)} d^{'}(p). \qquad (2.2)$$

Эластичность спроса относительно цены указывает: на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении цены на 1%.

Если $E_d(d)>1$, то спрос на товар называется ***эластичным,*** если $E_d(d)=1$, то спрос называется ***нейтральным,*** а если $E_d(d)<1$, то спрос называется ***неэластичным.***

Таким образом, спрос на товар эластичен, если незначительное изменение цены товара ведет к значительному изменению спроса на него. С другой стороны, спрос на товар неэластичен, если изменение цены товара не ведет к значительному изменению спроса на него. Примерами товаров с эластичным спросом могут служить предметы роскоши, такие как автомобили, яхты и т. д. Примерами товаров с неэластичным спросом могут служить товары первой необходимости, такие как хлеб, лекарства, обувь, бензин и т. д.

Пример 1. Найти эластичность спроса по цене, если $d=7–0{,}5p$.

Решение. По формуле (2) имеем

$$E_p(d) = -\frac{p}{7-0{,}5p}(-0{,}5) = \frac{p}{14-p}.$$

Пусть $p=4$. Тогда $E_p(d)=0{,}4$. Это означает, что при увеличении цены на 1% спрос падает на 0,4%. Такой спрос при такой цене неэластичен. Пусть теперь $p=10$. Тогда $E_p(d)=2{,}5$. Это означает, что при увеличении цены на 1% спрос падает на 2,5%. Такой спрос при такой цене эластичен.

Пример 2. Найти эластичность спроса по цене, если $d = \frac{c}{p}$ (c - *const*).

Решение. По формуле (2) имеем

$$E_p(d) = -\frac{p}{c/p}\left(-\frac{c}{p^2}\right) = 1.$$

Это означает, что если спрос обратно пропорционален цене, то при любой цене увеличение ее на 1% влечет за собой уменьшение спроса также на 1%. Такой спрос при любой цене нейтрален.

Рассмотрим динамику выручки при различных видах спроса. Выручка $w(p)$ от продажи товара по цене p равна

$$w(p)=p\cdot d(p).$$

Предельная выручка в экономике – это производная от функции выручки. По правилу дифференцирования произведения получаем

$$w^{'}(p) = d(p) + pd^{'}(p).$$

Вынесем множитель $d(p)$ за скобку. Тогда

$$w^{'}(p) = d(p)\left(1 + \frac{p}{d(p)} d^{'}(p)\right)$$

или

$$w'(p) = d(p)(1 - E_p(d)). \qquad (2.3)$$

Из формулы (2.3) получаем следующие следствия.

1) Если спрос эластичен, то $E_p(d)>1$. В этом случае $w'(p)<0$. Значит, с повышением цены выручка от продажи товара снижается.

2) Если спрос нейтрален, то $E_p(d)=1$. В этом случае $w'(p)=0$. Значит, выручка практически не зависит от цены.

3) Если спрос неэластичен, то $E_p(d)<1$. В этом случае $w'(p)>0$. Значит, с повышением цены выручка от продажи товара также повышается.

Итак, знание эластичности спроса на товар позволяет прогнозировать направление изменения выручки при изменении цены. Ясно, что продавцу товара выгодно, чтобы спрос на его товар был неэластичным. В такой ситуации можно назначать более высокие цены. Если спрос на товар эластичен, то для поддержания спроса на него необходимо заботиться о постоянном повышении качества продукции, организации обслуживании потребителей, эффективности рекламы и т. д.

Эластичность предложения по цене

Как обычно, обозначим через p цену товара, а через s предложение товара на рынке. Тогда зависимость предложения от цены можно выразить формулой

$$s=s(p).$$

Как и в случае эластичности спроса экономиста интересует не только прямая зависимость предложения от цены, но и характер изменения такого предложения при изменении цены. В этом случае используют эластичность предложения относительно цены.

По аналогии с формулой (1) получаем

$$E_p(s) = \frac{p}{s(p)} s'(p). \qquad (2.4)$$

В общем случае предложение является возрастающей функцией относительно цены. Следовательно, $d'(p) > 0$. Значит, и $E_p(s)>0$. Эластичность предложения относительно цены указывает: на сколько процентов изменится предложение товара при изменении цены на 1%.

Если $E_p(s)>1$, то предложение товара называется ***эластичным,*** если $E_p(s)=1$, то предложение называется ***нейтральным,*** а если $E_p(s)<1$, то предложение называется ***неэластичным.***

Пример 3. Найти эластичность предложения по цене, если $s=2+0{,}5p^2$.

Решение. По формуле (3) имеем

$$E_p(s) = \frac{p}{2+0{,}5p^2}\, p = \frac{2p^2}{4+p^2}.$$

Пусть $p=1$. Тогда $E_p(s)=0{,}4$. Это означает, что при увеличении цены на 1% предложение товара повышается на 0,4%. Такое предложение при такой цене неэластично. Пусть $p=2$. Тогда

$E_p(s)=1$. Такое предложение при такой цене нейтрально. Пусть теперь $p=4$. Тогда $E_p(s)=1,6$. Это означает, что при увеличении цены на 1% предложение товара повышается уже на 1,6%. Такое предложение при такой цене можно считать эластичным.

Пример 4. Найти эластичность предложения по цене, если $s=ln(p+1)$.

Решение. По формуле (2.3) имеем

$$E_p(s)=\frac{p}{\ln(p+1)}\cdot\frac{1}{p+1}=\frac{p}{(p+1)\ln(p+1)}.$$

Пусть $p=0,5$. Тогда

$$E_p(s)=\frac{0,5}{1,5\cdot\ln 1,5}=\frac{1}{3\cdot 0,4055}=0,822.$$

Это означает, что при увеличении цены на 1% предложение товара повышается на 0,82%. Пусть $p=1$. Тогда

$$E_p(s)=\frac{1}{2\cdot\ln 2}=\frac{1}{2\cdot 0,6931}=0,7214.$$

Это означает, что при увеличении цены на 1% предложение товара повышается на 0,72%. Ясно, что такое предложение неэластично.

Цена, при которой величина спроса равна величине предложения, называется ***равновесной***, а соответствующий объем спроса или предложения – ***равновесным объемом.*** Таким образом, равновесная цена и равновесный объем находятся из уравнения

$$d(p)=s(p).$$

Сглаживая статистические данные, можно найти аналитическую зависимость спроса и предложения от предложенной на рынке цены. В простейшем случае такие зависимости носят линейный характер.

Пример 5. Найти равновесную цену и равновесный объем, если функции спроса и предложения от цены имеют следующий вид:

$$d(p)=3–0,2p \qquad s(p)=2+0,3p.$$

Решение. Приравнивая правые части этих формул, получаем $3–0,2p=2+0,3p$. Отсюда находим $p^*=2$. Итак, равновесная цена равна 2. Далее легко находим равновесный объем: $v^*=2,6$.

Функция полезности и ее свойства

Функцией полезности $u(X)$ или *целевой функцией потребления* называется некоторая функция, соответствующая отношению предпочтения. А именно, $u(X)<u(Y)$ тогда и только тогда, когда $X<Y$. Функция полезности выражает уровень удовлетворения материальных потребностей и услуг.

Теорема Дебре. Если множество D связно, а отношение предпочтения непрерывно, то функция полезности существует.

Функция полезности обладает следующими свойствами:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ (с ростом потребления блага его предельная полезность растет).

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} < 0$ (с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется – первый закон Госсена).

3) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ (небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность).

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ (большой прирост блага при его дальнейшем увеличении полезность не увеличивает).

Из этих свойств следует, что функция полезности геометрически представляет собой возрастающую вдоль каждой оси координат и выпуклую вверх гладкую поверхность в пространстве размерности (n-1).

Ниже на рисунке 8 показан общий вид функции полезности в пространстве двух товаров.

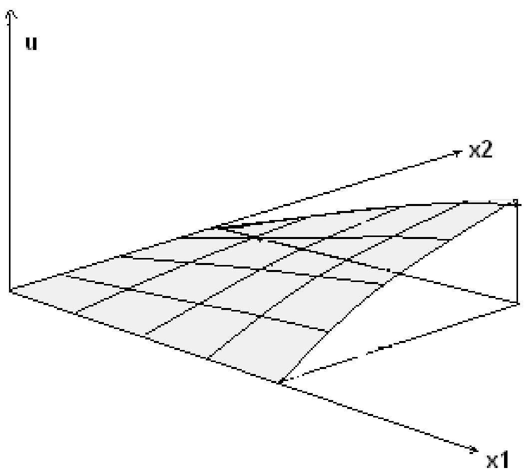


Рис. 8. График функции полезности в пространстве двух товаров

Кривые и поверхности безразличия

Рассмотрим уравнение

$$u(X) = C, \qquad C - const. \tag{2. 5}$$

Параметр C в уравнении (2.5) может выражать, например, доход или уровень материального благосостояния. С геометрической точки зрения каждому такому уравнению в пространстве потребительских благ соответствует определенная поверхность равноценных или безразличных наборов благ.

Поверхностью безразличия будем называть гиперповерхность размерности *(n–1)*, выражаемую уравнением (2.5). В частности, если *n=2*, то такую гиперповерхность будем называть *кривой безразличия.* Действительно, в пространстве двух товаров уравнение (1) принимает вид

$$u(x_1, x_2) = C, \qquad C - const. \tag{2.6}$$

В большинстве случаев уравнение (2.6) представляет собой некоторую гиперболу на плоскости.

Рассмотрим подробнее пространство двух благ, например, в виде двух агрегированных групп товаров: x_1 – продовольственные товары, x_2 – непродовольственные товары и услуги.

На рисунке 9 изображены три кривые безразличия, соответствующие различным значениям постоянной C в правой части уравнения (2.6). По определению функция полезности является возрастающей относительно своих аргументов. Следовательно, увеличение потребления любого блага при неизменном уровне потребления другого блага увеличивает значение этой функции. Таким образом, более удаленная от начала координат кривая безразличия соответствует большему значению функции полезности. Имеет место следующее порядковое отношение: $C_1<C_2<C_3$.

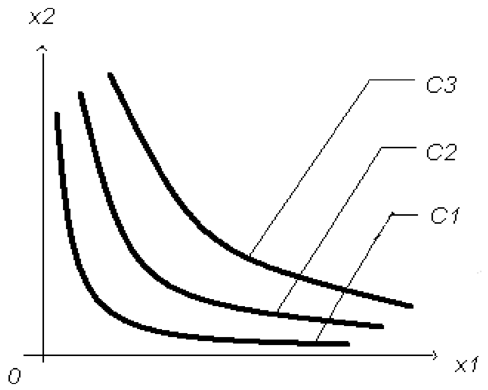


Рис. 9. Кривые безразличия при различных уровнях функции полезности

Отсюда следует важный вывод: максимальное значение функции полезности на некотором допустимом множестве надо искать на кривой безразличия, наиболее удаленной от начала координат.

Кривые безразличия не пересекаются. Действительно, если бы кривые пересекались в некоторой точке, то это означало бы, что один и тот же набор благ одновременно соответствовал бы нескольким разным уровням потребления, что противоречит свойствам функции полезности.

Кривые безразличия имеют отрицательный наклон к каждой оси координат. В самом деле, продифференцируем обе части уравнения (2.6), а именно, найдем полные дифференциалы от обеих частей этого уравнения:

$$du(x_1, x_2) = dC, \qquad C - const.$$

Из дифференциального исчисления функций многих переменных известно, что

$$du(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2, \qquad dC = 0.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0. \tag{2.7}$$

Разделим обе части уравнения (2.7) на dx_1 и выразим производную dx_2/dx_1 через частные производные функции полезности:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}. \tag{2.8}$$

Из равенства (2.8) и из свойств функции полезности вытекает, что

$$\frac{dx_2}{dx_1} < 0,$$

т. е. кривые безразличия имеют отрицательный наклон к каждой оси координат.

Экономический смысл равенства (2.8) состоит в следующем. Производная dx_2/dx_1 выражает *предельную норму замены первого товара вторым,* а частные производные функции полезности выражают предельные полезности первого и второго товара. Таким образом, предельная норма замены первого товара вторым равна отношению предельных полезностей первого и второго товара. Предельная норма замены показывает, сколько требуется единиц второго товара для того, чтобы заменить единицу первого товара.

Бюджетное множество

Бюджетным множеством B называется множество таких наборов товаров X, которые может приобрести потребитель, имея доход D. Если $P=(p_1, p_2, \dots , p_n)$ – вектор цен, то бюджетное множество можно определить так:

$$B = \{X : (P, X) \le D\}.$$

Бюджетное множество выпукло, ограничено и замкнуто. Бюджетное множество ограничено координатными плоскостями и *бюджетной плоскостью*

$$П = \{X : (P, X) = D\}.$$

В пространстве двух товаров бюджетное множество представляет собой треугольник OAB (см. рис. 10), ограниченный осями координат и *бюджетной прямой*

$$AB: \ p_1 x_1 + p_2 x_2 = D.$$

Выбор потребителя с доходом D ограничен точками заштрихованного треугольника OAB. Ясно, что точка F, представляющая собой точку касания бюджетной прямой AB и кривой безразличия K, соответствует наилучшему, оптимальному выбору потребителя.

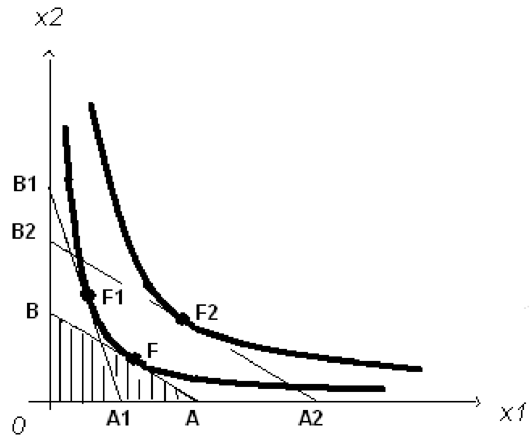


Рис. 10. Бюджетные линии при различных уровнях дохода потребителя

Пусть бюджетная прямая A_1B_1 соответствует доходу потребителя D_1, а прямая A_2B_2 – доходу D_2. Прямые AB и A_1B_1 являются огибающими одной и той же кривой безразличия K. Значит, $D=D_1$, т.е. различные бюджетные множества, а именно, треугольники OAB и OA_1B_1, соответствуют одному и тому же доходу потребителя. Точка касания F_1 также представляет собой оптимальный выбор потребителя с тем же доходом D, но другими ценами. Очевидно, что $D<D_2$, т. е. бюджетная прямая A_2B_2 соответствует большему размеру дохода, а точка F_2 – наилучшему выбору потребителя.

Пусть цены и доход фиксированы, а уровень полезности принимает значения C_1, C_2, C_3, причем $C_1< C_2< C_3$.

На рисунке 11 изображены три ситуации, связанные с возможным взаимным расположением бюджетного множества и кривой безразличия. На левом из этих рисунков представлена ситуация, когда потребитель имеет возможность при данном доходе обеспечить уровень полезности приобретенной корзины товаров больше заявленного уровня полезности C_1. На среднем из этих рисунков представлена ситуация, когда потребитель максимально использует заданный доход, обеспечив при этом заявленный уровень полезности C_2. Оптимальный набор товаров при этом соответствует координатам точки касания кривой безразличия и бюджетной прямой. На правом из этих рисунков представлена ситуация, когда потребитель не имеет возможности при данном доходе обеспечить уровень заявленной полезности C_3.

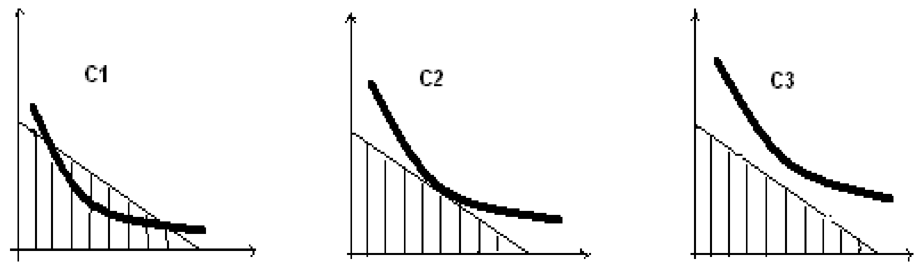


Рис. 11. Взаимное расположение бюджетного множества и кривой безразличия

Простейшая модель поведения потребителя

Потребитель всегда стремится максимизировать полезность при заданных ценах и ограниченном доходе. Простейшая модель поведения потребителя в векторной форме имеет вид:

$$\begin{gathered} u(X) \to \max, \\ (P,\, X) \le D, \\ X \ge 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Это типичная задача нелинейного программирования. Из предыдущих рассуждений вытекает, что решение этой задачи существует и принадлежит бюджетной плоскости. Следовательно, задачу (2.9) можно заменить на задачу

$$\begin{gathered} u(X) \to \max, \\ (P,\, X) = D, \\ X \ge 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Задачу (2.10) можно решить, например, известным *методом множителей Лагранжа.* Для этого надо составить функцию Лагранжа

$$L(\lambda, X) = u(X) + \lambda(D - (P, X)).$$

С помощью этой функции задача на условный максимум сводится к задаче на безусловный максимум. Множитель Лагранжа λ играет роль оптимальной оценки дохода. Из теории нелинейного программирования известны необходимые условия того, что вектор X_0 доставляет экстремум функции $u(X)$, а именно условия Куна-Таккера:

$$\frac{\partial u(X_0)}{\partial x_i} \le \lambda \cdot p_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{2.11}$$

$$(P, X_0)=D. \tag{2.12}$$

Если $x_{0i}>0$, т.е. товар приобретается, то неравенства в условиях (2.11) выполняются как равенства, а если $x_{0i}=0$, т.е. товар не приобретается, то как строгие неравенства. Соотношение (2.12) соответствует полному расходованию дохода.

Из условий (2.11) вытекает, что

$$\frac{\partial u(X_0)/\partial x_i}{p_i} = \lambda. \tag{2.13}$$

Это означает, что вектор предельных полезностей пропорционален вектору цен. Равенство (2.13) указывает, что потребители должны выбирать товары таким образом, чтобы отношение предельной полезности к цене товара было одинаковым для всех приобретаемых товаров.

Например, если один товар в три раза дороже другого, то уменьшение его на единицу компенсируется увеличением другого товара на три единицы. Следовательно, взаимозаменяемы такие количества товаров, которые стоят одинаково.

Другими словами, потребителю невыгодно потреблять одно благо вместо другого такой же стоимости, т. е. менять структуру потребления. Всякое такое изменение может лишь ухудшить его благосостояние. В этом состоит *второй закон Госсена.*

Итак, *в оптимальной корзине предельные полезности выбираемых товаров должны быть пропорциональны ценам.*

Функции спроса

В аналитических моделях спроса и потребления широко используют *функции спроса.* Так называют векторные функции, отражающие зависимость спроса на отдельные товары и услуги от ряда факторов. В простейших случаях в качестве факторов берут доход и цены. Таким образом, функция спроса имеет вид: $X=X(P,D)$. В пространстве двух товаров это двухзначная функция трех переменных $X=X(p_1,p_2,D)$.

Рассмотрим случай, когда вектор цен $P=(p_1,p_2)$ остается неизменным, а меняется только доход D. Тогда $X=X(D)$, т. е. функция спроса является двухзначной функцией одной переменной или однофакторной функцией. Очевидно, что функция спроса является возрастающей функцией относительно дохода D. В этом случае бюджетные прямые *параллельны* между собой, причем большему доходу соответствует прямая, более удаленная от начала координат.

На рисунке 12 бюджетным прямым A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 соответствуют доходы D_1, D_2, D_3. Тогда справедливо неравенство:

$$D_1<D_2<D_3.$$

Ясно, что при нулевом доходе спрос на оба товара будет нулевым. Кривая E, соединяющая начало координат и точки касания бюджетных прямых с соответствующими кривыми безразличия, является графическим отображением функции спроса от дохода при заданном векторе цен.

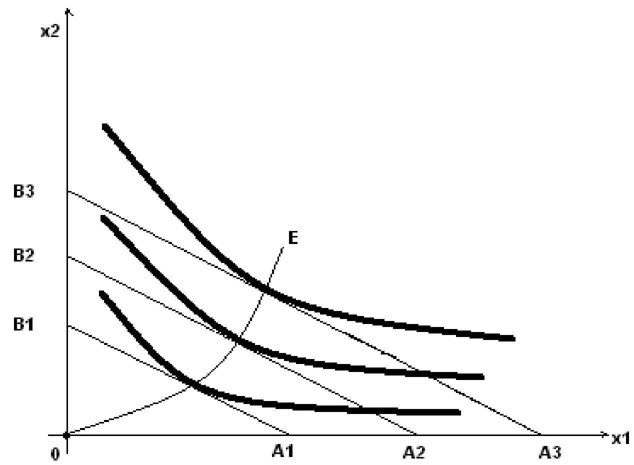


Рис. 12. График функции спроса от дохода при заданном векторе цен

Такие однофакторные векторные функции спроса широко применяются при анализе покупательского спроса. Соответствующие им кривые называются *кривыми Энгеля.*

Если спрос на товар примерно пропорционален доходу, то кривая Энгеля линейна, т. е. представляет собой прямую. Если спрос на товар возрастает более высокими темпами, то кривая Энгеля выпукла вниз, а если более низкими темпами, то выпукла вверх. Кривые Энгеля в этих трех случаях представлены на рисунке 13.

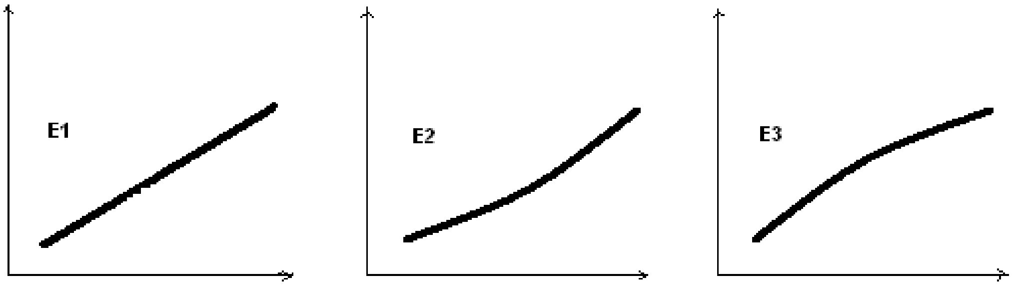


Рис. 13. Различные виды кривых Энгеля

Рассмотрим *функции Торнквиста* для трех групп товаров:

• товары первой необходимости;

• товары второй необходимости;

• предметы роскоши.

Функция Торнквиста для товаров первой необходимости имеет вид:

$$y = \frac{a \cdot D}{D + e}. \tag{2.14}$$

Геометрически эта функция выражает гиперболу с асимптотой $y=a$. Это означает, что с ростом дохода спрос на товары первой необходимости замедляется и имеет пределом величину a.

Функция Торнквиста для товаров второй необходимости имеет вид:

$$y = \frac{b \cdot (D - f)}{D + g} \qquad (f < D). \tag{2.15}$$

Геометрически эта функция также выражает гиперболу с асимптотой $y=b$. С ростом дохода спрос на товары второй необходимости также замедляется и имеет пределом величину b. Однако эта величина более высокого уровня, т.е. $a<b$.

