Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижневартовский государственный гуманитарный университет

Н.Р. Жарова
Л.Г. Кузнецова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 540200 «Физико-математическое образование»

Нижневартовск
2012

УДК 517.2(07)
ББК 22.161.6
Ж 35

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории и методики обучения математике
ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»
В.А. Далингер;
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики
ГОУ ВПО «Омский государственный университет путей сообщения»
О.В. Гателюк

Жарова Н.Р., Кузнецова Л.Г.

Ж 35 **Дифференциальные уравнения:** Учебное пособие. — Изд. 2-е, испр. и доп. — Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гуманит. ун-та, 2012. — 147 с.

ISBN 978–5–89988–953–0

В пособии рассмотрены основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Из уравнений высших порядков рассмотрены отдельные типы уравнений, допускающих понижения порядка, и линейные, в том числе с постоянными коэффициентами. Отдельные главы посвящены методам решения систем дифференциальных уравнений и численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В приложениях рассмотрены примеры краевых и прикладных задач с использованием компьютерных математических пакетов Maple и Mathcad. Приведен типовой расчет по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Содержание пособия отвечает требованиям ФГОС ВПО к математической подготовке студентов физико-математического направления.

Данное учебное пособие предназначено для обучения дифференциальным уравнениям студентов физико-математического профиля, но может быть использовано студентами, аспирантами и преподавателями высших технических и экономических учебных заведений.

ISBN 978–5–89988–953–0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях специалисту любого профиля необходимы глубокие математические знания для решения многочисленных задач, возникающих в профессиональной деятельности. Особая роль при этом отводится дифференциальным уравнениям, которые позволяют моделировать разнообразные физические, технические, социально-экономические процессы и явления.

Дифференциальным уравнением называют уравнение, связывающее независимые переменные, неизвестную функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называют *порядком дифференциального уравнения*.

Дифференциальные уравнения делят на две группы в зависимости от количества входящих в них независимых переменных. Если переменная одна, то уравнение называют обыкновенным, если переменных две или больше, то уравнение называют *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Произвольное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n имеет следующий вид:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}),$$

где $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$ и $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ — заданные функции соответствующих аргументов, удовлетворяющие определенным условиям непрерывности и дифференцируемости, на которых мы здесь останавливаться не будем.

Заметим, что функции F и f могут не содержать некоторых аргументов, но для того чтобы данное уравнение называлось дифференциальным, необходимо наличие по крайней мере одной производной.

Дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, f, f'_{x_1}, f''_{x_2}, ..., f_{x_n}{}^{(n)}) = 0.$$

Например, $5x^2y' - 4y^3 = 0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, $y'' - 2 = 3x + 10$ — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, $x^2 \cdot z'_x - 2y \cdot z'_y = 0$ — дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

В данном учебном пособии рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения. В каждой главе пособия содержатся необходимые теоретические сведения (основные теоремы, определения, формулы, вычислительные схемы и т.д.), подробно разобранные примеры и задания для самостоятельного решения. Приведены примеры применения дифференциальных уравнений к решению различных прикладных, в том числе и инженерно-технических, задач.

В пособии приведены следующие основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными; однородные; линейные; в полных дифференциалах; уравнения Бернулли, Лагранжа и Клеро. Из уравнений высших порядков рассмотрены только уравнения, допускающие понижения порядка, и линейные, в том числе с постоянными коэффициентами. Отдельные главы посвящены методам решения систем дифференциальных уравнений и краевым задачам. Кроме этого, в пособии рассмотрены некоторые численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, приведены примеры решений обыкновенных дифференциальных уравнений в универсальных математических системах MathCAD и Maple.

В учебное пособие включен типовой расчет по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Он содержит теоретические вопросы, теоретические упражнения, расчетные задания в 30-ти вариантах и образец решения нулевого варианта. Теоретические вопросы и теоретические упражнения являются общими для всех студентов, расчетные задания выполняются по вариантам (номер варианта указывает преподаватель).

Предполагается, что правильность выполнения студентами типового расчета должен контролировать преподаватель. При этом сначала следует проверять правильность решения теоретических упражнений и задач, а затем провести защиту типовых расчетных заданий. Во время защиты студент должен уметь правильно отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения практических задач.

Данное учебное пособие предназначено для обучения методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений студентов физико-математического направления, но может быть использовано студентами, аспирантами и преподавателями высших технических и экономических учебных заведений, а также различными специалистами, самостоятельно изучающими дифференциальные уравнения.

Содержание пособия отвечает требованиям государственных образовательных стандартов к математической подготовке студентов физико-математического направления, инженерно-технических и экономических специальностей.

Глава 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

или

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

если оно разрешимо относительно y'.

Решением дифференциального уравнения (1) или (2) называется дифференцируемая функция

$$y = y(x), \tag{3}$$

которая при подстановке в уравнение (1) или (2) обращает его в тождество. При этом кривая, определяемая уравнением (3), называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (1) или (2).