Заметим также, что спрос на товары второй необходимости появляется лишь после того, как доход достигнет величины e.

Функция Торнквиста для предметов роскоши имеет вид:

$$y = \frac{c \cdot D \cdot (D - h)}{D + k} \qquad (h < D). \tag{2.16}$$

Геометрически эта функция выражает гиперболу, не имеющую асимптоты при $D \to \infty$. Спрос на предметы роскоши появляется лишь после того, как доход достигнет достаточно большой величины h.

График такой гиперболы является выпуклым вниз, значит, функция быстро возрастает. Графики всех трех функций Торнквиста (2.14 – 2.16) представлены ниже на рисунке 14.

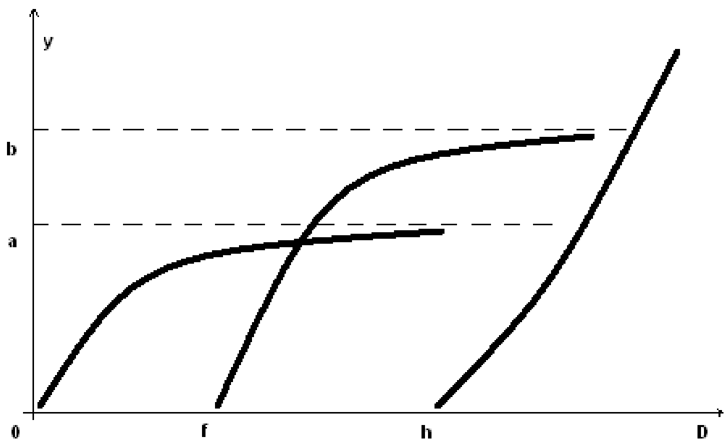


Рис. 14. Графики функций Торнквиста

При анализе зависимости спроса от дохода важную роль играют коэффициенты эластичности. Такой коэффициент показывает относительное изменение спроса при изменении дохода, если другие факторы неизменны.

Коэффициент эластичности спроса от дохода вычисляется по формуле:

$$E(D) = \frac{dX}{dD} \cdot \frac{D}{X},$$

где $X=X(D)$ – функция спроса от дохода. Найдем коэффициенты эластичности спроса на товары первой необходимости, если спрос описывается функцией (2.14). А именно,

$$E_1(D) = \left(\frac{aD}{D+e}\right)' \cdot \frac{D}{\left(\dfrac{aD}{D+e}\right)} = \frac{a(D+e) - aD}{(D+e)^2} \cdot \frac{D(D+e)}{aD} =$$

$$= \frac{aD + ae - aD}{(D+e) \cdot a} = \frac{ae}{(D+e) \cdot a} = \frac{e}{D+e}.$$

Найдем коэффициенты эластичности спроса на товары второй необходимости, если спрос описывается функцией (2.15). А именно,

$$E_2(D) = \left(\frac{b(D-f)}{D+g}\right)' \cdot \frac{D}{\left(\dfrac{b(D-f)}{D+g}\right)} =$$

$$= \frac{b(D+g) - b(D-f)}{(D+g)^2} \cdot \frac{D(D+g)}{b(D-f)} =$$

$$= \frac{D+g-D+f}{D+g} \cdot \frac{D}{D-f} = \frac{(g+f)D}{(D+g)(D-f)}.$$

Аналогично находятся коэффициенты эластичности спроса на предметы роскоши.

Коэффициент эластичности спроса от дохода показывает величину изменения спроса на товар в процентах при изменении дохода на 1%.

Для разных товаров коэффициенты эластичности различны. В теории потребления принято выделять четыре группы товаров в зависимости от значения коэффициента эластичности:

• малоценные товары, если $E(D)<0$;

• товары с малой эластичностью, если $0<E(D)<1$;

• товары со средней эластичностью, если $E(D)\sim 1$;

• товары с высокой эластичностью, если $E(D)>1$.

К малоценным товарам с отрицательной эластичностью спроса от дохода можно отнести, например, хлеб. К товарам с малой эластичностью можно отнести, например, основные продукты питания. К товарам со средней эластичностью можно отнести, например, одежду, обувь. К товарам с высокой эластичностью можно отнести, например, автомобили, яхты.

Более подробно с моделями потребления можно ознакомиться в [1; 2; 4; 7].

Контрольные вопросы

1. Что такое функция полезности и в чем ее экономический смысл?
2. Каковы свойства функции полезности?
3. Каков геометрический вид функции полезности в двумерном пространстве?
4. Что такое кривая безразличия в пространстве двух товаров?
5. Каковы свойства кривых безразличия?
6. Как выражается предельная норма замены одного товара другим и в чем ее экономический смысл?
7. Что такое бюджетное множество и каков его вид?
8. Каково взаимное расположение бюджетного множества и кривой безразличия, если потребитель при данном доходе обеспечивает уровень полезности приобретенной корзины товаров больше заявленного?
9. Каково взаимное расположение бюджетного множества и кривой безразличия, если потребитель при данном доходе обеспечивает уровень полезности приобретенной корзины товаров в соответствии с заявленным уровнем?
10. Каково взаимное расположение бюджетного множества и кривой безразличия, если потребитель при данном доходе не обеспечивает уровень полезности приобретенной корзины товаров?
11. Как выглядит простейшая модель поведения потребителя?
12. Как решается задача потребителя методом множителей Лагранжа?
13. Как формулируется второй закон Госсена?
14. Что такое функция спроса от дохода?
15. Что называется кривой Энгеля и каков ее геометрический вид?
16. В каком случае кривая Энгеля линейна, выпукла вверх, выпукла вниз?
17. Каков аналитический и графический вид функции Торнквиста для товаров первой необходимости?
18. Каков аналитический и графический вид функции Торнквиста для товаров второй необходимости?

19. Каков аналитический и графический вид функции Торнквиста для предметов роскоши?

20. Какие группы товаров выделяют в теории потребления в зависимости от коэффициента эластичности?

Варианты заданий

1. По данным статистики спрос на газ выражается формулой $d=d(p_1,p_2)$, а предложение формулой $s=s(p_1,p_2)$, где p_1 – цена на нефть, а p_2 – цена на газ.

1) При каких ценах на нефть и газ объемы спроса и предложения газа будут равны V?
2) На сколько процентов изменится объем продажи газа при увеличении цены на нефть на 20%?

2. По заданной функции полезности $u = u(x_1, x_2)$ и вектору цен $P=(p_1,p_2)$ найти аналитическое представление векторной однофакторной функции спроса $X=X(D)$ от дохода и изобразить на графике кривую Энгеля.

Вариант 0

1.	$d = 4p_1 - 5p_2 \quad s = 14 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 40$
2.	$u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \quad P = (2,3)$

Вариант 1

1.	$d = 4{,}2p_1 - 5{,}1p_2 \quad s = 11{,}8 + 0{,}5p_1 + 2{,}3p_2 \quad V = 42$
2.	$u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \quad P = (4,3)$

Вариант 2

1.	$d = 4{,}3p_1 - 5{,}1p_2 \quad s = 12{,}4 + 0{,}4p_1 + 2p_2 \quad V = 43$
2.	$u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1^{\,3} x_2} \quad P = (2,3)$

Вариант 3

1.	$d = 3{,}9p_1 - 5p_2 \quad s = 13 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 38$
2.	$u(x_1, x_2) = \sqrt[5]{x_1 x_2^{\,4}} \quad P = (4,3)$

Вариант 4

1.	$d = 4{,}5p_1 - 5p_2 \quad s = 12{,}8 + 0{,}52p_1 + 2{,}2p_2 \quad V = 50$
2.	$u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \quad P = (7,3)$

Вариант 5

1. $d = 3{,}7p_1 - 4{,}9p_2 \quad s = 11{,}6 + 0{,}4p_1 + 2{,}1p_2 \quad V = 47$
2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1^{\,3} x_2} \qquad P = (2, 5)$

Вариант 6

1. $d = 4{,}1p_1 - 5{,}6p_2 \quad s = 12{,}2 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 48$
2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[5]{x_1^{\,2} x_2^{\,3}} \qquad P = (2, 3)$

Вариант 7

1. $d = 3{,}8p_1 - 5p_2 \quad s = 12 + 0{,}4p_1 + 2p_2 \quad V = 45$
2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \qquad P = (4, 9)$

Вариант 8

1. $d = 4{,}7p_1 - 5p_2 \quad s = 12{,}5 + 0{,}59p_1 + 2{,}1p_2 \quad V = 43$
2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[5]{x_1^{\,3} x_2^{\,2}} \qquad P = (2, 3)$

Вариант 9

1. $d = 3{,}9p_1 - 4{,}7p_2 \quad s = 13{,}4 + 0{,}5p_1 + 2{,}2p_2 \quad V = 40$
2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \qquad P = (7, 3)$

Вариант 10

1. $d = 4{,}1p_1 - 5p_2 \quad s = 12{,}1 + 0{,}5p_1 + 2{,}3p_2 \quad V = 50$
2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[5]{x_1 x_2^{\,4}} \qquad P = (2, 3)$

Вариант 11

1. $d = 3{,}5p_1 - 5p_2 \quad s = 12 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 60$
2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[5]{x_1^{\,4} x_2} \qquad P = (2, 1)$

Вариант 12

1. $d = 4p_1 - 4{,}3p_2 \quad s = 10 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 75$
2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \qquad P = (1, 3)$

Вариант 13

1. $d = 4p_1 - 5p_2 \quad s = 12 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 70$ 2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\ 3}} \quad P = (8,3)$

Вариант 14

1. $d = 4{,}2p_1 - 5p_2 \quad s = 12{,}7 + 0{,}59p_1 + 2{,}4p_2 \quad V = 40$ 2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2^{\ 2}} \quad P = (2,3)$

Вариант 15

1. $d = 4p_1 - 5{,}3p_2 \quad s = 14{,}1 + 0{,}52p_1 + 2p_2 \quad V = 55$ 2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\ 3}} \quad P = (2,3)$

Вариант 16

1. $d = 4p_1 - 5{,}1p_2 \quad s = 12 + 0{,}5p_1 + 1{,}8p_2 \quad V = 53$ 2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\ 3}} \quad P = (2,5)$

Вариант 17

1. $d = 4{,}7p_1 - 5p_2 \quad s = 12{,}9 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 41$ 2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\ 3}} \quad P = (7,3)$

Вариант 18

1. $d = 4{,}4p_1 - 5p_2 \quad s = 13 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 44$ 2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2^{\ 2}} \quad P = (5,3)$

Вариант 19

1. $d = 4p_1 - 5{,}5p_2 \quad s = 10{,}7 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 39$ 2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\ 3}} \quad P = (10,3)$

Вариант 20

1. $d = 4{,}1p_1 - 5p_2 \quad s = 12 + 0{,}5p_1 + 2{,}3p_2 \quad V = 49$ 2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\ 3}} \quad P = (2,3)$

Вариант 21

1. $d = 4{,}8p_1 - 5p_2 \quad s = 12 + 0{,}4p_1 + 2p_2 \quad V = 61$

2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^{\,2} x_2} \quad P = (2{,}1)$

Вариант 22

1. $d = 4{,}7p_1 - 5p_2 \quad s = 12{,}3 + 0{,}59p_1 + 2p_2 \quad V = 47$

2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[5]{x_1 x_2^{\,4}} \quad P = (2{,}3)$

Вариант 23

1. $d = 4p_1 - 4{,}7p_2 \quad s = 12 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 48$

2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \quad P = (5{,}3)$

Вариант 24

1. $d = 4{,}3p_1 - 5p_2 \quad s = 12{,}9 + 0{,}5p_1 + 2{,}5p_2 \quad V = 40$

2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \quad P = (8{,}3)$

Вариант 25

1. $d = 4p_1 - 5{,}8p_2 \quad s = 12 + 0{,}6p_1 + 2p_2 \quad V = 50$

2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[6]{x_1 x_2^{\,5}} \quad P = (2{,}3)$

Вариант 26

1. $d = 3{,}8p_1 - 6p_2 \quad s = 12 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 42$

2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[6]{x_1^{\,5} x_2} \quad P = (2{,}3)$

Вариант 27

1. $d = 4p_1 - 4{,}4p_2 \quad s = 10 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 75$

2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \quad P = (1{,}3)$

Вариант 28

1. $d = 4p_1 - 6p_2 \quad s = 12 + 0{,}5p_1 + 2p_2 \quad V = 71$

2. $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1 x_2^{\,3}} \quad P = (8{,}3)$

Вариант 29

1.	$d = 4{,}2p_1 - 4p_2 \quad s = 12{,}7 + 0{,}59p_1 + 2{,}4p_2 \quad V = 43$
2.	$u(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2^{\,2}} \quad P = (2,3)$

Вариант 30

1.	$d = 4p_1 - 5{,}7p_2 \quad s = 12 + 0{,}6p_1 + 3p_2 \quad V = 52$
2.	$u(x_1, x_2) = \sqrt[6]{x_1 x_2^{\,5}} \quad P = (2,3)$

Решение варианта 0

Задание 1. (см. пример выше).

Задание 2. При заданных ценах *P*=(2,5) и полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1^{\,3} x_2}$ найти аналитическое выражение векторной функции спроса от дохода *X=X(D).*

Решение. Модель поведения потребителя в этом случае такова:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x_1^{\,3} x_2} \to \max \\ 2x_1 + 5x_2 = D \\ x_1,\, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(\lambda, x_1, x_2) = \sqrt{x_1^{\,3} x_2} + \lambda(D - 2x_1 - 5x_2).$$

Продифференцируем ее по трем переменным $\lambda,\, x_1,\, x_2$:

$$L_\lambda^{'}(\lambda, x_1, x_2) = D - 2x_1 - 5x_2,\; L_1^{'}(\lambda, x_1, x_2) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{x_2}{x_1}} - 2\lambda\,,$$

$$L_2^{'}(\lambda, x_1, x_2) = \frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{x_1^{\,3}}{x_2^{\,3}}} - 5\lambda.$$

Приравняем нулю каждую производную и решим систему нелинейных уравнений:

$$2x_1 + 5x_2 = D, \quad \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{x_2}{x_1}} = 2\lambda, \quad \frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{x_1^{\,3}}{x_2^{\,3}} = 5\lambda}.$$

Исключим параметр λ из первых двух уравнений. Для этого разделим первое уравнение на второе:

$$3\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{5} \quad \textit{или} \quad 2x_1 = 15x_2.$$

Решая совместно с третьим уравнением, получаем: $x_1=3D/8$, $x_2=D/20$. Итак, функция спроса от дохода имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}375 \\ 0{,}05 \end{pmatrix} D.$$

Если, например, D=80, то точка спроса имеет координаты: (30, 4). Если D=160, то точка спроса имеет координаты: (60, 8). Кривая Энгеля в этом случае – это прямая x_2=(2/15)x_1 (см. рис. 15).

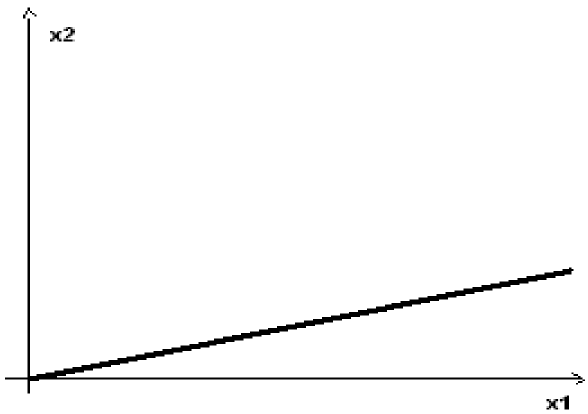


Рис. 15. График кривой Энгеля

3. МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС

Теоретические сведения

Балансовые модели начали применяться в нашей стране еще в начале прошлого века. В середине 30-тых годов теория балансовых моделей была разработана американским ученым русского происхождения В.В. Леонтьевым [8]. Однако отсутствие мощной вычислительной техники не позволило распространить балансовый метод в практику экономических вычислений в те годы.

Балансовые модели широко применяются во многих странах мира в задачах экономического анализа, планирования и прогнозирования.

Таблица межотраслевого баланса

Модель межотраслевого баланса является основой многих линейных моделей производства. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из n отраслей, причем каждая отрасль производит только один продукт.

В настоящее время под отраслью понимают экономическую абстракцию, не обязательно существующую реально в виде каких-то организационных форм, например, в виде треста, объединения и т. д. Такая идеализация позволяет провести достаточно подробный анализ сложившейся технологической структуры производства и распределения продукции.

Обозначим через x_{ij} ($i=1, 2, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, n$) величину *межотраслевых потоков*, т. е. объем продукции i-той отрасли, используемой j-той отраслью, через x_j объем *валового продукта* j-той отрасли. Через y_i обозначим величину конечного продукта. Под *конечной продукцией* будем понимать продукцию, не подлежащую дальнейшей переработке, т. е. не предназначенную на текущее производственное потребление. Конечная продукция включает предметы личного и общественного непроизводственного потребления, а также инвестиционные средства. Через s_j обозначим величину условно-чистого продукта. *Условно-чистая продукция* включает амортизацию, оплату труда, прибавочный продукт. Эти величины заносятся в *таблицу межотраслевого баланса* (см. ниже).

В зависимости от единиц измерения различают *натуральный и стоимостной межотраслевой баланс.*

Потребители, Производители	*1 2 n*	*Конеч. выпуск*	*Вал. выпуск*
1 *2* .. *n*	$x_{11}\ x_{12}\ x_{1n}$ $x_{21}\ x_{22}\ x_{2n}$ . . . . $x_{n1}\ x_{n2}\ x_{nn}$	y_1 y_2 y_n	x_1 x_2 x_n
Условно-чистый выпуск	$s_1\ s_2\ s_n$	Σ	Σ
Валовой выпуск	$x_1\ x_2\ x_n$	Σ	

Каждая строка этой таблицы соответствует *балансу по производству,* а именно, объем производства данного вида продукции складывается из текущего производственного потребления и конечного продукта. Система балансовых уравнений по производству имеет вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ \ldots \ + x_{1n} + y_1 = x_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ \ldots \ + x_{2n} + y_2 = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1} + x_{n2} + \ \ldots \ x_{nn} + y_n = x_n \end{cases}. \tag{3.1}$$

Каждый столбец этой таблицы соответствует *балансу по потреблению,* а именно, потребление отрасли складывается из затрат промежуточных продуктов и условно-чистой продукции. Система балансовых уравнений по потреблению имеет вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ \ldots \ + x_{n1} + s_1 = x_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ \ldots \ + x_{n2} + s_2 = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ \ldots \ + x_{nn} + s_n = x_n \end{cases}. \tag{3.2}$$

Развернутые системы линейных алгебраических уравнений (3.1) и (3.2) можно представить в следующей сокращенной форме:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.3}$$

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.4}$$

В замкнутой экономической системе *суммарный объем производства равен суммарному объему потребления.* Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} s_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из этого соотношения сразу же вытекает следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} s_j \ . \tag{3.6}$$

Равенство (3.6) означает, что *суммарный объем конечного продукта равен суммарному объему условно-чистого продукта.*

Технологическая матрица и ее свойства

Сделаем предположение, что затраты отрасли пропорциональны ее объему производства:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \qquad (i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.7}$$

Коэффициенты пропорциональности a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат.* Экономический смысл коэффициентов прямых затрат состоит в следующем: *для производства j-той отраслью единицы j-того продукта требуется $a_{ij} \geq 0$ единиц i-того продукта, производимого i-той отраслью.*

После подстановки (3.7) в (3.1) получаем:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) . \tag{3.8}$$

В развернутой форме система (8) выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n \end{cases} . \tag{3.9}$$

Система (3.8) или (3.9) называется *математической моделью межотраслевого баланса производства продукции.* Из этой системы, например методом Гаусса-Жордана, можно рассчитать объем валового выпуска продукции каждой отрасли по известным коэффициентам прямых затрат и конечной продукции.

Технологической матрицей (матрицей прямых затрат продукции) называется матрица, составленная из коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} . \tag{3.10}$$

Матрица *A* представляет собой сложившуюся структуру межотраслевых связей, существующую технологию общественного производства. Если сравнить технологические матрицы через определенные промежутки времени, то можно проследить направления изменения и развития технологии.

Свойства коэффициентов технологической матрицы:

1. $0 \leq a_{ij} \leq 1, \qquad (i, j = 1,2,\ldots,n).$

2. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$

Первое свойство вытекает из определения коэффициентов прямых затрат продукции. В самом деле, величина межотраслевого потока x_{ij} не может превосходить величину валового выпуска x_j, поэтому $0 \leq x_{ij} = a_{ij}x_j \leq x_j$, откуда и следует первое свойство.

Второе свойство вытекает из следующих соображений. Рассмотрим равенство (3.4)

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + s_j \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

и заменим в нем все межотраслевые потоки выражениями через коэффициенты прямых затрат по формулам (3.7). Получаем

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + s_j \qquad (j = 1,2,\dots,n).$$

После вынесения x_j за скобку имеем

$$x_j = (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) x_j + s_j \qquad (j = 1,2,\dots,n).$$

Учитывая, что $s_j > 0$, приходим к неравенству

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) x_j < x_j \qquad (j = 1,2,\dots,n),$$

откуда и следует требуемое свойство. Требование положительности условно-чистой продукции $s_j > 0$ является естественным, т. к. одной из ее составляющих является заработная плата.

Если бы имело место противоположное неравенство, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 1 \qquad (j = 1,2,\dots,n),$$

то это бы означало, что затраты всех отраслей экономической системы на 1 рубль произведенной продукции составляют сумму, превосходящую 1 рубль. Такое производство нельзя считать рентабельным.

Итак, в силу свойства 2 *сумма элементов каждого столбца технологической матрицы меньше единицы.*

Балансовое уравнение Леонтьева

Матрицей валового выпуска называется вектор-столбец, составленный из величин валовых выпусков продукции каждой отрасли:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Матрицей конечного продукта называется вектор-столбец, составленный из величин конечной продукции каждой отрасли:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (3.12)$$

С учетом обозначений (3.10–3.12) система (3.9) примет следующую матричную форму:

$$X = AX + Y. \qquad (3.13)$$

Решим систему (3.13) относительно X. Для этого перепишем ее так:

$$X - AX = Y. \qquad (3.14)$$

Вынесем матрицу X за скобку. Для этого учтем, что $X=EX$, где E – единичная матрица того же размера. Далее получаем

$$X–AX= EX–AX=(E–A)X.$$

Таким образом,

$$(E–A)X=Y. \qquad (3.15)$$

Уравнение (3.15) носит название *балансового уравнения Леонтьева.*

Всегда ли существует решение уравнения (3.15)? Для ответа на этот вопрос введем понятие продуктивности матрицы.

Продуктивность технологической матрицы

Матрица A называется *продуктивной,* если найдется такой вектор-столбец $X>0$, для которого выполняется неравенство

$$AX<X. \qquad (3.16)$$

Если A – технологическая матрица, то

$$AX=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\\ \cdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad AX=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}x_{1j}\\ \sum_{j=1}^{n}x_{2j}\\ \cdots\\ \sum_{j=1}^{n}x_{nj}\end{pmatrix}.$$

Такая матрица выражает совокупные затраты в сфере производства.

Неравенство (3.16) в этом случае означает, что существует вектор-столбец X валового выпуска продукции отраслей рассматриваемой экономической системы, при котором каждого продукта выпускается больше, чем затрачивается на его производство. Следовательно, при такой технологии создается положительный прибавочный продукт $X–AX$, т. е. конечная продукция Y каждой отрасли.

На практике для проверки технологической матрицы на продуктивность удобно использовать следующий достаточный признак.

Если технологическая матрица A такова, что сумма элементов каждой строки не превосходит единицы и хотя бы для одной строки строго меньше единицы,

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\le 1 \qquad (i=1,2,\ldots,n), \qquad (3.17)$$

то матрица A продуктивна.

В справедливости неравенства (3.17) можно убедиться, например, положив в системе (3.9) $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$. Тогда

$$1=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+y_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

и с учетом того, что $y_i \geq 0$, приходим к (3.17).

Так, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

продуктивна, а матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

не является продуктивной. Однако обе матрицы не являются технологическими, так как сумма элементов второго столбца этих матриц не меньше единицы. Примером продуктивной технологической матрицы может служить матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Экономический смысл достаточного условия (3.17) состоит в следующем. Каждый элемент матрицы прямых затрат продукции показывает, какова стоимость продукции i-ой отрасли, расходуемой j-той отраслью в расчете на 1 рубль своей продукции. В этом случае величина

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

выражает суммарную величину расхода продукции i-той отрасли всеми отраслями при условии, что каждая их них выпускает объем продукции стоимостью 1 рубль. Условие $r_i<1$ $(i=1,2,\ldots n)$ означает, что i-тая отрасль способна удовлетворить запросы всех отраслей данной экономической системы.

Матрица полных затрат продукции

Из матричного уравнения (3.15) можно легко найти искомый вектор X. Для этого обе его части умножим слева на матрицу $(E-A)^{-1}$. Получаем

$$(E-A)^{-1} (E-A)X=(E-A)^{-1}Y.$$

Как известно, произведение взаимно обратных матриц дает единичную матрицу. А именно,

$$(E-A)^{-1} (E-A)=E.$$

Следовательно, $EX=(E-A)^{-1}Y$ или

$$X=(E-A)^{-1}Y. \tag{3.20}$$

Матрицей полных затрат называется матрица

$$B=(E-A)^{-1}. \tag{3.21}$$

С помощью этой матрицы уравнение (3.20) запишется так:

$$X=BY. \tag{3.22}$$

В развернутой форме уравнение (3.22) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n \end{cases}. \qquad (3.23)$$

Итак, зная матрицу полных затрат и матрицу конечной продукции, можно найти матрицу валовой продукции.

Имеет место следующее представление матрицы полных затрат продукции *B* в виде матричного ряда по степеням продуктивной технологической матрицы A:

$$B=E+A+A^2+A^3+\ldots+A^n+\ldots \qquad (3.24)$$

Равенство (3.24) вытекает из следующих соображений. Справедливо следующее матричное равенство

$$(E-A)(E+A+A^2+A^3+\ldots+A^{n-1})=E-A^n.$$

Оно легко проверяется с помощью известных свойств матриц. Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$ и используя очевидное предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0,$$

получаем

$$(E-A)(E+A+A^2+A^3+\ldots+A^{n-1}\ldots)=E.$$

Из этого равенства следует, что матричный ряд $E+A+A^2+A^3+\ldots+A^{n-1}\ldots$ представляет собой матрицу, обратную по отношению к матрице $E-A$. Таким образом,

$$E+A+A^2+A^3+\ldots+A^n+\ldots=(E-A)^{-1}. \qquad (3.25)$$

что и доказывает равенство (3.24).

Замечание. Матричное равенство (3.24) напоминает известное в математике равенство, выражающее сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1+a+a^2+a^3+\ldots=\frac{1}{1-a} \qquad (|a|<1).$$

Итак, если технологическая матрица *A* продуктивна, то существует неотрицательная матрица полных затрат продукции *B,* и, следовательно, балансовое уравнение Леонтьева (3.15) имеет решение.

Свойства коэффициентов матрицы полных затрат продукции:

1. $b_{ij} \geq 0 \qquad (i, j = 1,2,\ldots,n),$

2. $b_{ii} \geq 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$

Эти свойства немедленно вытекают из представления (3.24) матрицы полных затрат продукции. В частности, свойство 2 означает, что *все элементы главной диагонали матрицы полных затрат продукции больше единицы.*

Каков экономический смысл матрицы полных затрат?

Предположим, что произведена лишь одна единица конечной продукции первой отрасли, т. е.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем, сколько продукции должна произвести каждая из отраслей, чтобы обеспечить выпуск лишь одной единицы конечной продукции первой отрасли. Подставим эти значения в систему (3.23). Тогда получим

$$\begin{cases} x_1 = b_{11} \\ x_2 = b_{21} \\ . \quad . \quad . \\ x_n = b_{n1} \end{cases}.$$

В правой части этой системы стоят элементы первого столбца матрицы полных затрат продукции *B*. Они показывают количество валовой продукции, которое должна произвести каждая из отраслей, чтобы получить только одну единицу конечной продукции первой отрасли.

Далее предположим, что произведена лишь одна единица конечной продукции второй отрасли, т. е.

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем, сколько продукции должна произвести каждая из отраслей, чтобы обеспечить выпуск лишь одной единицы конечной продукции второй отрасли. Подставим эти значения в систему (3.23). Тогда получим

$$\begin{cases} x_1 = b_{12} \\ x_2 = b_{22} \\ . \quad . \quad . \\ x_n = b_{n2} \end{cases}.$$

В правой части этой системы стоят элементы второго столбца матрицы полных затрат продукции *B*. Они показывают количество валовой продукции, которое должна произвести каждая из отраслей, чтобы получить только одну единицу конечной продукции второй отрасли.

Рассуждая по аналогии, можно выяснить экономический смысл других столбцов матрицы полных затрат продукции.

Итак, коэффициенты b_{ij} матрицы полных затрат продукции показывают потребность в валовой продукции i-той отрасли для производства *единицы конечной продукции* j-той отрасли.

Косвенные затраты

Полные затраты на производство продукции подразделяются на прямые и косвенные. Прямые затраты выражают количество средств производства, израсходованных непосредственно на производство продукции, а косвенные затраты выражают количество средств, относящихся к предшествующим стадиям производства.

В качестве примера рассмотрим затраты электроэнергии на производство проката. Количество электроэнергии, непосредственно израсходованное на прокатном стане, представляет собой прямые затраты. В процессе производства проката, кроме электроэнергии, используются сталь и другие средства производства, на выпуск которых также необходима электроэнергия. Далее, на выплавку стали расходуется определенное количество электроэнергии и чугуна. Для производства чугуна нужна руда и снова электроэнергия и т. д.

Затраты электроэнергии при производстве стали представляют собой прямые затраты, но эти же затраты при производстве проката являются косвенными затратами первого порядка.

Затраты электроэнергии при производстве чугуна представляют собой прямые затраты, но эти же затраты при производстве стали являются косвенными затратами первого порядка, а при производстве проката – косвенными затратами второго порядка.

Из матричного равенства (3.24) следует, что косвенные затраты C можно выразить следующей формулой:

$$C=A^2+A^3+\ldots+A^n+\ldots \tag{3.26}$$

Таким образом, равенство (3.24) запишется так:

$$B=E+A+C. \tag{3.27}$$

Численный подсчет коэффициентов косвенных затрат можно осуществить по *дереву затрат.* Такое дерево неограниченно разветвляется, однако на практике ограничиваются лишь косвенными затратами первого или второго порядков.

Учет изменения конечного выпуска

Как изменится объем валового выпуска продукции при изменении конечного выпуска? Для ответа на этот вопрос введем в рассмотрение два вектор-столбца. Обозначим через Y^* скорректированный вектор конечной продукции, а через ΔY – вектор изменений конечной продукции по сравнению с плановым вектором Y:

$$Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \cdots \\ y_n^* \end{pmatrix} \quad \Delta Y = \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \cdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$Y^* = Y + \Delta Y = \begin{pmatrix} y_1 + \Delta y_1 \\ y_2 + \Delta y_2 \\ \dots \\ y_n + \Delta y_n \end{pmatrix}.$$

Изменение вектора конечной продукции на величину ΔY повлечет изменение вектора валовой продукции на некоторую величину ΔX.

Как найти новую величину X^*

$$X^* = X + \Delta X = \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ \dots \\ x_n + \Delta x_n \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

валового выпуска продукции?

Уравнение (3.22) относительно скорректированных величин X^* и Y^* примет вид

$$X^*=BY^*$$

или

$$X+\Delta X=B(Y+ \Delta Y).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$X+\Delta X=BY+B\,\Delta Y.$$

В силу уравнения (3.22) относительно плановых величин X и Y имеем: $X=BY$. С учетом этого равенства приходим к следующему равенству

$$\Delta X=B\,\Delta Y. \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в (3.28), получаем новый *скорректированный вектор валовой продукции.*

Таким образом, зная матрицу полных затрат продукции, можно, не решая заново систему балансовых уравнений, вычислять вектор валового продукта по заданному вектору конечного продукта.

Более подробно с балансовыми моделями и их применением в экономике можно ознакомиться в [4; 7; 8].

Контрольные вопросы

1. Каков содержательный смысл балансовой модели?
2. Что называется межотраслевым потоком?
3. Что такое конечная продукция отрасли?
4. Что такое условно-чистая продукция отрасли?
5. Как составляется таблица межотраслевого баланса?
6. Как формируется система балансовых уравнений по производству?
7. Как формируется система балансовых уравнений по потреблению?

8. Как соотносятся суммарный объем производства и потребления в замкнутой экономической системе?

9. Как вводятся коэффициенты прямых затрат продукции?

10. В чем состоит экономический смысл коэффициентов прямых затрат продукции?

11. Каков вид системы балансовых уравнений производства продукции?

12. Что такое технологическая матрица?

13. Каковы основные свойства технологической матрицы?

14. Каков вид балансового уравнения Леонтьева в матричной форме?

15. Всегда ли уравнение Леонтьева имеет решение?

16. Какими математическими методами можно решить уравнение Леонтьева?

17. Какая матрица называется продуктивной?

18. Всякая ли технологическая матрица является продуктивной?

19. Каковы достаточные признаки продуктивности матрицы?

20. В чем состоит экономический смысл достаточного условия продуктивности технологической матрицы?

21. Как определяется матрица полных затрат продукции?

22. Каков экономический смысл коэффициентов матрицы полных затрат продукции?

23. При каком условии существует матрица полных затрат продукции?

24. Как выражается валовой выпуск через конечный выпуск и матрицу полных затрат продукции?

25. Что представляет собой матрица косвенных затрат продукции?

26. Как найти новый объем выпуска по измененному вектору конечной продукции, не решая заново систему балансовых уравнений?

Варианты заданий

Задание. Предприятие производит однородную продукции, соответственно, в трех филиалах. Режим его работы определен технологической матрицей A и плановым вектором конечной продукции Y. Требуется:

1. Составить балансовые уравнения производства по всем филиалам.
2. Найти плановые объемы валового выпуска продукции.
3. Вычислить матрицу полных затрат продукции.
4. Найти матрицу косвенных затрат продукции.
5. Найти межотраслевые потоки (потоки продукции между филиалами).
6. Определить условно-чистую продукцию по каждому филиалу.
7. Составить таблицу межотраслевого баланса.
8. Найти объем валового выпуска продукции, если конечная продукция первого филиала увеличивается на 30%, второго не меняется, а третьего уменьшается на 20%.

Вариант 0	$A=\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,1 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,1 \\ 6,3 \\ 5,5 \end{pmatrix}$

Вариант 1	$A=\begin{pmatrix} 0,01 & 0,5 & 0,11 \\ 0,61 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0,31 & 0,21 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,11 \\ 6,3 \\ 5,5 \end{pmatrix}$

Вариант 2	$A=\begin{pmatrix} 0,02 & 0,5 & 0 \\ 0,62 & 0 & 0,03 \\ 0,01 & 0,32 & 0,2 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,3 \\ 6,4 \\ 5,2 \end{pmatrix}$

Вариант 3	$A=\begin{pmatrix} 0,03 & 0,53 & 0 \\ 0,63 & 0,03 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0,24 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,13 \\ 6,33 \\ 5,53 \end{pmatrix}$

Вариант 4	$A=\begin{pmatrix} 0,02 & 0,52 & 0 \\ 0,58 & 0 & 0,32 \\ 0,03 & 0,34 & 0,2 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,12 \\ 6,22 \\ 5,43 \end{pmatrix}$

Вариант 5	$A=\begin{pmatrix} 0,05 & 0,55 & 0,15 \\ 0,65 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,15 \\ 6,35 \\ 5,55 \end{pmatrix}$

Вариант 6	$A=\begin{pmatrix} 0,01 & 0,55 & 0 \\ 0,59 & 0 & 0,32 \\ 0,02 & 0,34 & 0,21 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,15 \\ 6,2 \\ 5,42 \end{pmatrix}$

Вариант 7	$A=\begin{pmatrix} 0,07 & 0,57 & 0,17 \\ 0,67 & 0,07 & 0 \\ 0 & 0,37 & 0,27 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,17 \\ 6,37 \\ 5,57 \end{pmatrix}$

Вариант 8	$A=\begin{pmatrix} 0 & 0,52 & 0 \\ 0,59 & 0 & 0,32 \\ 0,03 & 0,34 & 0,2 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2,14 \\ 6,22 \\ 5,43 \end{pmatrix}$

Вариант 9	$A = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}59 & 0{,}16 \\ 0{,}61 & 0{,}09 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}24 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}19 \\ 6{,}39 \\ 5{,}59 \end{pmatrix}$

Вариант 10	$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}52 & 0 \\ 0{,}56 & 0 & 0{,}02 \\ 0{,}03 & 0{,}34 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}15 \\ 6{,}22 \\ 5{,}43 \end{pmatrix}$

Вариант 11	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}52 & 0{,}13 \\ 0{,}64 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}36 & 0{,}27 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}18 \\ 6{,}37 \\ 5{,}56 \end{pmatrix}$

Вариант 12	$A = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}52 & 0 \\ 0{,}61 & 0 & 0{,}02 \\ 0{,}03 & 0{,}34 & 0{,}22 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}12 \\ 6{,}22 \\ 5{,}43 \end{pmatrix}$

Вариант 13	$A = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}53 & 0{,}15 \\ 0{,}67 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}39 & 0{,}21 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}12 \\ 6{,}34 \\ 5{,}56 \end{pmatrix}$

Вариант 14	$A = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}58 & 0 & 0{,}01 \\ 0{,}03 & 0{,}34 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}12 \\ 6{,}22 \\ 5{,}43 \end{pmatrix}$

Вариант 15	$A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}54 & 0{,}14 \\ 0{,}65 & 0{,}06 & 0 \\ 0 & 0{,}31 & 0{,}26 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}16 \\ 6{,}31 \\ 5{,}56 \end{pmatrix}$

Вариант 16	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}51 & 0 \\ 0{,}58 & 0 & 0{,}32 \\ 0{,}03 & 0{,}33 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}13 \\ 6{,}22 \\ 5{,}43 \end{pmatrix}$

Вариант 17	$A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}56 & 0{,}19 \\ 0{,}61 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}37 & 0{,}28 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2{,}19 \\ 6{,}38 \\ 5{,}57 \end{pmatrix}$

Вариант 18	$A = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,54 & 0 \\ 0,58 & 0 & 0,02 \\ 0,04 & 0,34 & 0,2 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 2,12 \\ 6,22 \\ 5,43 \end{pmatrix}$

Вариант 19	$A = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,52 & 0,16 \\ 0,66 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0,35 & 0,21 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 2,15 \\ 6,36 \\ 5,59 \end{pmatrix}$

Вариант 20	$A = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,54 & 0 \\ 0,58 & 0 & 0,03 \\ 0,03 & 0,34 & 0,2 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 2,12 \\ 6,2 \\ 5,43 \end{pmatrix}$

Вариант 21	$A = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,52 & 0 \\ 0,58 & 0 & 0,04 \\ 0,03 & 0,34 & 0,2 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 2,13 \\ 6,22 \\ 5,43 \end{pmatrix}$

Вариант 22	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,52 & 0 \\ 0,59 & 0 & 0,32 \\ 0,03 & 0,34 & 0,2 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 2,14 \\ 6,22 \\ 5,43 \end{pmatrix}$

Вариант 23	$A = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,59 & 0,16 \\ 0,61 & 0,09 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,24 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 2,19 \\ 6,39 \\ 5,59 \end{pmatrix}$

Вариант 24	$A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,52 & 0 \\ 0,56 & 0 & 0,02 \\ 0,03 & 0,34 & 0,2 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 2,15 \\ 6,22 \\ 5,43 \end{pmatrix}$

Вариант 25	$A = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,56 & 0,14 \\ 0,68 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0,37 & 0,21 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 2,10 \\ 6,24 \\ 5,56 \end{pmatrix}$

Вариант 26	$A=\begin{pmatrix}0{,}02 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}58 & 0 & 0{,}03\\ 0{,}03 & 0{,}35 & 0{,}2\end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix}2{,}13\\ 6{,}22\\ 5{,}49\end{pmatrix}$

Решение варианта 0

1) Составить балансовые уравнения производства

Такие уравнения выражены системой линейных алгебраических уравнений (8), которые в данном варианте примут следующий вид:

$$\begin{cases} 0{,}5x_2+0{,}1x_3+2{,}1=x_1\\ 0{,}6x_1+\qquad +6{,}3=x_2\\ 0{,}3x_2+0{,}2x_3+5{,}5=x_3\end{cases}.$$

2) Найти плановые объемы валового выпуска

Сначала составим матрицу *E–A*:

$$E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0{,}5&0{,}1\\0{,}6&0&0\\0&0{,}3&0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-0{,}5&-0{,}1\\-0{,}6&1&0\\0&-0{,}3&0{,}8\end{pmatrix}.$$

Затем для нахождения неизвестных валовых показателей приведем эту систему к каноническому виду, т. е. к виду (15).

$$\begin{cases} x_1-0{,}5x_2-0{,}1x_3=2{,}1\\ -0{,}6x_1+x_2=6{,}3\\ -0{,}3x_2+0{,}8x_3=5{,}5\end{cases}.$$

Решим систему методом Гаусса-Жордана. Согласно этому методу исходная расширенная матрица с помощью элементарных преобразований приводится к упрощенной форме, содержащей в левой ее части максимально возможное число столбцов единичной матрицы. Последовательность таких преобразований расширенной матрицы системы, выполненная в Excel, представлена ниже в таблицах.

1,000	-0,500	-0,100	2,100
-0,600	1,000	0,000	6,300
0,000	-0,300	0,800	5,500

1,000	-0,500	-0,100	2,100
0,000	0,700	-0,060	7,560
0,000	-0,300	0,800	5,500

1,000	-0,500	-0,100	2,100

0,000	1,000	-0,086	10,800
0,000	-0,300	0,800	5,500

0	0,000	-0,143	7,500
0,000	1,000	0,086	10,800
0,000	0,000	0,774	8,740

1,000	0,000	-0,143	7,500
0,000	1,000	-0,086	10,800
0,000	0,000	1,000	11,288

1,000	0,000	0,000	9,113
0,000	1,000	0,000	11,768
0,000	0,000	1,000	11,288

Итак, вектор *планового валового выпуска* X относительно запланированного конечного выпуска Y таков:

$$X = \begin{pmatrix} 9{,}113 \\ 11{,}768 \\ 11{,}288 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку полученного решения, подставив найденные значения в систему:

$$\begin{cases} 9{,}113 - 0{,}5 \cdot 11{,}768 - 0{,}1 \cdot 11{,}288 = 2{,}1 \\ -0{,}6 \cdot 9{,}113 + 11{,}768 = 6{,}3 \\ -0{,}3 \cdot 11{,}768 + 0{,}8 \cdot 11{,}288 = 5{,}5 \end{cases}.$$

Результаты проверки:

левая часть	правая часть
2,1002	2,1
6,3002	6,3
5,5	5,5

3) Вычислить матрицу полных затрат продукции

Обратим матрицу $E–A$ по следующей известной схеме:

$$E–A \rightarrow (E–A)^* \rightarrow (E–A)^{*T} \rightarrow (E–A)^{*T} / |E–A|,$$

где $(E–A)^*$ – присоединенная матрица (состоящая из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы $E–A$), $(E–A)^{*T}$ – транспонированная матрица относительно присоединенной матрицы (все строки заменены соответствующими столбцами), $|E–A|$ – определитель матрицы $E–A$.

Ниже представлена последовательность действий по обращению матрицы $E–A$ в среде *Excel*:

Исходная матрица

1	-0,5	-0,1
-0,6	1	0
0	0,3	0,8

Присоединенная матрица

0,8	0,48	0,18
0,43	0,8	0,3
0,1	0,06	0,7

Транспонированная матрица

0,8	0,43	0,1
0,48	0,8	0,06
0,18	0,3	0,7

Определитель

0,542

Обратная матрица

1,4760	0,7933	0,1845
0,8856	1,4760	0,1107
0,3321	0,5535	1,2915

Итак, матрица полных затрат продукции имеет такова:

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}476 & 0{,}793 & 0{,}185 \\ 0{,}886 & 1{,}476 & 0{,}111 \\ 0{,}332 & 0{,}554 & 1{,}292 \end{pmatrix}.$$

Проверку правильности обращения выполним с помощью пакета символьных вычислений *Maple*:

> M:=matrix(3,3,[1,-0.5,-0.1,-0.6,1,0,0,-0.3,0.8]);

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -.5 & -.1 \\ -.6 & 1 & 0 \\ 0 & -.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

> evalm(1/M);

$$\begin{bmatrix} 1.476014760 & 0.7933579336 & 0.1845018450 \\ 0.8856088561 & 1.476014760 & 0.1107011070 \\ 0.3321033210 & 0.5535055351 & 1.291512915 \end{bmatrix}$$

С помощью найденной матрицы полных затрат продукции проверим равенство (22):

> B:=matrix(3,3,[1.476,0.793,0.185,0.886,1.476,0.111,0.332,0.554,1.292]);

$$B := \begin{bmatrix} 1.476 & 0.793 & 0.185 \\ 0.886 & 1.476 & 0.111 \\ 0.332 & 0.554 & 1.292 \end{bmatrix}$$

> Y:=matrix(3,1,[2.1,6.3,5.5]);

$$Y := \begin{bmatrix} 2.1 \\ 6.3 \\ 5.5 \end{bmatrix}$$

> evalm(B&*Y);

$$\begin{bmatrix} 9.1130 \\ 11.7699 \\ 11.2934 \end{bmatrix}$$

4) Найти матрицу косвенных затрат продукции

Из уравнения (27) получаем, что

$$C=B–E–A$$

или в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} 1{,}476 & 0{,}793 & 0{,}185 \\ 0{,}886 & 1{,}476 & 0{,}111 \\ 0{,}332 & 0{,}553 & 1{,}291 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}476 & 0{,}293 & 0{,}085 \\ 0{,}286 & 0{,}476 & 0{,}111 \\ 0{,}332 & 0{,}253 & 0{,}091 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}476 & 0{,}293 & 0{,}085 \\ 0{,}286 & 0{,}476 & 0{,}111 \\ 0{,}332 & 0{,}253 & 0{,}091 \end{pmatrix}.$$

5) Найти межотраслевые потоки

- $x_{11}=a_{11}x_1=0,$
- $x_{12}=a_{12}x_2=0{,}5\cdot 11{,}768=5{,}884,$
- $x_{13}=a_{13}x_3=0{,}1\cdot 11{,}288=1{,}128,$
- $x_{21}=a_{21}x_1=0{,}6\cdot 9{,}113=5{,}469,$
- $x_{22}=a_{22}x_2=0,$
- $x_{23}=a_{23}x_3=0,$
- $x_{31}=a_{31}x_1=0,$
- $x_{32}=a_{32}x_2=0{,}3\cdot 11{,}768=3{,}530,$
- $x_{33}=a_{33}x_3=0{,}2\cdot 11{,}288=2{,}257.$

6) Определить условно-чистую продукцию филиалов

$s_1 = x_1 - (x_{11}+x_{21}+x_{31}) = 9{,}113 -$
$(0+5{,}469+0) = 3{,}644,$

$s_2 = x_2 - (x_{12}+x_{22}+x_{32}) = 11{,}768 -$
$(5{,}884+0+3{,}53) = 2{,}354,$

$s_3 = x_3 - (x_{13}+x_{23}+x_{33}) = 11{,}288 -$
$(1{,}128+0+2{,}25) = 7{,}91.$

7) Составить таблицу межотраслевого баланса

Полученные выше результаты расчетов оформим в виде следующей таблицы межотраслевого баланса

Таблица межотраслевого баланса

	филиал 1	филиал 2	филиал 3	конеч. прод.	вал. прод.
филиал1	0	5,884	1,128	2,1	9,113
филиал2	5,469	0	0	6,3	11,768
филиал3	0	3,53	2,257	5,5	11,288
усл. чист. прод.	3,644	2,354	7,91	14,126	32,169
вал	9,113	11,768	11,288	32,169	

8) Найти измененные объемы валового выпуска

Вычислим вектор изменений конечного продукта:

$$\Delta Y = Y^* - Y = \begin{pmatrix} 3{,}4 \\ 6{,}3 \\ 4{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2{,}1 \\ 6{,}3 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3 \\ 0 \\ -1{,}1 \end{pmatrix}.$$

С помощью уравнения (27) найдем вектор изменений валового продукта:

$$\Delta X = B \cdot \Delta Y = \begin{pmatrix} 1{,}476 & 0{,}793 & 0{,}185 \\ 0{,}886 & 1{,}476 & 0{,}111 \\ 0{,}332 & 0{,}554 & 1{,}292 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}3 \\ 0 \\ -1{,}1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}802 \\ -0{,}518 \\ 0{,}929 \end{pmatrix}.$$

И наконец, найдем оптимальный вектор валового продукта:

$$X^* = X + \Delta X = \begin{pmatrix} 9{,}113 \\ 11{,}768 \\ 11{,}288 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}802 \\ -0{,}518 \\ 0{,}929 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}311 \\ 11{,}250 \\ 12{,}217 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 8{,}311 \\ 11{,}250 \\ 12{,}217 \end{pmatrix}.$

4. УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

Теоретические сведения

Все предприятия делают различные запасы. Их не должно быть слишком много, так как возникают неоправданные затраты на хранение и амортизацию товара. Их не должно быть и слишком мало, так как это может привести к остановке производства. Задача управления запасами состоит в том, чтобы минимизировать общие затраты. В дальнейшем важную роль будут играть *функция изменения запаса* $Q(t)$ и *функция суммарных затрат* $C(q)$

Функция $Q(t)$ выражает количество единиц однородного товара на складе в момент времени t. Очевидно, что если товар завозят на склад, то функция изменения запаса возрастает $Q(t)\uparrow$, а если товар расходуется, то она убывает $Q(t)\downarrow$. Будем считать, что пополнение товара происходит мгновенно, а расходование равномерно. Следовательно, функция изменения запаса является периодической кусочно-линейной функцией с отрицательным наклоном.

Функция $C(q)$ выражает суммарные затраты на приобретение партии товара размером q, на организационные издержки и хранение этого запаса. Функция суммарных затрат $C(q)$ в простейшем случае является *унимодальной,* т.е. имеющей одну точку минимума.

В дальнейшем будем рассматривать следующие модели управления запасами:

1. Простейшая модель управления запасами;
2. Модель управления запасами со скидкой.

Основные *входные параметры*:

- p_0 – цена единицы товара;
- p_c – цена единицы товара со скидкой;
- d – интенсивность спроса на товар (например, за год);
- s – организационные издержки за одну партию товара;
- h – издержки на хранение одной единицы товара (за год);

Основные *расчетные параметры*:

- q_0 – расчетный размер одной партии товара;
- q_c – размер одной партии товара со скидкой;
- q_{opt} – оптимальный размер одной партии товара;
- τ – продолжительность расхода одной партии;
- n – число поставок (в год).

Простейшая модель управления запасами

Пусть параметры $p,\ d,\ s,\ h$ известны. Требуется так выбрать параметр $q,$ чтобы минимизировать суммарные затраты на хранение запаса. В данной модели после полного расходования запасаемого продукта происходит немедленное его пополнение. Это означает, что график функции изменения запаса имеет следующий вид:

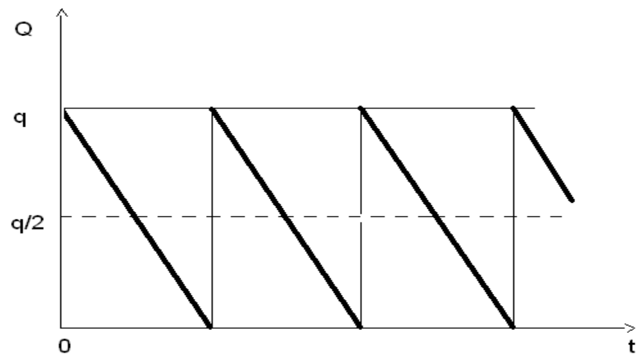


Рис. 16. График функция изменения запаса

Суммарные затраты включают следующие три составляющие:

- общая стоимость товара в год равна

$$C_1=pd;$$

- организационные издержки за год составляют

$$C_2=\frac{sd}{q},$$

так как число поставок за год равно d/q, а организационные издержки за одну партию товара составляют s

- годовые издержки на хранение

$$C_3=\frac{qh}{2},$$

так как средний уровень запаса в простейшей модели составляет $q/2$.

Таким образом, суммарные издержки C равны

$$C=C_1+C_2+C_3$$

или

$$C(q)= pd+\frac{sd}{q}+\frac{qh}{2}. \qquad (4.1)$$

График этой функции имеет следующий вид:

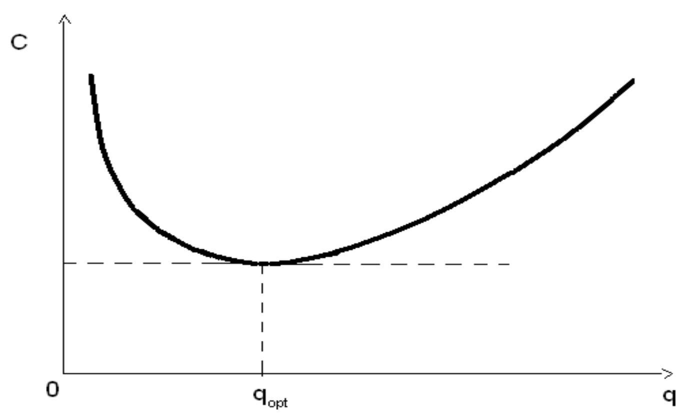


Рис. 17. График функции суммарных затрат

Согласно известной теореме Ферма для определения минимума этой функции необходимо найти производную, приравнять ее нулю, решить полученное уравнение и исследовать его корни, т.е. критические точки, точки, подозрительные на экстремум.

$$C'(q)=(pd+sd/q+qh/2)'= (pd)'+(sd/q)'+(qh/2)'= -sd/q^2+h/2.$$

Таким образом,

$$-sd/q^2+h/2=0. \quad (4.2)$$

Из последнего равенства легко находится искомый оптимальный размер партии

$$q_0=\sqrt{\frac{2sd}{h}}. \quad (4.3)$$

Это известная *формула Харриса-Уилсона.*

Замечание 1. В приведенной формуле (4.3) отсутствует параметр p, так как цена единицы товара в простейшей модели не влияет на размер партии. В более усложненных моделях, например, в моделях поставок со скидкой, этот параметр будет играть важную роль.

Замечание 2. Умножив обе части равенства (4.2) на q, получаем

$$sd/q=qh/2.$$

Это означает, что если размер партии оптимален, то второе и третье слагаемые в формуле (4.1) равны, т. е. организационные издержки равны издержкам на хранение товара.

Пример 1. Интенсивность равномерного спроса составляет 2000 единиц товара в год, организационные издержки 10 д.е. на одну партию товара, годовые издержки хранения 4 д.е. за одну единицу товара, цена единицы товара 5 д.е.

Найти оптимальный размер партии товара, число поставок в год, продолжительность цикла изменения запаса.

Решение. Входные параметры задачи: $d=2000$, $s=10$, $h=4$, $p=5$. В условиях простейшей модели управления запасами такой размер партии можно найти по формуле Харриса-Уилсона:

$$q_0=\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 2000}{4}}=100.$$

Зная оптимальный размер заказа, можно определить число поставок в год n. А именно,

$$n=\frac{d}{q}=\frac{2000}{100}=20.$$

Очевидно, что продолжительность цикла расходования запаса τ составит:

$$\tau=\frac{365}{20}\approx 18 \text{ дней.}$$

Модель управления запасами со скидкой

Пусть p – цена единицы товара, если партия товара недостаточно большая $q<q_c$, т. е. не превышает некоторой величины q_c. Если размер партии достаточно велик, т. е. $q>q_c$, то товар может поставляться по льготной цене $p_c<p$, т. е. со скидкой $p–p_c$. Функция общих издержек в этом случае имеет вид:

$$C(q) = \begin{cases} pd + sd/q + qh/2, & q < q_c \\ p_c d + sd/q + qh/2, & q > q_c \end{cases}.$$

Ясно, что в точке q_c эта функция терпит разрыв. Пусть q_0 – точка, в которой первая ветвь функции $C(q)$, т.е. функция

$$f(q)=pd+sd/q+qh/2$$

достигает минимума. Согласно формуле Харриса-Уилсона

$$q_0 = \sqrt{\frac{2sd}{h}}.$$

Естественно предположить, что $q_0<q_1$. Вторая ветвь функции $C(q)$, т. е. функция

$$\varphi(q)=p_c d+sd/q+qh/2$$

всюду возрастает в области $q>q_c$, поэтому минимума эта функция достигает в точке q_1.

Рассмотрим два случая:

1) Если $f(q_0)<\varphi(q_c)$, то $q_{opt}=q_0$. Это означает, что скидка на товар недостаточно велика и при увеличении размера партии до q_c суммарные издержки на хранение возрастут.

2) Если $f(q_0)>\varphi(q_c)$, то $q_{opt}=q_c$. Это означает, что скидка на товар достаточно велика и при увеличении размера партии до q_c суммарные издержки на хранение снизятся.

Иллюстрацией рассмотренных случаев является следующий ниже рисунок 18.

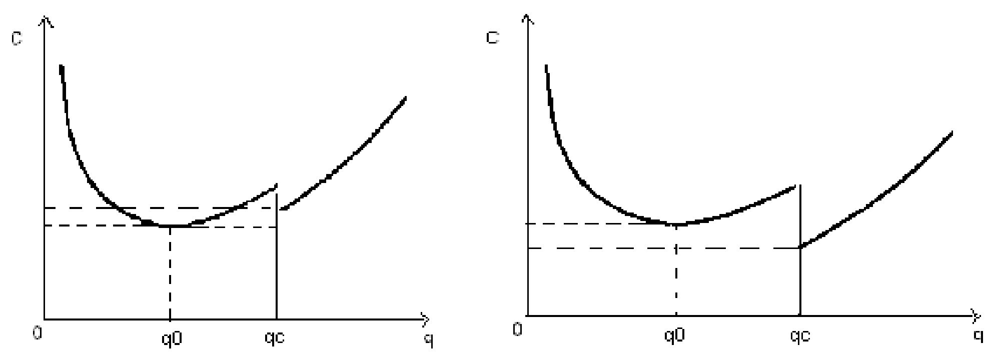


Рис. 18. Скидка недостаточно велика (слева), скидка приемлема (справа)

Пример 2. Интенсивность равномерного спроса составляет *2000* единиц товара в год, организационные издержки *10 д.е.* на одну партию товара, годовые издержки хранения *4 д.е.* за одну единицу товара, цена единицы товара *10 д.е.* Если размер партии не менее *400* единиц товара, то цена снижается до *9,5 д.е.*

Найти оптимальный размер партии товара.

Решение. Входные параметры задачи: $d=2000$, $s=10$, $h=4$, $p=10$, $p_c=9$. Суммарные издержки на хранение в этом случае определяются функцией

$$C(q) = \begin{cases} 10 \cdot 2000 + 10 \cdot 2000/q + 2q, & q < 400 \\ 9 \cdot 2000 + 10 \cdot 2000/q + 2q, & q > 400 \end{cases}.$$

Сначала найдем точку минимума функции $f(q)$. По формуле Харриса-Уилсона:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 2000}{4}} = 100.$$

Затем вычислим значения функций $f(q)$ и $\varphi(q)$ в точках q_0 и q_c:

$$f(q_0)=20000+20000/100+200=20400,$$

$$\varphi(q_c)=19000+20000/400+800=19850.$$

Сравнивая эти значения, получаем $f(q_0)>\varphi(q_c)$, т.е. скидка на товар достаточно велика и при увеличении размера партии до *400* единиц суммарные издержки на хранение запаса снизятся. Очевидно, такая сделка выгодна для потребителя. Итак, $q_{opt}=400$.

Зная оптимальный размер заказа, можно определить число поставок в год n. А именно,

$$n=d/q_{opt}=2000/400=5.$$

Очевидно, что продолжительность цикла изменения запаса τ составит:

$$\tau = 365/5 \approx 73 \text{ дня}.$$

Более подробно с задачами управления запасами можно ознакомиться в [4; 7; 8].

Контрольные вопросы

1. В чем состоит задача управления запасами?
2. Как определяется функция изменения запаса?
3. Каковы свойства функции изменения запаса?
4. Как определяется функция суммарных затрат?
5. Каковы свойства функции суммарных затрат?
6. Каковы основные входные параметры модели управления запасами?
7. Каковы основные выходные параметры модели управления запасами?
8. Какой вид имеет график функции изменения запаса?
9. Почему график функции изменения запаса имеет «пилообразный» вид?
10. Из каких составляющих складывается величина суммарных затрат?
11. Как определяются организационные издержки на поставку товара?
12. Как определяются издержки на хранение запаса товара?
13. Какой вид имеет график функции суммарных затрат?
14. Всегда ли существует минимум функции суммарных затрат?
15. Как находится минимум функции суммарных затрат?
16. Какова формула Харриса-Уилсона?
17. Влияет ли цена единицы товара на оптимальный размер партии?
18. Как определяется число поставок товара в год?
19. Как определяется продолжительность цикла поставок?
20. При каких условиях делается скидка на цену поставляемого товара?
21. Как определяется функция суммарных издержек в условиях скидки?
22. Каков график функции суммарных издержек в условиях скидки?
23. Каков характер точки разрыва в этом случае?

24. Как выбирается оптимальный размер партии в условиях скидки?

25. Влияет ли цена единицы товара на оптимальный размер партии в условиях скидки?

Варианты заданий

Задание. В таблице представлены три варианта поставок товара на предприятие:

Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
1	s_1	h_1	p_1
2	s_2	h_2	p_2
3	s_3	h_3	p_3

Годовой равномерный спрос составляет 100 единиц товара. Требуется:

1. Найти расчетные размеры партии товара в каждом варианте поставок.

2. Вычислить общие затраты в каждом варианте поставок.

3. Выбрать наилучший вариант поставок.

4. Третий поставщик предложил скидку в размере 10%, если размер партии товара будет увеличен на 20%. Какой вариант поставок будет в этом случае наилучшим?

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 0	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 1	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 2	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 3	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 4	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 5	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 6	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 7	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 8	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 9	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 10	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 11	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	s	h	p
Вариант 12	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	s	h	p
Вариант 13	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	s	h	p
Вариант 14	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	s	h	p
Вариант 15	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	s	h	p
Вариант 16	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	s	h	p
Вариант 17	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	s	h	p
Вариант 18	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	s	h	p
Вариант 19	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 20	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 21	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 22	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 23	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 24	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 25	1	*10*	*7*	*2*
	2	*11*	*7*	*4*
	3	*12*	*5*	*3*

	Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
Вариант 26	1	*10*	*6*	*3*
	2	*12*	*7*	*4*
	3	*13*	*5*	*3*

Решение варианта 0

Задание. В таблице представлены три варианта поставок товара на предприятие:

Варианты поставок	*s*	*h*	*p*
1	*10*	*6*	*3,5*
2	*11*	*4*	*3,6*
3	*12*	*5*	*3,7*

Годовой равномерный спрос составляет 100 единиц товара. Требуется:

1) Найти расчетные размеры партии товара, число поставок и продолжительность расходования товара в каждом варианте поставок.

2) Вычислить общие затраты в каждом варианте и выбрать наилучший вариант поставок.

3) Третий поставщик предложил скидку в размере 10%, если размер партии товара будет увеличен на 20%. Какой вариант поставок будет в этом случае наилучшим?

Решение. 1) Найти расчетные размеры партии товара, число поставок и продолжительность расходования товара в каждом варианте поставок.

В соответствии с данными таблицы по формуле Харриса-Уилсона получаем расчетные размеры партии товара:

$$q_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{6}} = 18{,}2574; \qquad q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 11 \cdot 100}{4}} = 23{,}4521;$$

$$q_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 12 \cdot 100}{5}} = 21{,}9089.$$

Число поставок в году по каждому варианту равно

$$n_1 = \frac{d}{q_1} = \frac{100}{18{,}2574} = 5{,}477; \qquad n_2 = \frac{d}{q_2} = \frac{100}{23{,}4521} = 4{,}264;$$

$$n_3 = \frac{d}{q_3} = \frac{100}{21{,}9089} = 4{,}564.$$

Продолжительности расходования товара равны

$$\tau_1 = \frac{365}{n_1} = \frac{365}{5{,}477} \approx 67 \text{ дн.}; \qquad \tau_2 = \frac{365}{n_2} = \frac{365}{4{,}264} = 86 \text{ дн.};$$

$$\tau_3 = \frac{365}{n_3} = \frac{365}{4{,}564} = 80 \text{ дн.}$$

2) Вычислить общие затраты в каждом варианте и выбрать наилучший вариант поставок.

$$C(q_1) = p_1 d + \frac{s_1 d}{q_1} + \frac{q_1 h_1}{2} = 3{,}5 \cdot 100 + \frac{10 \cdot 100}{18{,}2574} +$$

$$+ \frac{18{,}2574 \cdot 6}{2} = 459{,}5445.$$

$$C(q_2) = p_2 d + \frac{s_2 d}{q_2} + \frac{q_2 h_2}{2} = 3{,}6 \cdot 100 + \frac{11 \cdot 100}{23{,}4521} +$$

$$+ \frac{23{,}4521 \cdot 4}{2} = 453{,}8082.$$

$$C(q_3) = p_3 d + \frac{s_3 d}{q_3} + \frac{q_3 h_3}{2} = 3{,}7 \cdot 100 + \frac{12 \cdot 100}{21{,}9089} +$$

$$+ \frac{21{,}9089 \cdot 5}{2} = 479{,}5445.$$

Принимая во внимание полученные величины общих затрат находим, что наилучшим является *второй вариант поставок.*

3) Третий поставщик предложил скидку в размере 10%, если размер партии товара будет увеличен на 20%. Какой вариант поставок будет в этом случае наилучшим?

Найдем цену товара со скидкой и увеличенный размер партии товара:

$p_{3c}=p_3–0{,}1p_3=3{,}7–0{,}37=3{,}33$ $q_{3c}=q_3+0{,}2q_3=21{,}9089+4{,}3818=26{,}2907.$

Вычислим общие затраты в этом случае:

$$C(q_{3c}) = p_{3c} d + \frac{s_3 d}{q_{3c}} + \frac{q_{3c} h_3}{2} = 3{,}33 \cdot 100 +$$

$$+ \frac{12 \cdot 100}{26{,}2907} + \frac{26{,}2907 \cdot 5}{2} = 444{,}3703.$$

Сравнивая полученный результат с ранее полученными общими затратами, приходим к следующему выводу: общие затраты в условиях скидки на товар меньше расчетных затрат без скидки, следовательно, *условия скидки, предложенные поставщиком выгодны для потребителя.*

Ответ: В условиях скидки лучший вариант – 3.

5. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Теоретические сведения

В экономической практике часто возникают ситуации, в которых различные стороны преследуют различные цели. Например, отношения между продавцом и покупателем, поставщиком и потребителем, банком и вкладчиком и т. д. Такие конфликтные ситуации возникают не только в экономике, но в других видах деятельности. Например, при игре в шахматы, шашки, домино, лото и т. д.

Игра – это математическая модель конфликтной ситуации с участием не менее двух лиц, использующих несколько различных способов для достижения своих целей. Игра называется *парной,* если в ней участвуют два игрока. Игра называется *антагонистической,* если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Следовательно, для задания игры достаточно задать величины выигрышей одного игрока в различных ситуациях.

Любой способ действия игрока в зависимости от сложившейся ситуации называется *стратегией.* Каждый игрок располагает определенным набором стратегий. Если число стратегий конечно, то игра называется *конечной,* в противном случае – *бесконечной.* Стратегии называются *чистыми,* если каждый из игроков выбирает только одну стратегию определенным, а не случайным образом.

Решение игры заключается в выборе такой стратегии, которая удовлетворяет *условию оптимальности.* Это условие состоит в том, что один игрок получает *максимальный выигрыш,* если второй придерживается своей стратегии. И наоборот, второй игрок получает *минимальный проигрыш,* если первый из игроков придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются *оптимальными.* Таким образом, *цель игры* – это определение оптимальной стратегии для каждого игрока.

Игра в чистых стратегиях

Рассмотрим игру с двумя игроками A и B. Предположим, что игрок A имеет m стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а игрок B имеет n стратегий $B_1, B_2, \ldots ,B_n$. Будем считать, что выбор игроком A стратегии A_i, а игроком B стратегии B_j однозначно определяет исход игры, т.е. выигрыш a_{ij} игрока A и выигрыш b_{ij} игрока B. Здесь $i=1, 2,\ldots, m, j=1, 2,\ldots, n$.

Простейшей игрой с двумя игроками является антагонистическая игра, т.е. игра, в которой интересы игроков прямо противоположны. В этом случае выигрыши игроков связаны равенством $b_{ij}=-a_{ij}$. Это равенство означает, что выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого. В этом случае достаточно рассматривать лишь выигрыши одного из игроков, например, игрока A.

Каждой паре стратегий A_i и B_j соответствует выигрыш a_{ij} игрока A . Все эти выигрыши удобно записывать в виде так называемой *платежной матрицы*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока *A,* а столбцы – стратегиям игрока *B*. В общем случае такая игра называется *(m×n)-игрой.*

Пример 1. Два игрока *A* и *B* бросают монету. Если стороны монеты совпадают, то выигрывает *A*, т.е. игрок *B* платит игроку *A* некоторую сумму, равную 1, а если не совпадают, то выигрывает игрок В, т.е. наоборот, игрок *A* платит игроку *B* эту же сумму*,* равную *1*. Сформировать платежную матрицу.

Решение. По условию задачи

	Орел	*Решка*
Орел	*1*	*-1*
Решка	*-1*	*1*

Таким образом, платежная матрица имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Известна следующая платежная матрица

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проанализировать стратегии игрока *A*, учитывая, что игрок *B* будет стараться минимизировать выигрыш игрока *A*.

Решение. Пусть игрок *A* выбрал первую стратегию. Тогда игрок *B* ответит второй стратегией, минимизирующей выигрыш игрока *A*. Если игрок *A* выбрал вторую стратегию, то игрок *B* ответит первой или третьей стратегией. Если же игрок *A* выбрал третью стратегию, то игрок *B* ответит своей третьей стратегией. Припишем в виде дополнительного столбца справа полученные минимальные значения каждой строки. Итак,

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести относительно игрока *B*. Действительно, пусть игрок *B* выбрал первую стратегию. Тогда игрок *A* ответит второй или третьей стратегией, максимизирующей свой выигрыш. Если игрок *B* выбрал вторую стратегию, то игрок *A* ответит третьей стратегией. Если же игрок *B* выбрал третью стратегию, то игрок *A* ответит своей первой стратегией. Припишем в виде дополнительной строки снизу полученные максимальные значения каждого столбца. Итак,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}.$$
$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Очевидно, что игрок *A* остановит свой выбор на второй стратегии, дающей ему гарантированный выигрыш, равный 1. Очевидно также, что игрок *B* остановит свой выбор на первой стратегии, при которой максимальный выигрыш игрока *A* минимален.

Итак, в нашем примере максимум из минимальных элементов каждой строки совпадает с минимумом из максимальных элементов каждого столбца и равен 1, т. е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Отметим, что элементами платежной матрицы являются выигрыши игрока *A*, а именно, выигрыш соответствует положительному числу, а проигрыш – отрицательному. Матрица выплат игроку *B* получается из платежной матрицы (матрицы выплат игроку *A*) заменой каждого ее элемента на противоположный.

Рассмотрим произвольную *($m \times n$)-игру*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что оба игрока действуют разумно и стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим для себя образом.

Рассмотрим оптимальные действия игрока *A*. В каждой строке платежной матрицы вычисляется минимальный элемент

$$a_i = \min_j a_{ij} \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Полученные числа приписываются в качестве правого столбца платежной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{matrix}.$$

Выбирая стратегию A_i (i-тую строку платежной матрицы), игрок *A* должен рассчитывать на то, что в результате разумных действий соперника *B* он выиграет не меньше, чем a_i. Следовательно, игрок *A* должен остановиться на той стратегии A_i, для которой это число максимально, т. е.

$$a = \max_i a_i.$$

Итак,

$$a = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Ясно, что это число является одним из элементов платежной матрицы.

Если игрок A будет придерживаться этой стратегии, то ему будет гарантирован выигрыш, не меньший a. Число a в этом случае называют *нижней ценой игры.* Принцип построения стратегии игрока A, основанный на максимизации минимальных выигрышей, называют *принципом максимина.* Соответствующую этому выбору стратегию A_i называют *максиминной стратегией.*

Рассмотрим теперь оптимальные действия игрока B. В каждом столбце платежной матрицы вычисляется максимальный элемент

$$a_j = \max_i a_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Полученные числа приписываются в качестве нижней строки платежной матрицы

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \ldots & b_n \end{matrix} \end{array}.$$

Выбирая стратегию B_j (j-тый столбец платежной матрицы), игрок B должен рассчитывать на то, что в результате разумных действий соперника A он проиграет не больше, чем b_j. Следовательно, игрок B должен остановиться на той стратегии B_j, для которой это число минимально, т.е.

$$b = \min_j b_j.$$

Итак,

$$b = \min_j \max_i b_{ij}.$$

Ясно, что это число является также одним из элементов платежной матрицы.

Если игрок B будет придерживаться этой стратегии, то при любом поведении игрока A ему будет гарантирован проигрыш, не больший, чем b. Число b в этом случае называют *верхней ценой игры.* Принцип построения стратегии игрока B, основанный на минимизации максимальных выигрышей, называют *принципом минимакса.* Соответствующую этому выбору стратегию A_i называют *минимаксной стратегией.*

Пример 3. Найти максиминную и минимаксную стратегию игроков, если платежная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с изложенным выше *принципом максимина* по каждой строке определяем наименьшее число, которое приписываем в качестве правого столбца платежной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}.$$

Это означает, что какой бы выбор по столбцам ни сделал игрок B, выигрыш игрока A, который свои стратегии выбирает по строкам, в худшем случае составит, соответственно, *2, -3, 1, 3*. Ясно, что игрок A предпочтет выбрать такую стратегию (строку), для которой достигается максимальный выигрыш, независимо от того, какую стратегию (столбец) выбрал игрок B, т. е.

$$a = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i a_i = \max(2, -3, 1, 3) = 3.$$

Таким образом, максиминной стратегией игрока A является стратегия A_4.

Аналогично, в соответствии с изложенным выше *принципом минимакса* по каждому столбцу определяем наибольшее число, которое приписываем в качестве нижней строки платежной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}.$$
$$\begin{matrix} 8 & 7 & 5 & 9 \end{matrix}$$

Это означает, что какой бы выбор по строкам ни сделал игрок A, проигрыш игрока B, который свои стратегии выбирает по столбцам, составит, соответственно, *8, 7, 5, 9.* Ясно, что игрок B предпочтет выбрать такую стратегию (столбец), для которой достигается минимальный проигрыш, независимо от того, какую стратегию (строку) выбрал игрок A, т.е.

$$b = \min_j \max_i b_{ij} = \min_j b_i = \min(8, 7, 5, 9) = 5.$$

Таким образом, минимаксной стратегией игрока B является стратегия B_3.

Заметим, что в нашем примере $a < b$. Оказывается, справедлива следующая

Теорема. *В матричной игре нижняя цена игры не превосходит верхней цены, т. е.* $a \le b$.

Доказательство. По определению

$$a_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij}, \qquad b_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij}.$$

Объединяя эти неравенства, получаем

$$a_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij} = b_j.$$

Следовательно,

$$a_i \le a_{ij} \le b_j.$$

Это неравенство справедливо для любых индексов i и j. Значит,

$$a = \max_i a_i \le a_{ij} \le \min_j b_j = b,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем будем различать чистые и смешанные стратегии. *Чистая стратегия* – это стратегия первого или второго игрока, выбранная им с вероятностью, равной 1.

Если для чистых стратегий A_i и B_j игроков A и B имеет место равенство

$$a = b,$$

то такую пару стратегий называют *седловой точкой матричной игры.* Элемент a_{ij}, на котором достигается это равенство, называют *седловым элементом платежной матрицы.* Число

$$v = a = b$$

называют *чистой ценой игры.*

Пример 4. Исследовать платежную матрицу на наличие седловой точки и найти цену игры

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определим нижнюю и верхнюю чистые цены данной игры. Для этого отыщем минимальные элементы в каждой строке и максимальные в каждом столбце:

$$\begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 9 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \end{array}.$$

Нижняя цена игры

$$a = \max_i a_i = \max(1, -4, 5) = 5.$$

Верхняя цена игры

$$b = \min_j b_i = \min(9, 5, 6, 7) = 5.$$

Оказалось, что нижняя и верхняя цены игры совпали. Значит, чистая цена игры $v = 5$.

В нашем примере седловой элемент $a_{32} = 5$ находится на пересечении третьей строки и второго столбца платежной матрицы. Следовательно, оптимальной стратегией игрока A является третья стратегия, а игрока B – вторая стратегия.

Игра в смешанных стратегиях

Изучение игры в смешанных стратегиях начнем со следующего примера.

Пример 5. Исследовать платежную матрицу на наличие седловой точки и найти цену игры.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используя рассмотренный выше алгоритм, получаем

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{matrix}. \\ \begin{matrix} 4 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix} \end{array}$$

Отсюда находим

$$A = -2,\ b = 2.$$

Итак, нижняя и верхняя цены игры не совпадают. Оптимальными являются стратегии A_3 и B_2.

Ясно, что пока игроки придерживаются этих стратегий, средний выигрыш будет между числами -2 и 2. Однако, если игроку *B* станет известно, что игрок *A* выбрал стратегию A_3, то он немедленно ответит стратегией B_1 и сведет его выигрыш *к -2. В свою* очередь, на стратегию B_1 у игрока *A* имеется ответная стратегия A_2, дающая ему выигрыш 4. Таким образом, ситуацию A_3, B_2 нельзя признать равновесной.

Если матричная игра не имеет седловой точки, то применение минимаксных стратегий приводит к тому, что для каждого из игроков выигрыш не превышает *a*, а проигрыш не меньше *b*.

Можно ли увеличить выигрыш или уменьшить проигрыш? Решение находят в смешанных стратегиях.

Смешанной стратегией называется случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии с соответствующими им вероятностями. Смешанную стратегию игрока *A* удобно записывать в виде следующей подстановки:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

где $p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0, \dots, p_m \geq 0,$

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1.$$

Аналогично, смешанную стратегию игрока *B* также удобно записывать в виде следующей подстановки

$$B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

где $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_n \geq 0,$

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$$

Очевидно, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. А именно, чистой стратегии A_1 соответствует подстановка

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Чистой стратегии B_2 соответствует подстановка

$$B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае чистой стратегии A_i соответствует набор вероятностей

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \dots \quad , p_i = 1, \quad \dots \quad , p_m = 0,$$

а чистой стратегии B_j – набор вероятностей

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dots \quad , q_j = 1, \quad \dots \quad , q_n = 0.$$

Будем считать, что для соблюдения секретности каждый из игроков применяет свои стратегии независимо друг от друга.

Итак, смешанные стратегии игроков A и B могут быть охарактеризованы заданием векторов вероятностей применения соответствующих стратегий:

$$P=\{p_1, p_2, \dots ,p_m\},$$

$$Q=\{q_1, q_2, \dots ,q_n\}.$$

Следовательно, выбор игроком A стратегии A_i, а игроком B стратегии B_j является случайным событием с вероятностью $p_i q_j$ (по теореме умножения независимых событий). Тогда математическое ожидание выигрыша будет равно

$$M(A, P, Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Число $M(A, P, Q)$ будем считать *средним выигрышем игрока A* в условиях смешанных стратегий.

Стратегии A^* и B^*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}, \; B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix}$$

называются *оптимальными,* если

$$M(A, P, Q^*) \le M(A, P^*, Q^*) \le M(A, P^*, Q). \qquad (5.1)$$

Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется *ценой игры*:

$$v = M(A, P^*, Q^*).$$

Цена игры удовлетворяет неравенству:

$$a \le v \le b.$$

Решением матричной игры в смешанных стратегиях называется набор (P^*, Q^*, v), состоящий из оптимальных смешанных стратегий игроков и цены игры.

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии, а второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии.

Отметим два важных вопроса. Первый: какие матричные игры имеют решение в смешанных стратегиях? Имеет место основная теорема теории матричных игр, а именно,

Теорема Неймана. *Для матричной игры с любой платежной матрицей существуют и равны между собой следующие величины:*

$$\max_P \min_Q M(A, P, Q) = \min_Q \max_P M(A, P, Q),$$

причем существует хотя бы одна ситуация в смешанных стратегиях $\{P^*, Q^*\}$*, для которой выполняется равенство*

$$M(A, P^*, Q^*) = \max_P \min_Q M(A, P, Q) = \min_Q \max_P M(A, P, Q).$$

Второй вопрос: как найти решение матричной игры?

Пусть подстановки

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}, \; B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix}$$

представляют оптимальные смешанные стратегии. Оптимальная смешанная стратегия игрока A состоит только из тех чистых стратегий A_i, ($i = 1, 2, \dots, m$), для которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = v. \tag{5.2}$$

Аналогично, оптимальная смешанная стратегия игрока B состоит только из тех чистых стратегий B_j, ($j = 1, 2, \dots, n$), для которых

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = v. \tag{5.3}$$

Отсюда следует, что отличными от нуля могут быть только те вероятности p_i, для которых имеет место равенство (5.2), и только те вероятности q_j, для которых имеет место равенство (5.3). В связи с этим, если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то ее называют *активной стратегией.*

Итак, *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.*

Это утверждение имеет большое практическое значение, так как указывает методы нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки. Вот эти равенства:

$$v = \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \max_P \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i =$$

$$= \min_Q \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max_i \sum a_{ij} q_j^* = v.$$

Игра с платежной матрицей второго порядка

Простейшим случаем матричной игры является игра размера (2×2). Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальным решением является пара соответствующих чистых стратегий. Если игра не имеет седловой точки, то в соответствии с теоремой Неймана оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}, \; B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1^* & q_2^* \end{pmatrix}.$$

Найдем оптимальное решение этой игры. Для этого воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если игрок *A* придерживается своей оптимальной стратегии A^*, то его средний выигрыш будет равен цене игры *v*, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок *B*.

В игре (2×2) любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока *A* – это случайная величина, математическое ожидание которой равно цене игры *v*. Следовательно, средний выигрыш игрока *A* будет равен *v* для любой стратегии игрока *B*.

В соответствии с определением средний выигрыш игрока *A*, если он использует оптимальную смешанную стратегию

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix},$$

а игрок *B* – чистую стратегию B_1, равен цене игры, т.е.

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v.$$

Такой же средний выигрыш получает игрок *A*, если игрок *B* применяет стратегию B_2. Значит,

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v.$$

Учитывая, что $p_1^* + p_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии A^* и цены игры:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v\,. \\ \quad p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \tag{5.4}$$

Решая эту систему, получаем вероятности оптимальной смешанной стратегии первого игрока

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

и цену игры

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

По аналогии, учитывая, что $q_1^* + q_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии B^* и цены игры:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v. \\ \quad q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases} \tag{5.5}$$

Решая эту систему, получаем вероятности оптимальной смешанной стратегии второго игрока

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

При любой чистой стратегии игрока *A* средний проигрыш игрока *B* равен v.

Пример 6. Найти оптимальные стратегии игры с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Очевидно, что седловая точка отсутствует, так как $a = -1$, $b = 1$. Значит, решение надо искать в смешанных стратегиях. Как и ранее, средний выигрыш первого игрока или средний проигрыш второго обозначим через v. Системы уравнений (5.4), (5.5) в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} -p_1^* + p_2^* = v \\ p_1^* - p_2^* = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -q_1^* + q_2^* = v \\ q_1^* - q_2^* = v \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}.$$

Решая эти системы, получаем:

$$p_1^* = p_2^* = 0{,}5,\ q_1^* = q_2^* = 0{,}5,\ v = 0.$$

Это значит, что оптимальная стратегия каждого игрока состоит в том, чтобы чередовать свои чистые стратегии случайным образом с вероятностью 0,5, при этом средний выигрыш равен 0.

Сведение игры к задаче линейного программирования

Решение общей матричной игры $(m \times n)$ достаточно трудоемко, однако может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Пусть игра задана платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Игрок *A* имеет стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$, а игрок *B* стратегии $B_1, B_2, \dots, B_n$. Найдем оптимальные стратегии

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix},\ B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix},$$

где p_i^*, q_j^* – вероятности применения чистых стратегий A_i и B_j, причем

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1,\ \sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$$

При любой стратегии игрока B оптимальная стратегия игрока A обеспечивает ему средний выигрыш не меньше цены игры v и выигрыш, равный цене игры v, при оптимальной стратегии игрока B. Пусть игрок A применяет смешанную стратегию A^* против какой-нибудь чистой стратегии B_j игрока B. Тогда он получает средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша)

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \ldots + a_{mj} p_m$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Итак, имеет место следующая система линейных неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq v \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

или в развернутой форме

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \ldots + a_{m1} p_m \geq v \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \ldots + a_{m2} p_m \geq v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \ldots + a_{mn} p_m \geq v \end{cases}.$$

Разделим каждое неравенство на v и обозначим $x_i = \dfrac{p_i}{v} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$. Полученная выше система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \geq 1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{m2} x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \geq 1 \end{cases}. \tag{5.6}$$

Принимая во внимание равенство $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ и введенные обозначения, получаем

$$Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v}. \tag{5.7}$$

Игрок A старается максимизировать свой выигрыш. Это эквивалентно минимизации функции Z. Таким образом, задача поиска оптимальной стратегии A^* свелась к задаче линейного программирования (ЛП): минимизировать линейную функцию вида (5.7) при линейных ограничениях вида (5.6).

При любой стратегии игрока A оптимальная стратегия игрока B обеспечивает ему средний проигрыш не больше цены игры v и проигрыш, равный цене игры v, при оптимальной стратегии игрока A. Пусть игрок B применяет смешанную стратегию B^* против какой-нибудь чистой стратегии A_i игрока A. Тогда он имеет средний проигрыш (математическое ожидание проигрыша)

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = a_{i1} q_1 + a_{i2} q_2 + \ldots + a_{in} q_n$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Итак, имеет место следующая система линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_i \le v \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

или в развернутой форме

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}p_m \le v \end{cases}.$$

Разделим каждое неравенство на v и обозначим $y_j = \dfrac{q_j}{v}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Полученная выше система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1 \end{cases}. \tag{5.8}$$

Принимая во внимание равенство $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$ и введенные обозначения, получаем

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{v}. \tag{5.9}$$

Игрок *B* старается минимизировать свой проигрыш. Это эквивалентно максимизации функции *F*. Таким образом, задача поиска оптимальной стратегии B^* также свелась к задаче ЛП: максимизировать линейную функцию вида (5.9) при линейных ограничениях вида (5.8).

Нетрудно заметить, что полученные задачи ЛП являются взаимно двойственными. Первую из задач можно решить, например, методом искусственного базиса. Однако проще сначала решить вторую из рассмотренных задач, а затем по последней симплексной таблице задачи *B* найти решение первой задачи *A*. Если платежная матрица исходной задачи имеет большой размер, то обе задачи целесообразно решать с помощью оптимизатора *Поиск решения* в табличном процессоре *Excel*.

Пример 8. Свести матричную игру с заданной платежной матрицей к задаче линейной оптимизации.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проверим, имеет ли данная игра седловую точку. Находим нижнюю и верхнюю цену игры:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 3 & 2 & 3 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \end{array}$$

$$a = \max_i \min_j a_{ij} = 1, \qquad b = \min_j \max_i a_{ij} = 2 .$$

Так как $a \neq b$, то данная игра не имеет седловой точки. Значит, решение игры следует искать в смешанных стратегиях. Ясно, что цена игры v заключена в пределах: $1 \leq v \leq 2$.

По заданной платежной матрице составляем соответствующую двойственную пару задач линейного программирования:

Задача А

$$\begin{cases} Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \\ 3x_1 + \quad + 2x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad \geq 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Задача В

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 + y_3 \to \max \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 1 \\ \qquad y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + \qquad y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Полученные задачи можно легко решить с помощью встроенной функции *Поиск решения* электронной таблицы *Excel*. Более подробно с матричными играми можно ознакомиться в [1-3; 5; 6].

Контрольные вопросы

1. Что называется игрой?
2. Какая игра называется парной?
3. Какая матричная игра называется антагонистической?
4. Что называется стратегией игрока?
5. Какие стратегии называются чистыми?
6. Что означает решить игру?
7. В чем состоит условие оптимальности?
8. Какова цель игры?
9. Что такое платежная матрица?
10. Как определяется функция выигрыша?
11. Как определяется нижняя цена игры?

12. Что называется максиминной стратегией?
13. Как определяется верхняя цена игры?
14. Что называется минимаксной стратегией?
15. В чем состоит принцип минимакса?
16. Что такое седловая точка?
17. Каким неравенством связаны функции выигрыша при наличии седловой точки?
18. Что называется смешанной стратегией?
19. Какова форма записи смешанной стратегии игроков?
20. Как соотносятся чистые и смешанные стратегии?
21. На основании какого принципа определяется оптимальное решение игры?
22. Каким свойством обладают оптимальные стратегии?
23. Как определяется цена игры?
24. Каково соотношение между нижней ценой, верхней ценой и ценой игры?
25. Как формулируется теорема Неймана?
26. Что такое активные стратегии?
27. В чем суть теоремы об активных стратегиях?
28. Какая стратегия одного из игроков называется доминирующей?
29. Как можно понизить размерность платежной матрицы?
30. Каков средний выигрыш первого игрока, если второй использует чистые стратегии?
31. Как определяется оптимальная стратегия первого игрока в игре (2x2)?
32. Каков средний проигрыш второго игрока, если первый использует чистые стратегии?
33. Как определяется оптимальная стратегия второго игрока в игре (2x2)?
34. Какова цена игры (2x2)?
35. Какова геометрическая интерпретация игры (2x2)?
36. Как матричная игра приводится к задаче линейного программирования (ЛП)?
37. Что такое средний выигрыш игрока?
38. Как формируется система ограничений задачи ЛП относительно первого игрока?
39. Какова оптимизационная модель игры относительно первого игрока?
40. Как формируется система ограничений задачи ЛП относительно второго игрока?
41. Какова оптимизационная модель игры относительно второго игрока?
42. В чем проявляется двойственность этих задач?
43. Каковы методы решения полученной двойственной пары?
44. Можно ли по решению одной из задач получить решение другой?
45. Как решаются задачи двойственной пары в помощью оптимизатора *Поиск решения* в *Excel*?

Варианты заданий

Задание 1. Упростить платежную матрицу и исследовать ее на наличие седловой точки.

Задание 2. Решить матричную игру (2x2) графическим методом.

Задание 3. Фирма выпускает три вида продукции A_1, A_2, A_3. Прибыль от реализации этой продукции зависит от спроса, который может быть в одном из трех состояний B_1, B_2, B_3. Известна платежная матрица игры, каждый элемент которой характеризует прибыль от реализации каждого вида продукции при каждом состоянии спроса.

Определить оптимальные пропорции выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, сведением игры к задаче линейного программирования.

Вариант 0 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Вариант 1 $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 10 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 2 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 3 $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 4 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 3 \\ 8 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 5 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 6 $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 7 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Вариант 8 $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 9 $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 10 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 11 $\begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 9 \\ 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 12 $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 13 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 6 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 14 $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 \\ 2 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Вариант 15 $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & 3 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 16 $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 17 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 3 \\ 4 & 9 & 11 & 4 \\ 3 & 8 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Вариант 18 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 19 $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 20 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 21 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 22 $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 23 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 24 $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 25 $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 26 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	

Вариант 27 $\begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 9 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$	

Вариант 28 $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	

Решение варианта 0

Задание 1. Упростить платежную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

и исследовать ее на наличие седловой точки.

Решение. Сравним вторую строку с третьей. Нетрудно заметить, третья строка *доминирует* вторую, так как все ее элементы не меньше соответствующих элементов второй строки. Следовательно, игрок A наверняка предпочтет третью стратегию второй, а, значит, вторую строку можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Платежная матрица примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице третья строка доминируема второй, следовательно, ее также можно исключить. Получаем платежную матрицу с двумя стоками:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице строки не находятся в отношении доминирования.

Исследуем отношение доминирования между столбцами. Очевидно, что третий столбец *доминирует* четвертый, так как все его элементы не больше соответствующих элементов четвертого столбца. Следовательно, игрок *B* наверняка предпочтет третью стратегию четвертой, а, значит, четвертый столбец можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Итак, упрощенная платежная матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Исследуем ее на наличие седловой точки.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix}. \\ \begin{matrix} 9 & \;5 & \;6 \end{matrix} & \end{array}$$

Нижняя цена игры

$$a = \max_i a_i = \max(2, 5) = 5.$$

Верхняя цена игры

$$b = \min_j b_i = \min(9, 5, 6) = 5.$$

Оказалось, что нижняя и верхняя цены игры совпали. Значит, чистая цена игры $v = 5$.

Задание 2. Решить матричную игру (2×2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

графическим методом.

Решение. Игрок *A* имеет лишь две стратегии, поэтому оптимальное решение относительного этого игрока будем искать в виде подстановки

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p^* & 1 - p^* \end{pmatrix}.$$

По теореме Неймана нахождение цены игры равносильно решению уравнения

$$v = \min_j (p^* a_{1j} + (1 - p^*) a_{2j}) =$$
$$= \max_p \min_j (p a_{1j} + (1 - p) a_{2j}).$$

Функция

$$v = \min_j (p a_{1j} + (1 - p) a_{2j})$$

представляет собой некоторую ломаную, максимум которой легко найти, построив ее график.

В данной задаче игрок *A* выбрал смешанную стратегию с вектором вероятностей $P=(p, 1-p)$, а игрок *B* - j-тую чистую стратегию ($j=1, 2$). Тогда средний выигрыш игрока *A* в ситуации B_1 составит

$$v = p + 4(1 - p),$$

а в ситуации B_2

$$v = 5p + 2(1 - p).$$

Геометрически эти уравнения описывают две прямые. Таким образом, каждой чистой стратегии противника B на этой плоскости соответствует некоторая прямая. Для удобства уравнения прямых запишем в следующей форме:

$$\nu = -3p + 4,$$
$$\nu = 3p + 2.$$

Ниже на рисунке 19 изображены эти прямые, соответствующие двум стратегиям игрока B.

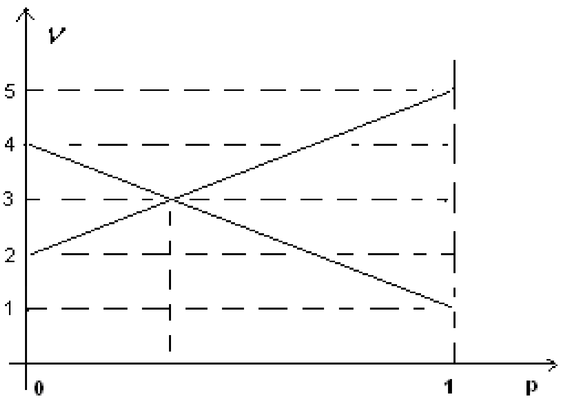


Рис. 19. Графическое изображение стратегий игрока *B*

Отметим минимальные значения этой функции. В результате получим двухзвенную ломаную (см. рис. 20, жирная линия)

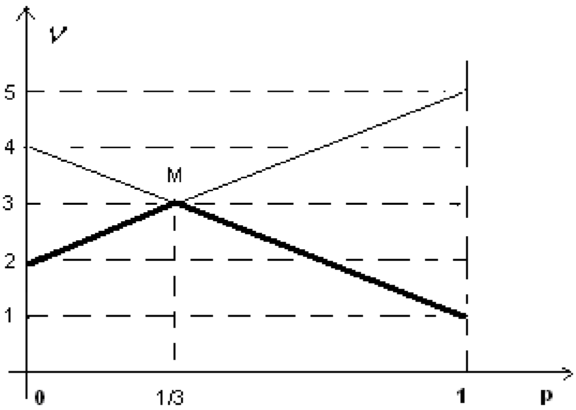


Рис. 20. Нижняя огибающая стратегий игрока *B*

По построению эта линия называется *нижней огибающей* двух прямых. Самая верхняя точка M этой огибающей, т. е. точка пересечения двух прямых, определяет оптимальную стратегию игрока A, а именно,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Цена игры соответствует ординате точки M, а именно,

$$\nu = -3\frac{1}{3} + 4 = 3\frac{1}{3} + 2 = 3.$$

Итак, относительно игрока *A* задача решена. Однако в целом ряде случаев оказывается важным решить задачу также относительно противника *B*.

Игрок *B* также имеет лишь две стратегии, поэтому оптимальное решение относительного этого игрока будем искать в виде подстановки

$$B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q^* & 1-q^* \end{pmatrix}.$$

По теореме Неймана нахождение цены игры равносильно решению уравнения

$$v = \min_i (q^* a_{i1} + (1-q^*)a_{i2}) =$$
$$= \min_q \max_i (qa_{i1} + (1-q)a_{i2}).$$

Функция

$$v = \max_i (qa_{i1} + (1-q)a_{i2})$$

представляет собой некоторую ломаную, минимум которой легко найти, построив ее график.

В данной задаче игрок *B* выбрал смешанную стратегию с вектором вероятностей Q=(q, 1-q), а игрок A – i-тую чистую стратегию (i=1, 2). Тогда средний выигрыш (проигрыш) игрока *B* в ситуации A_1 составит

$$v = q + 5(1-q),$$

а в ситуации B_2

$$v = 4q + 2(1-q).$$

Эти уравнения также описывают две прямые. Таким образом, каждой чистой стратегии противника *A* на этой плоскости соответствует некоторая прямая. Для удобства уравнения прямых запишем в следующей форме:

$$v = -4q + 5,$$
$$v = 2p + 2.$$

Ниже на рисунке 21 изображены эти прямые, соответствующие двум стратегиям игрока *A*.

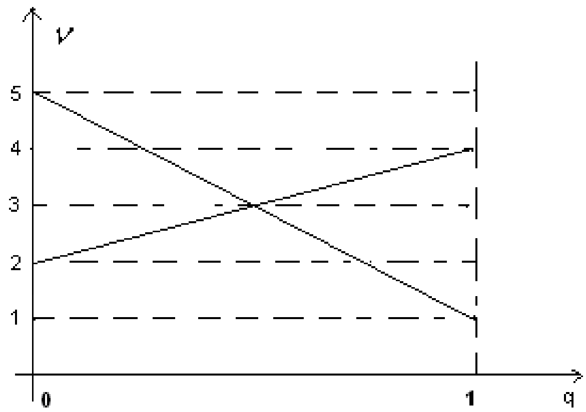


Рис. 21. Графическое изображение стратегий игрока *A*

Отметим максимальные значения этой функции. В результате получим двухзвенную ломаную (см. рис. 22, жирная линия).

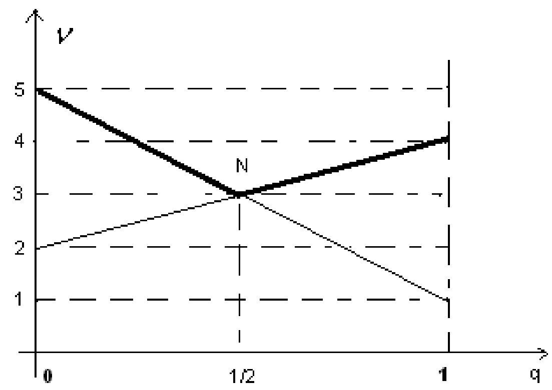


Рис. 22. Верхняя огибающая стратегий игрока *A*

По построению эта линия называется *верхней огибающей* двух прямых. Самая нижняя точка *N* этой огибающей, т. е. точка пересечения двух прямых, определяет оптимальную стратегию игрока *B*, а именно,

$$B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Цена игры соответствует ординате точки *N*, а именно, $v = -2\frac{1}{2} + 5 = 2\frac{1}{2} + 2 = 3$.

Заметим, что цена уже была найдена ранее.

Ответ: $A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $v = 3$.

Задание 3. По условию решение данной задачи сводится к решению матричной игры с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проверим, имеет ли данная игра седловую точку. Находим нижнюю и верхнюю цену игры:

$$a = \max_i \min_j a_{ij} = 2, \qquad b = \min_j \max_i a_{ij} = 4.$$

Так как $a \neq b$, то данная игра не имеет седловой точки. Значит, решение игры следует искать в смешанных стратегиях. Ясно, что цена игры v заключена в пределах: $2 \le v \le 4$.

По заданной платежной матрице составляем соответствующую двойственную пару задач линейного программирования:

Задача A

$$\begin{cases} Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \\ 2x_1 + \quad + 6x_3 \ge 1 \\ \qquad 5x_2 + x_3 \ge 1 \\ 4x_1 + 3x_2 \qquad \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Задача B

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 + y_3 \to \max \\ 2y_1 \qquad + 4y_3 \le 1 \\ \qquad 5y_2 + 3y_3 \le 1 \\ 6y_1 + y_2 \qquad \le 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Отыщем решение этих задач с помощью встроенной функции *Поиск решения* таблицы *Excel*. Исходные данные и результаты расчетов удобно расположить, например, в предлагаемых ниже формах.

Задача А								min
				огр		x1	x2	x3
2	0	6		1		0,119	0,1746	0,127
0	5	1		1				
4	3	0		1			Z=	0,4206
						p1	p2	p3
Цена игры		2,3774			A*	0,283	0,415	0,302

Задача В								max
				огр		y1	y2	y3
2	0	4		1		0,1508	0,0952	0,1746
0	5	3		1				
6	1	0		1			F=	0,4206
						q1	q2	q3
Цена игры		2,377			B*	0,358	0,226	0,415

Ответ: $\nu = 2{,}377$, $A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0{,}283 & 0{,}415 & 0{,}302 \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0{,}358 & 0{,}226 & 0{,}415 \end{pmatrix}$.

6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Теоретические сведения

Многие экономические и финансовые процессы протекают в условиях неопределенности. Недостаточность информации порождает неопределенность в принятии управленческих решений. Это может быть связано с невозможностью получения информации к моменту принятия решения, с высокими затратами на получение информации, невозможностью устранения неопределенности по причинам объективного характера и т. д. Например, прогнозирование валового выпуска некоторой продукции на предприятии связано с риском, так как спрос на продукцию носит случайный характер и зависит от множества известных и неизвестных факторов.

По мере совершенствования сбора, передачи и обработки информации ее неопределенность уменьшается. Существование неустранимой неопределенности связано со случайным характером многих экономических явлений.

Так, прием небольшой партии товара для контроля качества связан с риском. Конечно, такой риск может быть устранен при полном контроле всей выпускаемой продукции. Однако во многих ситуациях это мероприятие оказывается невозможным и дорогостоящим.

Для уменьшения неблагоприятных случайных воздействий в каждой конкретной ситуации следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. Таким образом, лицо, принимающее управленческое решение, вступает в игровые отношения с неопределенными в той или иной мере обстоятельствами, ситуациями.

Такие ситуации принято называть *природой*, а принятие решений в условиях полной или частичной неопределенности – *играми с природой* или *статистическими играми.* Лицо, принимающее решение, должно уметь находить управленческое решение, когда природа не выбирает сознательно свои оптимальные стратегии.

Любую хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. Задачей лица, принимающего решения, является принятие наилучшего, оптимального решения в этих ситуациях. Качество принимаемого решения зависит от того, насколько полно экономист владеет информацией. Даже в условиях неполной информации экономист может принять достаточно верное решение.

В отличие от обычной матричной игры, в которой принимают участие два сознательных игрока, стремящихся минимизировать возможный выигрыш противника, статистическая игра характеризуется тем, что второй игрок – природа – безразличен к исходу игры.

Напомним, что некоторые стратегии экономиста или природы могут находиться в отношении доминирования. Если все элементы одной стратегии игрока A, относительно которого составлена платежная матрица, не больше соответствующих элементов другой, то первая стратегия называется *доминируемой*, а вторая *доминирующей*.

Аналогично, если все элементы одной стратегии игрока B не меньше соответствующих элементов другой, то первая стратегия называется доминируемой, а вторая доминирующей. Естественно, что все доминируемые стратегии игроков A и B надо отбросить как невыгодные.

Однако, в статистической игре отбрасывание доминируемых стратегий производится лишь для стратегий игрока A. В отличие от матричной игры, стратегии природы, т.е. игрока B, нельзя не учитывать, так как она не имеет умысла навредить игроку A.

Рассмотрим игру с двумя игроками A и B, где A – экономист, финансист, лицо, принимающее решение, B – природа. Предположим, что игрок A имеет m стратегий (возможных решений) $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а игрок B имеет n стратегий (ситуаций) $B_1, B_2, \ldots ,B_n$.

Во взаимоотношениях с природой экономист может использовать любые свои стратегии в зависимости от состояний природы. При этом он может использовать как чистые, так и смешанные стратегии. Качество i-того решения (i=1, 2, …, m) в условиях j-той ситуации (j=1, 2, …, n) оценивается следующей *платежной матрицей*

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix},$$

которую называют также *матрицей эффективностей, матрицей доходов* или *матрицей возможных решений*.

Элемент q_{ij} матрицы Q назовем *выигрышем* экономиста, если он использует стратегию A_i при состоянии природы B_j. Наряду с матрицей эффективностей часто используется *матрица рисков*

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица R имеет тот же размер, что и матрица Q. Элементы r_{ij} матрицы рисков определяются так:

$$r_{ij} = \max_i q_{ij} - q_{ij}.$$

Экономический смысл такого определения состоит в следующем. Если игрок B (природа) выбрал стратегию B_j и игрок A (экономист) знает об этом, то он постарается выбрать такую стратегию, которая принесет максимальный доход. Это соответствует выбору максимального элемента j-того столбца. Если же игрок A не знает о выборе игрока B, то при выборе им стратегии A_i у него возникает риск недополучить часть дохода в размере r_{ij}. Особенность матрицы рисков состоит в том, что каждый ее столбец содержит хотя бы один ноль.

Оптимальную стратегию экономиста можно определить с помощью ряда известных критериев. Так, в условиях полной неопределенности часто используют критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица, а в условиях частичной неопределенности – критерии Байеса, Парето.

Принятие решения в условиях полной неопределенности

Критерий Вальда. Данный критерий использует матрицу эффективностей и является критерием выбора максиминной стратегии, позволяющей получить нижнюю цену игры. В качестве оптимальной принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т. е.

$$q = \max_i \min_j q_{ij} .$$

Критерий Сэвиджа. Данный критерий использует матрицу рисков и является критерием выбора минимаксной стратегии. В качестве оптимальной принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях минимизирует максимальный риск, т. е.

$$r = \min_j \max_i r_{ij} .$$

Очевидно, что критерии Вальда и Сэвиджа ориентируют экономиста на самые неблагоприятные условия природы и выражают пессимистическую оценку ситуации. В отличие от этих критериев критерий Гурвица является критерием пессимизма-оптимизма.

Критерий Гурвица. Данный критерий использует также матрицу эффективностей и является критерием выбора взвешенной стратегии. В качестве оптимальной принимается чистая стратегия, для которой выполняется соотношение

$$c = \max_i ((1-t)\min_j q_{ij} + t\max_j q_{ij}) \qquad (0 \le t \le 1) .$$

Здесь параметр t экономист выбирает в зависимости от некоторых дополнительных субъективных соображений. Если $t=0$, то $c=q$ и критерий Гурвица переходит в критерий Вальда. Таким образом, при $t=0$ критерий Гурвица является критерием крайнего пессимизма. Если $t=1$, то

$$c = \max_i \max_j q_{ij} .$$

В этом случае критерий Гурвица переходит в критерий крайнего (розового) оптимизма.

На практике параметр t выбирают обычно близким к $0{,}5$, что соответствует принятию достаточно взвешенной стратегии.

Принятие решения в условиях частичной неопределенности

Частичная неопределенность предполагает знание вероятностей состояний природы:

$$P=(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

В этом случае используют критерий Байеса. Показателями в этом критерии являются математическое ожидание эффективности, т. е. средняя ожидаемая эффективность или математическое ожидание риска, т. е. средний ожидаемый риск.

Критерий Байеса максимизации средней ожидаемой эффективности. Данный критерий использует матрицу эффективностей и является критерием выбора оптимальной стратегии с учетом знания вероятностей состояния природы P. В качестве оптимальной принимается чистая стратегия, которая максимизирует средний ожидаемый выигрыш, т. е.

$$e = \max_i \overline{q_i},$$

где $\overline{q_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ij}$.

Критерий Байеса минимизации среднего ожидаемого риска. Данный критерий использует матрицу рисков и является критерием выбора оптимальной стратегии также с учетом знания вероятностей состояния природы *P*. В качестве оптимальной принимается чистая стратегия, которая минимизирует средний ожидаемый риск, т. е.

$$s = \min_i \overline{r_i},$$

где $\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$.

Итак, решение статистической игры в условиях полной неопределенности по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица позволяет экономисту обоснованно принимать решение по выбору оптимальной стратегии.

Решение статистической игры в условиях частичной неопределенности по критериям Байеса позволяет экономисту более точно, чем в случае полной неопределенности, принимать решение по выбору оптимальной стратегии. Ясно, что применение рассмотренных критериев дает экономисту больший выигрыш при принятии оптимального решения по сравнению с выигрышем на основе опыта и интуиции.

Более подробно со статистическими моделями можно ознакомиться в [4; 6; 8].

Контрольные вопросы

1. В чем состоит отличие статистической игры от антагонистической?
2. Как определяется матрица доходов?
3. Как определяется матрица рисков?
4. В чем состоит экономический смысл матрицы рисков?
5. Что называется стратегией экономиста?
6. Что называется стратегией природы?
7. Какова цель статистической игры?
8. В чем заключаются условия полной неопределенности?
9. Что называется максиминной стратегией?
10. Как формулируется правило Вальда?
11. Каков экономический смысл правила Вальда?
12. Что называется минимаксной стратегией?
13. Как формулируется правило Сэвиджа?
14. Как определяется взвешенная стратегия?
15. Как формулируется правило Гурвица?
16. Какова связь между правилом Вальда и правилом Гурвица?

17. В чем заключаются условия частичной неопределенности?

18. Какова сущность правила Байеса о максимизации среднего ожидаемого дохода?

19. Какова сущность правила Байеса о минимизации среднего ожидаемого риска?

Варианты заданий

Задание 1. По заданной матрице доходов Q построить матрицу рисков R и определить оптимальную стратегию экономиста с помощью правил Вальда, Сэвиджа, Гурвица (при *λ=0,2, λ=0,5, λ=0,8*).

Задание 2. По заданной матрице доходов Q и заданным вероятностям стратегии природы P определить оптимальную стратегию экономиста с помощью правил Байеса максимизации среднего ожидаемого дохода и минимизации среднего ожидаемого риска

Вариант 0 $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Вариант 1 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 8 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$$P = (0.1\ \ 0.1\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1)$$

Вариант 2 $Q = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

$$P = (0.1\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1\ \ 0.1)$$

Вариант 3 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 8 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.1\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1)$

Вариант 4 $Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 2 & 9 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 9 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1\ \ 0.1)$

Вариант 5 $Q = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 8 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 9 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.1\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1)$

Вариант 6 $Q = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1\ \ 0.1)$

Вариант 7 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.1\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1)$

Вариант 8 $Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 8 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

$P = (0.4\ \ 0.2\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.1)$

Вариант 9 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 8 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.3\ \ 0.3\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.1)$

Вариант 10 $Q = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

$P = (0.2\ \ 0.3\ \ 0.2\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.1)$

Вариант 11 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 8 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.2)$

Вариант 12 $Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 2 & 9 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 9 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.2)$

Вариант 13 $Q = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 8 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 9 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.1 \;\; 0.1)$

Вариант 14 $Q = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.1)$

Вариант 15 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.1 \;\; 0.1 \;\; 0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.4)$

Вариант 16 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 8 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.3 \;\; 0.1 \;\; 0.1)$

Вариант 17 $Q = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 8 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.3 \;\; 0.1)$

Вариант 18 $Q = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 4 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 6 & 4 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.3 \;\; 0.1 \;\; 0.1)$

Вариант 19 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.3 \;\; 0.1)$

Вариант 20 $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 9 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 2 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 7 & 9 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.3 \;\; 0.1 \;\; 0.1)$

Вариант 21 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 9 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.3 \;\; 0.1)$

Вариант 22 $Q = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

$P = (0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.3 \;\; 0.1 \;\; 0.1)$

Вариант 23 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 9 \\ 6 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.1\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.3\ \ 0.1)$

Вариант 24 $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

$P = (0.4\ \ 0.2\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.1)$

Вариант 25 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 8 & 4 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (0.1\ \ 0.3\ \ 0.3\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.1)$

Решение варианта 0

Задание 1. По заданной матрице доходов Q построить матрицу рисков R и определить оптимальную стратегию экономиста с помощью правил Вальда, Сэвиджа, Гурвица (при $\lambda=0,2$, $\lambda=0,5$, $\lambda=0,8$)

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала по заданной матрице эффективностей построим матрицу рисков. Для этого в каждом столбце найдем максимальный элемент: $r_1=9$, $r_2=8$, $r_3=7$. Затем, в соответствии с определением матрицы рисков, вычтем из r_1 все элементы первого столбца, из r_2, все элементы второго столбца, из r_3 все элементы третьего столбца. В результате этих преобразований получим следующую матрицу рисков R:

$$R=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 6 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 6\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

В соответствии с правилом Вальда найдем минимальные элементы в каждой строке матрицы эффективностей Q

$$Q=\begin{pmatrix}4 & 2 & 7\\ 3 & 5 & 6\\ 9 & 4 & 1\\ 2 & 8 & 5\end{pmatrix}\begin{matrix}2\\ 3\\ 1\\ 2\end{matrix},$$

а затем выберем максимальный из них:

$$q=max(2, 3, 1, 2)=3.$$

Число $q=3$ соответствует второй строке. Значит, правило Вальда рекомендует выбрать в качестве оптимальной стратегию A_2.

В соответствии с правилом Сэвиджа найдем максимальные элементы в каждой строке матрицы рисков R

$$R=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 6 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 6\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}6\\ 6\\ 6\\ 7\end{matrix},$$

а затем выберем минимальный из них:

$$r=min(6, 6, 6, 7)=6.$$

Число $r=6$ соответствует первой, второй и третьей строке. Значит, правило Сэвиджа рекомендует выбрать в качестве оптимальной стратегию A_1, A_2 или A_3 .

Теперь определим оптимальную стратегию экономиста по правилу Гурвица. Если $\lambda=0,2$, то

$$c=\max_i(0,8\min_j q_{ij}+0,2\max_j q_{ij})$$

В соответствии с этой формулой находим

$$c_1=0,8\min_j q_{1j}+0,2\max_j q_{1j}=0,8\cdot 2+0,2\cdot 7=3,0;$$

$$c_2=0,8\min_j q_{2j}+0,2\max_j q_{2j}=0,8\cdot 3+0,2\cdot 6=3,6;$$

$$c_3=0,8\min_j q_{3j}+0,2\max_j q_{3j}=0,8\cdot 1+0,2\cdot 9=2,6;$$

$$c_4=0,8\min_j q_{4j}+0,2\max_j q_{4j}=0,8\cdot 2+0,2\cdot 8=3,2;$$

$$c=max(3,0; 3,6; 2,6; 3,2)=3,6.$$

Число $c=3,6$ соответствует второй строке. Значит, правило Гурвица при $\lambda=0,2$ рекомендует выбрать в качестве оптимальной стратегию A_2.

Если $\lambda=0,5$, то

$$c=\max_i(0,5\min_j q_{ij}+0,5\max_j q_{ij}).$$

В соответствии с этой формулой находим

$$c_1 = 0{,}5\min_j q_{1j} + 0{,}5\max_j q_{1j} = 0{,}5\cdot 2 + 0{,}5\cdot 7 = 4{,}5;$$

$$c_2 = 0{,}5\min_j q_{2j} + 0{,}5\max_j q_{2j} = 0{,}5\cdot 3 + 0{,}5\cdot 6 = 4{,}5;$$

$$c_3 = 0{,}5\min_j q_{3j} + 0{,}5\max_j q_{3j} = 0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 9 = 5{,}0;$$

$$c_4 = 0{,}5\min_j q_{4j} + 0{,}5\max_j q_{4j} = 0{,}5\cdot 2 + 0{,}5\cdot 8 = 5{,}0;$$

$$c=max(4{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}0;\ 5{,}0)=5{,}0.$$

Число $c=5{,}0$ соответствует третьей и четвертой строкам. Значит, правило Гурвица при $\lambda=0{,}5$ рекомендует выбрать в качестве оптимальной стратегию A_3 или A_4

Если $\lambda=0{,}8$, то

$$c = \max_i(0{,}2\min_j q_{ij} + 0{,}8\max_j q_{ij}).$$

В соответствии с этой формулой находим

$$c_1 = 0{,}2\min_j q_{1j} + 0{,}2\max_j q_{1j} = 0{,}2\cdot 2 + 0{,}8\cdot 7 = 6{,}0;$$

$$c_2 = 0{,}2\min_j q_{2j} + 0{,}8\max_j q_{2j} = 0{,}2\cdot 3 + 0{,}8\cdot 6 = 5{,}4;$$

$$c_3 = 0{,}2\min_j q_{3j} + 0{,}8\max_j q_{3j} = 0{,}2\cdot 1 + 0{,}8\cdot 9 = 7{,}4;$$

$$c_4 = 0{,}2\min_j q_{4j} + 0{,}8\max_j q_{4j} = 0{,}2\cdot 2 + 0{,}8\cdot 8 = 6{,}8;$$

$$c=max(6{,}0;\ 5{,}4;\ 7{,}4;\ 6{,}8)=7{,}4.$$

Число $c=7{,}4$ соответствует третьей строке. Значит, правило Гурвица при $\lambda=0.8$ рекомендует выбрать в качестве оптимальной стратегию A_3.

Сравнивая решения, полученные по этим правилам, приходим к выводу, что в условиях полной неопределенности и некоторого пессимизма целесообразно принять стратегию A_2, а в условиях достаточного оптимизма – стратегию A_3.

Задание 2. По заданной матрице доходов Q и заданным вероятностям стратегии природы P определить оптимальную стратегию экономиста с помощью правил Байеса максимизации среднего ожидаемого дохода и минимизации среднего ожидаемого риска

$$Q=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала по заданным вероятностям стратегии природы P определим оптимальную стратегию экономиста с помощью правила Байеса максимизации среднего ожидаемого дохода. Для этого найдем средний ожидаемый доход по каждой стратегии экономиста.

$$\overline{q_1} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{1j} = 0{,}2\cdot 4 + 0{,}5\cdot 2 + 0{,}3\cdot 7 = 3{,}9;$$

$$\overline{q_2} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{2j} = 0{,}2 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}3 \cdot 6 = 4{,}9\,;$$

$$\overline{q_3} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{3j} = 0{,}2 \cdot 9 + 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 1 = 4{,}1;$$

$$\overline{q_4} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{4j} = 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 8 + 0{,}3 \cdot 5 = 5{,}9\,;$$

$$q = \max(3{,}9;\ 4{,}9;\ 4{,}1;\ 5{,}9) = 5{,}9\,.$$

В соответствии с этим правилом в качестве оптимальной экономист выбирает стратегию A_4, которая максимизирует средний ожидаемый выигрыш.

Теперь по заданным вероятностям стратегии природы P определим оптимальную стратегию экономиста с помощью правила Байеса минимизации среднего ожидаемого риска. Для этого найдем средний ожидаемый риск по каждой стратегии экономиста.

$$\overline{r_1} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{1j} = 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}3 \cdot 0 = 4{,}0\,;$$

$$\overline{r_2} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{2j} = 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}3 \cdot 1 = 3{,}0\,;$$

$$\overline{r_3} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{3j} = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 6 = 3{,}8\,;$$

$$\overline{r_4} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{4j} = 0{,}2 \cdot 7 + 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 2 = 2{,}0\,;$$

$$s = \min(4{,}0;\ 3{,}0;\ 3{,}8;\ 2{,}0) = 2{,}0\,.$$

В соответствии с этим правилом в качестве оптимальной экономист выбирает также стратегию A_4, которая минимизирует средний ожидаемый риск.

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что в условиях частичной неопределенности экономисту целесообразнее выбрать в качестве оптимальной стратегию A_4.

Ответ: Оптимальная стратегия – A_4.

7. ФИНАНСОВАЯ АРИФМЕТИКА

Теоретические сведения

Любая финансовая операция предполагает выполнение некоторых условий между ее участниками. Это величина инвестиций или кредита, сроки погашения кредита, способы начисления процентов и т. д. Результат простой финансовой операции вполне очевиден и предсказуем. На результат сложной финансовой операции влияют множество факторов, среди которых могут быть случайные или неопределенные. Следовательно, необходим количественный анализ таких факторов и результата операции с привлечением методов элементарной и высшей математики, теории вероятностей и математической статистики, теории оптимизации и других математических дисциплин.

После известных работ Х. Марковица (1952 г.) и Д. Тобина (1958 г.) [3], за которые они позже получили Нобелевскую премию, финансовая математика приобрела очередное дыхание. Несомненно, расцвету финансовых вычислений способствовало также бурное развитие вычислительной техники и компьютерных технологий.

Особенностью финансовых вычислений является **учет фактора времени.** Это выражается в **принципе неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени**. Очевидно, что «1000 рублей сейчас» предпочтительнее, чем «1000 рублей через год», так как «1000 рублей сейчас» можно инвестировать и получить через год сумму больше, чем 1000 рублей. Влияние фактора времени усиливается также в периоды заметной инфляции. Таким образом, в отличие от бухгалтерского учета, простое суммирование денег, относящихся к разным моментам времени, при финансовом учете неправомерно.

В данном разделе рассматриваются первоначальные понятия финансовой математики, основанные на работе с арифметическими действиями и процентами.

Основными параметрами простой финансовой операции, например, кредитной, являются: начальная денежная сумма, конечная денежная сумма, срок операции или период начисления или учета, процентные деньги или ставка.

В дальнейшем будем различать две взаимно обратные задачи, соответствующие двум направлениям расчета денежных сумм. Прямая задача – **наращение денежной суммы,** например, определение суммы погашаемого долга, если известна величина первоначальной суммы. В этом случае конечную сумму называют **наращенной денежной стоимостью.** Обратная задача – **дисконтирование или учет денежной суммы**, например, определение величины кредита, если известна величина возвращаемой денежной суммы. В этом случае начальную сумму называют **современной денежной стоимостью.**

Введем следующие обозначения:

t_0 – начало финансовой операции;

t – окончание финансовой операции;

T – продолжительность финансовой операции, период начисления или учета.

Очевидно, что

$$T = t - t_0,$$

$S(t_0)$ – начальная денежная сумма;

$S(t)$ – конечная денежная сумма;

$I(t_0,t)$ – приращение капитала, процентные деньги в операции приведения к конечному моменту периода начисления;

$D(t_0,t)$ – дисконт, скидка в операции приведения к начальному моменту периода начисления.

Исходным соотношением для расчета параметров простой финансовой операции наращения является следующее:

$$S(t)=S(t_0)+I(t_0, t) \tag{7.1}$$

Исходным соотношением для расчета параметров простой финансовой операции дисконтирования является следующее:

$$S(t_0)=S(t)-D(t_0, t). \tag{7.2}$$

Процентной ставкой на периоде Т будем называть отношение приращения капитала к начальной сумме:

$$i(t_0, t) = \frac{I(t_0, t)}{S(t_0)}. \tag{7.3}$$

Учетной ставкой на периоде Т будем называть отношение приращения капитала к начальной сумме:

$$d(t_0, t) = \frac{D(t_0, t)}{S(t)}. \tag{7.4}$$

После подстановки (7.3) в (7.1) получаем

$$S(t)=S(t_0)+ S(t_0)i(t_0,t)$$

или

$$S(t)=S(t_0)(1+i(t_0,t)). \tag{7.5}$$

Коэффициентом наращения (множителем наращения, мультиплицирующим множителем) называется величина:

$$k(t_0,t)=1+i(t_0,t). \tag{7.6}$$

С учетом (7.6) формула наращения денежной суммы (5) примет следующий вид:

$$S(t)=S(t_0)\, k(t_0,t). \tag{7.7}$$

После подстановки (7.4) в (7.2) получаем

$$S(t_0)=S(t)- S(t)d(t_0,t)$$

или

$$S(t_0)=S(t)(1-d(t_0,t)). \tag{7.8}$$

Коэффициентом дисконтирования (множителем дисконтирования, дисконтным множителем) называется величина:

$$v(t_0,t)=1-d(t_0,t). \tag{7.9}$$

С учетом (7.9) формула дисконтирования денежной суммы (7.8) примет следующий вид:

$$S(t_0)=S(t)\, v(t_0,t). \tag{7.10}$$

В некоторых задачах финансовой математики удобно считать, что $t_0=0$. Если базовой временной единицей является год, то примем следующие сокращенные обозначения:

i – годовая процентная ставка;

d – годовая учетная ставка;

k – годовой коэффициент наращения;

v – годовой коэффициент дисконтирования.

В этих обозначениях формулы (7.5), (7.8) примут следующий более простой вид:

$$S(1) = S(0)(1+i),$$
$$S(0) = S(1)(1-d).$$

Сравнивая эти равенства, легко получить выражение годовой процентной ставки через эквивалентную ей годовую учетную ставку и наоборот:

$$i = \frac{d}{1-d}, \qquad (7.11)$$

$$d = \frac{i}{1+i}. \qquad (7.12)$$

Простые проценты

Рассмотрим операцию наращения денежной суммы по заданной годовой процентной ставке простых процентов. Согласно схеме простых процентов приращение капитала на всем интервале начисления остается неизменным. Пусть $S(0)$ – начальная денежная сумма, i – годовая процентная ставка. Тогда наращенная через год сумма составит

$$S(1)=S(0)+S(0)i$$

или

$$S(1)=S(0)(1+i). \qquad (7.13)$$

Как найти наращенную денежную сумму через *2* года?

Схема начисления простых процентов предполагает равномерное наращение процентных денег за каждый последующий год. Другими словами, приращение капитала каждый год остается неизменным. Следовательно, через *2* года

$$S(2)=(S(0)+S(0)i)+S(0)i$$

или

$$S(2)=S(0)(1+2i).$$

Обобщая эту формулу на период в n лет, получаем

$$S(n)=S(0)(1+ni). \qquad (7.14)$$

Рассмотрим ряд наращенных сумм:

$$S(0),\ S(0)+S(0)i,\ S(0)+S(0)2i,\ S(0)+S(0)3i,\ \ldots$$

Очевидно, что это возрастающая **арифметическая прогрессия** с разностью $S(0)i$. Графиком наращения является **прямая линия** с положительным угловым коэффициентом.

Опишем процедуру дисконтирования денежной суммы через n лет на настоящий момент времени по заданной годовой учетной ставке простых процентов. Согласно схеме простых процентов на всем интервале учета скидка капитала остается неизменной.

Пусть $S(n)$ – конечная денежная сумма, d – годовая учетная ставка. Тогда дисконтированная за год сумма составит

$$S(n-1)=S(n)-S(n)d$$

или

$$S(n-1)=S(n)(1-d). \qquad (7.15)$$

Как найти дисконтированную денежную сумму за 2 года учета?

Схема дисконтирования простых процентов предполагает равномерный учет процентных денег за каждый предыдущий год. Другими словами, дисконт каждый год остается неизменным. Следовательно, за 2 года

$$S(n-2)=(S(n)-S(n)d)-S(n)d$$

или

$$S(n-2)=S(n)(1-2d).$$

Обобщая эту формулу на период в n лет, получаем

$$S(0)=S(n)(1-nd). \qquad (7.16)$$

Рассмотрим ряд дисконтированных сумм:

$$S(n),\ S(n)-S(n)d,\ S(n)-S(n)2d,\ S(n)-S(n)3d,\ \ldots$$

Очевидно, что это убывающая **арифметическая прогрессия** с разностью $S(n)d$. Графиком дисконтирования является **прямая линия** также с положительным угловым коэффициентом.

Из формулы (7.14) имеем:

$$S(0)=\frac{S(n)}{1+ni}. \qquad (7.17)$$

В литературе формулу (7.16) – дисконтирование по учетной ставке – называют **банковским учетом,** а формулу (7.17) – дисконтирование по процентной ставке – **математическим учетом.**

Аналогично, из формулы (16) имеем:

$$S(m)=\frac{S(0)}{1-nd}. \qquad (7.18)$$

Формулу (7.18) можно рассматривать как наращение по годовой простой учетной ставке.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Ряд наращенных или дисконтированных сумм по схеме начисления простых процентов представляет собой арифметическую прогрессию. Графиком наращения или дисконтирования является прямая линия с положительным угловым коэффициентом.

Пусть известны годовая процентная ставка i и годовая учетная ставка d простых процентов.

Коэффициентом наращения по годовой процентной ставке простых процентов называется величина:

$$k(n,i)=1+ni. \tag{7.19}$$

Этот коэффициент называют также множителем наращения, мультиплицирующим множителем.

Коэффициентом дисконтирования по годовой учетной ставке простых процентов называется величина:

$$v(n,d)=1-nd. \tag{7.20}$$

Этот коэффициент называют также множителем дисконтирования.

Коэффициентом дисконтирования по годовой процентной ставке простых процентов называется величина:

$$v(n,i)=\frac{1}{1+ni}. \tag{7.21}$$

Коэффициентом наращения по годовой учетной ставке простых процентов называется величина:

$$k(n,d)=\frac{1}{1-nd}. \tag{7.22}$$

С помощью этих формул наращенные и дисконтированные денежные стоимости могут быть выражены следующим образом:

$$S(n)=S(0)\cdot k(n;i), \tag{7.23}$$

$$S(0)=S(n)\cdot v(n;d), \tag{7.24}$$

$$S(0)=S(n)/k(n;i), \tag{7.25}$$

$$S(n)=S(0)/v(n;d). \tag{7.26}$$

Пример 1. Начальная сумма составляет 100000 рублей. Годовая процентная ставка – *20%*. Найти наращенные суммы за первые пять лет и построить график наращения.

Решение. По формуле (7.14) получаем

$$S(1)=S(0)(1+i)=100000+100000\cdot 0{,}2=120000\ \textit{руб.}$$

$$S(2)=S(0)(1+2i)=100000+100000\cdot 0{,}2+$$
$$+100000\cdot 0{,}2=140000\ \textit{руб.}$$

$$S(3)=S(0)(1+3i)=100000+100000\cdot 0{,}6=$$
$$=160000\ \textit{руб.}\ \text{и т. д.}$$

Итак, имеем

$$S(1)=120000,\ S(2)=140000,\ S(3)=160000,\ S(4)=180000,\ S(5)=200000.$$

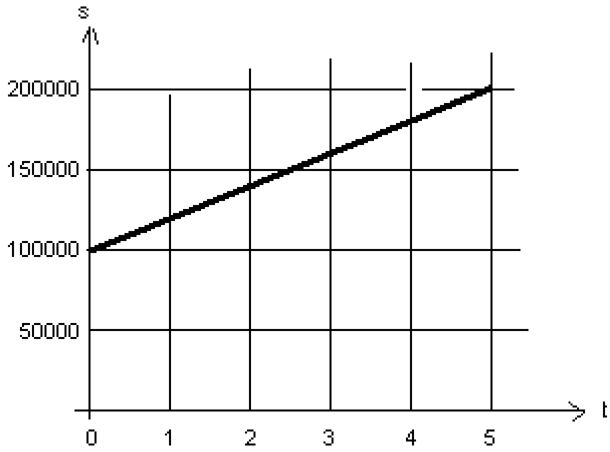


Рис. 23. График наращенных сумм по простым процентам

Рассмотренные выше формулы распространяются на случай, когда n – нецелое число лет.

Пример 2. Начальная сумма составляет 50000 рублей. Годовая процентная ставка – 10%. Найти наращенную сумму через 2,5 года.

Решение. По формуле (7.14) получаем

$$S(2{,}5)=S(0)(1+2{,}5i)=50000(1+2{,}5\cdot 0{,}1)=$$
$$=50000\cdot 1{,}25=62500\ \textit{руб.}$$

В следующем примере базовым временным периодом является период, отличный от года.

Пример 3. Начальная сумма составляет 20000$. Ежеквартальная процентная ставка – 5%. Найти наращенную сумму через три года.

Решение. В качестве базового периода выберем *квартал.* Общий период начисления в 3 года содержит 12 базовых периодов. Тогда по формуле (7.14) получаем

$$S(12)=S(0)(1+12j)=20000(1+12\cdot 0{,}05)=$$
$$=20000\cdot 1{,}6=32000\ \$.$$

Пример 4. Платежи в размере 1200$ и 1500$ со сроками погашения через 100 и 200 дней от некоторой начальной даты заменяются одним платежом со сроком 200 дней от той же даты. Найти размер консолидированного (объединенного) платежа по простой годовой процентной ставке 12%.

Решение. Сначала приведем все сроки погашения к базовому периоду в 1 год. А именно,

$$100\ \textit{дн} = \frac{100}{365} = 0{,}274\ \textit{г} \qquad 200\ \textit{дн} = \frac{200}{365} = 0{,}548\ \textit{г}.$$

Затем вычислим современную стоимость каждого платежа с помощью формулы (7.17) математического учета по простым процентам.

$$S_1(0) = \frac{1200}{1 + 0{,}274 \cdot 0{,}12} = 1161{,}8,$$

$$S_2(0) = \frac{1500}{1 + 0{,}548 \cdot 0{,}12} = 1407{,}45.$$

Найдем современную стоимость консолидированного платежа:

$$S(0) = S_1(0) + S_2(0) = 1161{,}8 + 1407{,}45 = 2569{,}25.$$

Далее по формуле (14) найдем наращенную стоимость консолидированного платежа через 200 дней:

$$S(0{,}548)=S(0)(1+0{,}548i)=2569{,}25(1+0{,}548\cdot 0{,}12)=2569{,}25\cdot 1{,}06576=2738{,}2\$.$$

Пример 5. Вексель номиналом в 1 *млн рублей* учитывается в банке за 155 дней до его погашения по годовой простой учетной ставке 10%. Какую денежную сумму получит держатель векселя при таком учете?

Решение. По условию задачи T=155/365=0,4247, d=0,1, $S(T)$=1000000. Тогда по формуле (4) имеем

$$S(0)=1000000(1–0{,}4247 \cdot 0{,}1)=957530 \textit{ руб.}$$

Переменные ставки простых процентов

Пусть общий период начисления процентов T состоит из n частичных временных периодов τ_m:

$$T = \bigcup_{m=1}^{n} \tau_m ,$$

причем длина $|\tau_m|$ каждого частичного временного периода равна $|\tau_m| = t_m - t_{m-1}$. На каждом таком частичном временном периоде задана процентная ставка j_m. Тогда коэффициент наращения на первом частичном периоде τ_1 равен

$$k(t_0,t_1)=1+j_1,$$

на первых двух частичных периодах $\tau_1 \bigcup \tau_2$ –

$$k(t_0,t_2)=1+j_1+ j_2,$$

на первых трех частичных периодах $\tau_1 \bigcup \tau_2 \bigcup \tau_3$

$$k(t_0,t_3)=1+j_1+ j_2+j_3,$$

и т. д. Окончательно получаем следующую формулу для вычисления коэффициента наращения по переменным ставкам простых процентов:

$$k(T) = 1 + \sum_{m=1}^{n} j_m \tag{7.27}$$

На практике вместо ставок по каждому частичному периоду используют переменные **годовые** процентные ставки i_m ($m=1,\ 2,\ \dots ,\ n$). Тогда в соответствии с формулой (7.19) коэффициент наращения на первом частичном периоде τ_1 равен

$$k(t_0,t_1)=1+\tau_1\, i_1,$$

на первых двух частичных периодах $\tau_1 \bigcup \tau_2$ –

$$k(t_0,t_2)=1+\tau_1\, i_1+\tau_2\, i_2,$$

на первых трех частичных периодах $\tau_1 \bigcup \tau_2 \bigcup \tau_3$

$$k(t_0,t_3)=1+\tau_1\, i_1+\tau_2\, i_2+\tau_3\, i_3,$$

и т. д. Окончательно получаем следующую формулу для вычисления коэффициента наращения по переменным годовым ставкам простых процентов:

$$k(T)=1+\sum_{m=1}^{n}\tau_m i_m$$

или

$$k(T)=1+\sum_{m=1}^{n}(t_m-t_{m-1})\, i_m . \tag{7.28}$$

Сложные проценты

Пусть по-прежнему $S(0)$ – начальная денежная сумма, i – годовая процентная ставка. Тогда наращенная через год сумма составит

$$S(1)=S(0)(1+i) \tag{7.29}$$

Как найти наращенную денежную сумму через 2 года? В отличие от схемы простого начисления процентов наращение капитала за второй год по схеме сложных процентов происходит не на начальную сумму $S(0)$, а на наращенную за прошедший год сумму $S(1)$:

$$S(2)=S(1)+S(1)\, i$$

или

$$S(2)=S(1)(1+i). \tag{7.30}$$

Подставляя (7.1) в (7.2), получаем

$$S(2)=S(0)(1+i)^2. \tag{7.31}$$

Далее

$$S(3)=S(2)(1+i). \tag{7.32}$$

Подставляя (7.3) в (7.4), получаем

$$S(3)=S(0)(1+i)^3. \tag{7.33}$$

Обобщая эту формулу на случай n лет, получаем формулу для вычисления наращенной денежной суммы через n лет по годовой процентной ставке i сложных процентов

$$S(n)=S(0)(1+i)^{n} \tag{7.34}$$

Рассмотрим ряд наращенных сумм:

$$S(0),\ S(0)(1+i),\ S(0)(1+i)^2,\ S(0)(1+i)^3,\ \ldots$$

Очевидно, что это **геометрическая прогрессия** со знаменателем $(1+i)$. Графиком наращения является **экспоненциальная кривая** с положительным угловым коэффициентом.

Опишем процедуру **дисконтирования** денежной суммы через n лет на настоящий момент времени по заданной годовой учетной ставке сложных процентов.

Пусть $S(n)$ – конечная денежная сумма, d – годовая учетная ставка. Тогда дисконтированная за год сумма составит

$$S(n-1)=S(n)-S(n)d$$

или

$$S(n-1)=S(n)(1-d). \tag{7.35}$$

Как найти дисконтированную денежную сумму за *2* года?

Схема дисконтирования простых процентов предполагает равномерный учет процентных денег за каждый предыдущий год, а схема дисконтирования сложных процентов – учет денег относительно уже учтенной за предыдущий период суммы. Следовательно, за 2 года

$$S(n-2)=S(n-1)(1-d)$$

или

$$S(n-2)=S(n)(1-d)^2.$$

Обобщая эту формулу на период в n лет, получаем формулу для вычисления дисконтированной денежной суммы за n лет по годовой учетной ставке d сложных процентов

$$S(0)=S(n)(1-d)^n. \tag{7.36}$$

Рассмотрим ряд дисконтированных сумм:

$$S(n),\ S(n)(1-d),\ S(n)(1-d)^2,\ S(n)(1-d)^3,\ \ldots$$

Очевидно, что это убывающая **геометрическая прогрессия** со знаменателем $(1-d)$. Графиком дисконтирования является **экспоненциальная кривая** также с положительным угловым коэффициентом.

Из формулы (7.34) имеем:

$$S(0)=\frac{S(n)}{(1+i)^n}. \tag{7.37}$$

В литературе формулу (7.36) – дисконтирование по сложной годовой учетной ставке – называют **банковским учетом,** а формулу (7.37) – дисконтирование по сложной годовой процентной ставке – **математическим учетом.**

Аналогично, из формулы (7.36) имеем:

$$S(n)=\frac{S(0)}{(1-d)^n}. \tag{7.38}$$

Формулу (7.38) можно рассматривать как наращение по годовой учетной ставке сложных процентов.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Ряд наращенных или дисконтированных сумм по схеме начисления сложных процентов представляет собой геометрическую прогрессию. Графиком наращения или дисконтирования является экспоненциальная кривая с положительным угловым коэффициентом.

Пусть известны годовая процентная ставка i и годовая учетная ставка d. Тогда коэффициенты наращения и дисконтирования с этим ставками по схеме сложных процентов вычисляются следующим образом:

$$k(n,i)=(1+i)^n, \tag{7.39}$$

$$v(n,i)=\frac{1}{(1+i)^n}, \tag{7.40}$$

$$v(n,d)=(1-d)^n, \tag{7.41}$$

$$k(n,d)=\frac{1}{(1-d)^n}. \tag{7.42}$$

С помощью этих формул получаем:

$$S(n)=S(0)\cdot k(n;i), \tag{7.43}$$

$$S(0)=S(n)\cdot v(n;d), \tag{7.44}$$

$$S(0)=\frac{S(n)}{k(n,i)}, \tag{7.45}$$

$$S(n)=\frac{S(0)}{v(n,d)}. \tag{7.46}$$

Пример 6. Начальная сумма составляет 100000 рублей. Годовая процентная ставка – 20%. Найти наращенные суммы за первые пять лет и построить график наращения.

Решение. По формуле (7.43) получаем

$$S(1)=S(0)(1+i)=100000(1+0,2)=120000\ р.$$

$$S(2)=S(0)(1+i)^2=100000(1+0,2)^2=144000\ р.$$

$$S(3)=S(0)(1+i)^3=100000(1+0,2)^3=172800\ р. \text{ и т. .}$$

Итак, имеем

$$S(1)=120000,\ S(2)=144000,\ S(3)=172800,\ S(4)=207360,\ S(5)=248832.$$

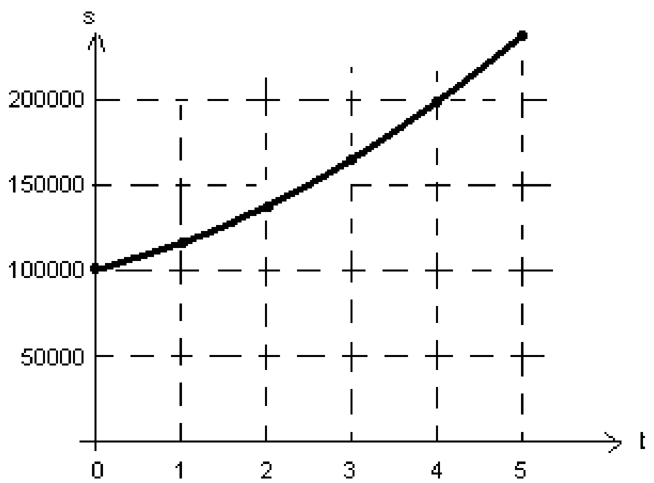


Рис. 24. График наращенных сумм по сложным процентам

Рассмотренные выше формулы распространяются на случай, когда n – нецелое число лет.

Пример 7. Начальная сумма составляет 50000 рублей. Годовая процентная ставка – 10%. Найти наращенную сумму через 2,5 года.

Решение. По формуле (7.41) получаем

$$S(2{,}5)=S(0)(1+i)^{2.5}=50000(1+\cdot 0{,}1)^{2.5}=$$
$$=50000\cdot 1{,}269059=63452{,}94\ р.$$

В следующем примере базовым временным периодом является период, отличный от года.

Пример 8. Начальная сумма составляет 20000 $. Ежеквартальная процентная ставка – 5%. Найти наращенную сумму через три года.

Решение. В качестве базового периода выберем *квартал.* Общий период начисления в 3 года содержит 12 базовых периодов. Тогда по формуле (7.43) получаем

$$S(12)=S(0)(1+j)^{12}=20000(1+0{,}05)^{12}=20000\cdot 1{,}7959=35917{,}13\ \$.$$

Пример 9. Платежи в размере 1200 и 1500$ со сроками погашения через 100 и 200 дней от некоторой начальной даты заменяются одним платежом со сроком 200 дней от той же даты. Найти размер консолидированного (объединенного) платежа по сложной годовой процентной ставке 12%.

Решение. Сначала приведем все сроки погашения к базовому периоду в 1 год. А именно,

$$100\ дн=\frac{100}{365}=0{,}274\ г,\qquad 200\ дн=\frac{200}{365}=0{,}548\ г.$$

Затем вычислим *современную стоимость* каждого платежа с помощью формулы (7.45) математического учета по сложным процентам.

$$S_1(0)=\frac{1200}{(1+0{,}12)^{0{,}274}}=1163{,}31,$$
$$S_2(0)=\frac{1500}{(1+0{,}12)^{0{,}548}}=1409{,}68.$$

Найдем современную стоимость консолидированного платежа:

$$S(0)=S_1(0)+S_2(0)=1163{,}31+1409{,}68=2572{,}99.$$

Далее по формуле (7.43) найдем наращенную стоимость консолидированного платежа через 200 дней:

$$S(0{,}548)=S(0)(1+i)^{0{,}548}=2572{,}99(1+0{,}12)^{0{,}548}=$$
$$=2572{,}99\cdot 1{,}06407=2737{,}85\$.$$

Пример 10. Вексель номиналом в 1 *млн рублей* учитывается в банке за 155 дней до его погашения по годовой сложной учетной ставке 10%. Какую денежную сумму получит держатель векселя при таком учете?

Решение. По условию задачи T=155/365=0,4247, d=0,1, $S(T)$=1000000. Тогда по формуле (44)

$$S(0)=1000000(1-0{,}1)^{0{,}4247}=956239{,}75\ р.$$

Рассмотрим вопрос о вычислении коэффициентов наращения и дисконтирования **по переменным ставкам сложных процентов.**

Пусть общий период начисления процентов T состоит из n частичных временных периодов τ_m:

$$T = \bigcup_{m=1}^{n} \tau_m ,$$

причем длина $|\tau_m|$ каждого частичного временного периода равна $|\tau_m| = t_m - t_{m-1}$. На каждом таком частичном временном периоде задана процентная ставка j_m. Тогда коэффициент наращения на первом частичном периоде τ_1 равен

$$k(t_0,t_1)=1+j_1,$$

на первых двух частичных периодах $\tau_1 \bigcup \tau_2$ –

$$k(t_0,t_2)=(1+j_1)(1+ j_2)$$

на первых трех частичных периодах $\tau_1 \bigcup \tau_2 \bigcup \tau_3$ –

$$k(t_0,t_3)=(1+j_1)(1+ j_2)(1+j_3)$$

и т. д. Окончательно получаем следующую формулу для вычисления коэффициента наращения по переменным ставкам простых процентов:

$$k(T) = \prod_{m=1}^{n} (1+ j_m)^{t_m - t_{m-1}} . \tag{7.47}$$

На практике вместо ставок по каждому частичному периоду используют переменные *годовые* процентные ставки i_m ($m=1, 2, \dots ,n$). Тогда коэффициент наращения на первом частичном периоде τ_1 равен

$$k(t_0, t_1) = (1+i_1)^{\tau_1} ,$$

на первых двух частичных периодах $\tau_1 \bigcup \tau_2$ –

$$k(t_0, t_2) = (1+i_1)^{\tau_1} (1+i_2)^{\tau_2}$$

на первых трех частичных периодах $\tau_1 \bigcup \tau_2 \bigcup \tau_3$ –

$$k(t_0, t_3) = (1+i_1)^{\tau_1} (1+i_2)^{\tau_2} (1+i_3)^{\tau_3} ,$$

и т. д. Окончательно получаем следующую формулу для вычисления коэффициента наращения по переменным годовым ставкам простых процентов:

$$k(T) = \prod_{m=1}^{n} (1+i_m)^{\tau_m}$$

или

$$k(T) = \prod_{m=1}^{n} (1+i_m)^{t_m - t_{m-1}} . \tag{7.48}$$

Более подробно с производственными функциями, их свойствами и применением в макроэкономике можно ознакомиться в [3; 8].

Контрольные вопросы

1. Какой принцип, связанный с фактором времени, является аксиомой финансовых вычислений?

2. Каковы временные характеристики простейшей кредитной операции?

3. Каковы денежные характеристики простейшей кредитной операции?

4. Что называется периодом начисления денег?

5. Что называется периодом учета денег?

6. Какие характеристики кредитной операции используются при нахождении наращенной стоимости денег?

7. Какие характеристики кредитной операции используются при нахождении современной стоимости денег?

8. Что такое процентные деньги или интерес?

9. Что такое дисконт?

10. Как определяется процентная ставка?

11. Как определяется учетная ставка?

12. Как вычисляется коэффициент наращения по простой процентной ставке?

13. Как вычисляется коэффициент дисконтирования по простой учетной ставке?

14. Как вычисляется наращенная сумма по простой процентной ставке?

15. Как вычисляется наращенная сумма по простой учетной ставке?

16. Как вычисляется современная сумма по простой процентной ставке?

17. Как вычисляется современная сумма по простой учетной ставке?

18. Как вычисляется множитель наращения по простым переменным годовым процентным ставкам?

19. Как вычисляется множитель наращения по сложным переменным годовым процентным ставкам?

20. В чем выражается принцип стабильности рынка?

21. Что такое годовая номинальная процентная ставка?

22. Что такое годовая номинальная учетная ставка?

23. Что такое годовая эффективная процентная ставка?

24. Что такое годовая эффективная учетная ставка?

25. Как составляется уравнение эквивалентности?

26. Как выражается годовая эффективная процентная ставка через годовую номинальную процентную ставку?

27. Как выражается годовая номинальная процентная ставка через годовую эффективную процентную ставку?

28. Как выражается годовая эффективная учетная ставка через годовую номинальную учетную ставку?

29. Как выражается годовая номинальная учетная ставка через годовую эффективную учетную ставку?

30. Как заменяется годовая номинальная процентная ставка с начислением $к$ раз в году на годовую номинальную процентную ставку с начислением p раз в году?

31. Как заменяется годовая номинальная учетная ставка с начислением $к$ раз в году на годовую номинальную учетную ставку с начислением p раз в году?

32. Как заменяется годовая номинальная процентная ставка с начислением $к$ раз в году на годовую номинальную учетную ставку с начислением $к$ раз в году?

33. Является ли последовательность номинальных процентных ставок убывающей с ростом количества начислений в году?

34. Является ли последовательность номинальных учетных ставок возрастающей с ростом количества учетов в году?

35. Как определяется сила процента?

36. Каково порядковое отношение между эквивалентными годовыми номинальными учетными и процентными ставками и силой процента?

37. Каковы соотношения между основными параметрами финансовой операции, а именно, между эквивалентными процентными и учетными ставками?

38. Каковы соотношения между эквивалентными ставками и силой процента?

39. Каковы соотношения между коэффициентами наращения и ставками?

40. Каковы соотношения между коэффициентами дисконтирования и ставками?

Варианты заданий

Задание. Договор предусматривает следующую схему начисления процентов: за первые 2 года по годовой ставке i_1%, за следующие 1,5 года по годовой ставке i_2%, за последующие 2,5 года по годовой ставке i_3%. Найти наращенную сумму на всем промежутке начисления, если начальная сумма составляла 300000 рублей.

Вариант 0 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 10\%, \quad i_3 = 20\%}$

Вариант 1 $\boxed{i_1 = 4\%, \quad i_2 = 8\%, \quad i_3 = 24\%}$

Вариант 2 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 9\%, \quad i_3 = 28\%}$

Вариант 3 $\boxed{i_1 = 4\%, \quad i_2 = 8\%, \quad i_3 = 26\%}$

Вариант 4 $\boxed{i_1 = 3\%, \quad i_2 = 7\%, \quad i_3 = 25\%}$

Вариант 5 $\boxed{i_1 = 6\%, \quad i_2 = 8\%, \quad i_3 = 30\%}$

Вариант 6 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 10\%, \quad i_3 = 35\%}$

Вариант 7 $\boxed{i_1 = 3\%, \quad i_2 = 6\%, \quad i_3 = 25\%}$

Вариант 8 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 11\%, \quad i_3 = 36\%}$

Вариант 9 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 12\%, \quad i_3 = 33\%}$

Вариант 10 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 7\%, \quad i_3 = 29\%}$

Вариант 11 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 8\%, \quad i_3 = 31\%}$

Вариант 12 $\boxed{i_1 = 7\%, \quad i_2 = 13\%, \quad i_3 = 37\%}$

Вариант 13 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 9\%, \quad i_3 = 28\%}$

Вариант 14 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 10\%, \quad i_3 = 38\%}$

Вариант 15 $\boxed{i_1 = 3\%, \quad i_2 = 8\%, \quad i_3 = 22\%}$

Вариант 16 $\boxed{i_1 = 4\%, \quad i_2 = 7\%, \quad i_3 = 23\%}$

Вариант 17 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 11\%, \quad i_3 = 26\%}$

Вариант 18 $\boxed{i_1 = 6\%, \quad i_2 = 8\%, \quad i_3 = 28\%}$

Вариант 19 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 15\%, \quad i_3 = 35\%}$

Вариант 20 $\boxed{i_1 = 4\%, \quad i_2 = 14\%, \quad i_3 = 32\%}$

Вариант 21 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 8\%, \quad i_3 = 29\%}$

Вариант 22 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 10\%, \quad i_3 = 40\%}$

Вариант 23 $\boxed{i_1 = 3\%, \quad i_2 = 6\%, \quad i_3 = 28\%}$

Вариант 24 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 11\%, \quad i_3 = 25\%}$

Вариант 25 $\boxed{i_1 = 4\%, \quad i_2 = 8\%, \quad i_3 = 26\%}$

Вариант 26 $\boxed{i_1 = 7\%, \quad i_2 = 11\%, \quad i_3 = 35\%}$

Вариант 27 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 11\%, \quad i_3 = 33\%}$

Вариант 28 $\boxed{i_1 = 5\%, \quad i_2 = 9\%, \quad i_3 = 25\%}$

Вариант 29 $\boxed{i_1 = 8\%, \quad i_2 = 12\%, \quad i_3 = 25\%}$

Решение варианта 0

Задание. Договор предусматривает следующую схему начисления процентов по годовым процентным ставкам: за первые 2 *года* по ставке 5% , за следующие полтора года по ставке 10%, за последующие 2,5 года по ставке 20%. Найти наращенную сумму на всем промежутке начисления:

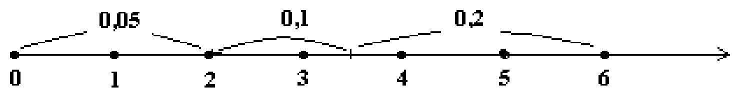
а) по простым процентам,

б) по сложным процентам,

если начальная сумма составляла 300000 *рублей.*

Решение.

а) По условию задачи $S(0)$=300000, τ_1=2, i_1=0,05, τ_2=1,5, i_2=0,07, τ_3=2,5, i_3=0,08. Ниже дано графическое представление исходных данных:



По формуле (30) найдем коэффициенты наращения на первом частичном промежутке 2 года, затем на первых двух частичных промежутках длительностью в 3,5 года, а потом на всем *периоде в 6 л*ет:

$$k(2)=1+(2–0)\cdot 0{,}05=1{,}1;$$

$$k(3{,}5)=1+(2–0)\cdot 0{,}05+(3{,}5–2)\cdot 0{,}1=1{,}25;$$

$$k(6)=1+(2–0)\cdot 0{,}05+(3{,}5–2)\cdot 0{,}1+(6–3{,}5)\cdot 0{,}2=1{,}75.$$

Следовательно, по формуле (11) имеем:

$$S(6)=S(0)k(6)=300000\cdot 1{,}75=525000 \text{ } р.$$

Ниже на рисунке 25 приведен график наращения денежной суммы в соответствии с заданной схемой:

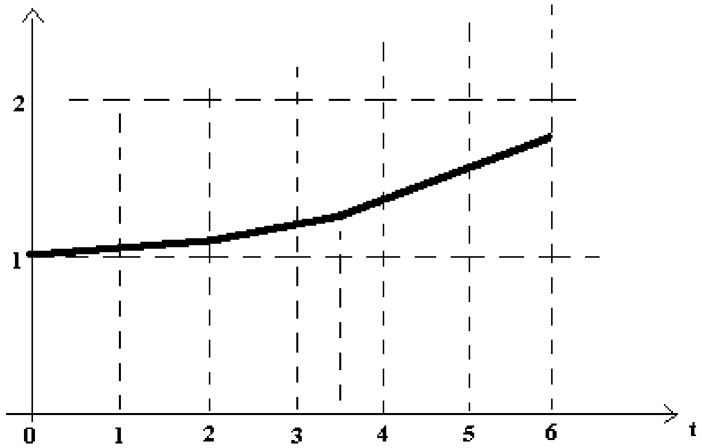
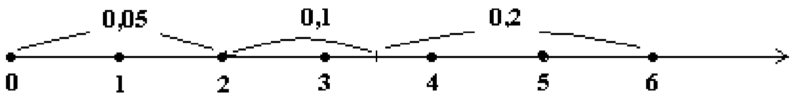


Рис. 25. Трехзвенная ломаная наращения денежной суммы по простым процентам

График изменения коэффициента наращения на этом рисунке представляет собой трехзвенную ломаную или, по-другому, линейный сплайн.

б) По-прежнему, $S(0)$=300000, τ_1=2, i_1=0,05, τ_2=1,5, i_2=0,07, τ_3=2,5, i_3=0,08. Ниже дано графическое представление исходных данных:



По формуле (48) найдем коэффициенты наращения на первом частичном промежутке 2 года, затем на первых двух частичных промежутках длительностью в 3,5 года, а потом на всем периоде в 6 лет:

$$k(2) = (1+0,05)^2 = 1,1025,$$

$$k(3,5) = (1+0,05)^2(1+0,1)^{1,5} = 1,1025 \cdot 1,1537 = 1,2719,$$

$$k(6) = (1+0,05)^2(1+0,1)^{1,5}(1+0,2)^{2,5} = 2,0063.$$

Следовательно, по формуле (43) имеем:

$$S(6)=S(0)k(6)=300\,000 \cdot 2,0063=601\,890\ \textit{р.}$$

Ниже на рисунке 26 приведен график наращения денежной суммы в соответствии с заданной схемой:

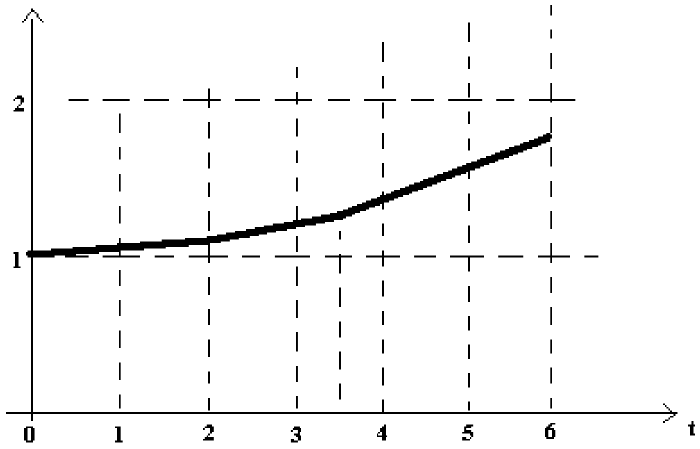


Рис. 26. Трехзвенная ломаная наращения денежной суммы по сложным процентам

График изменения коэффициента наращения на этом рисунке представляет собой трехзвенную ломаную, склеенную из кусков показательных функций, или, по-другому, экспоненциальный сплайн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белолипецкий А.А., Горелик В.А. Экономико-математические методы. М.: Академия, 2010. 368 с.

2. Катаргин Н.В. Экономико-математическое моделирование в Excel. Саратов: Вузовское образование, 2019. 83 с.

3. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: Юнити, 1994. 240 с.

4. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. М.: Юнити, 1997. 407 с.

5. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2013. 389 с.

6. Пяткина Д.А., Матюшенко С.И. Математическое моделирование в экономике и финансах. М.: Российский университет дружбы народов, 2018. 40 с.

7. Федосеев В.В., Эриашвили Н.Д. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. М.: Юнити, 2001. 158 с.

8. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. М.: КДУ, 2009. 440 с.

Учебное издание

Дмитриев Николай Пименович

Сборник заданий по избранным главам экономико-математического моделирования

Практикум

ISBN 978-5-00047-628-4

9 785000 476284

Редактор, технический редактор: Е.В.Вилявина
Обложка: Д.В. Вилявин

Дата выхода: 29.04.2022
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. листов 3,5
Электронное издание. Объем 1,9 МБ. Заказ 2225

Издательство НВГУ
628615, Тюменская область, г. Нижневартовск, ул. Маршала Жукова, 4
Тел./факс: (3466) 24-50-51, E-mail: izdatelstvo@nggu.ru