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

Решения обыкновенного дифференциального уравнения могут быть общими, частными или особыми.

Общим решением уравнения (1) или (2) называется функция

$$y = y(x, C), \tag{4}$$

зависящая от одной произвольной постоянной C и такая, что

1) при любом значении C эта функция является решением уравнения (1) или (2);
2) любое *частное решение* уравнения (1) или (2) может быть получено из общего решения $y = y(x, C)$ при некотором фиксированном значении постоянной $C = C_0$.

Иногда не удается получить решение дифференциального уравнения в явном виде $y = y(x)$ или $y = y(x, C)$, а получается оно в неявном виде, т.е. задается одной из формул вида

$$\Phi(x, y) = 0,\ \Phi(x, y, C) = 0 \text{ или } \psi(x, y) = C.$$

В этом случае соотношение

$\Phi(x, y, C) = 0$ или $\psi(x, y) = C$

называется общим интегралом уравнения (1) или (2), а выражение вида

$$\Phi(x, y) = 0$$

– частным интегралом уравнения (1) или (2).

Геометрически общее решение (4) представляет собой семейство интегральных кривых (рис. 1) на плоскости Oxy, зависящее от одной произвольной постоянной C, а частное решение $y = y(x, C_0)$ — одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$.

Основная задача, связанная с уравнением (1) или (2), называется задачей Коши.

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка формулируется следующим образом: найти решение обыкновенного дифференциального уравнения (1) в виде функции (3), удовлетворяющей начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{5}$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую,

$$y = y(x),$$

проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и удовлетворяющую равенству (1).

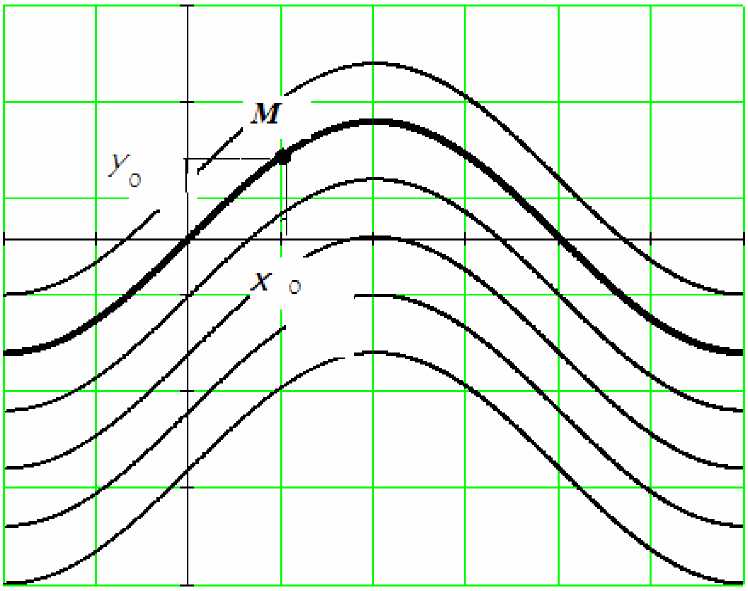


Рис. 1

Теорема. Пусть дано дифференциальное уравнение (2), где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости xOy, содержащей точку (x_0, y_0). Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям:

а) $f(x, y)$ — непрерывная функция двух переменных в области D;
б) $f(x, y)$ имеет частную производную f'_y, ограниченную в D,

то найдется интервал $(x_0 - h;\ x_0 + h)$, на котором существует единственное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее условию (5).

Замечание 1. Теорема дает достаточные условия существования единственного решения задачи Коши для уравнения (1) или (2), но эти условия не являются необходимыми. Может существовать единственное решение уравнения (1) или (2), удовлетворяющее условию (5), хотя в точке (x_0, y_0) не выполняется условие *а*, или *б*, или оба вместе.

Замечание 2. Условие ограниченности производной f'_y можно ослабить и заменить так называемым условием Липшица.

Говорят, что функция $f(x, y)$, определенная в некоторой области D, удовлетворяет в D *условию Липшица* по y, если существует такая постоянная L (постоянная Липшица), что для любых y_1, y_2 и x из D справедливо неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le L \cdot |y_2 - y_1|.$$

Теорема. Если функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y в некоторой области D, определяемой неравенствами

$$|x - x_0| \le a, \qquad |y - y_0| \le b, \tag{6}$$

то задача Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$ имеет единственное решение в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Особым решением уравнения (1) или (2) называется такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в любой окрестности каждой точки (*x, y*) особого решения существуют по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку, или не существует ни одной.

Особое решение уравнения (1) или (2) не содержится в общем решении (4), т.е. не получается из него ни при каких частных значениях постоянной *C*.

1.1. Геометрический способ решения

Пусть дано уравнение (2) и функция $y = \varphi(x)$ – его решение. График решения представляет собой непрерывную интегральную кривую, через каждую точку которой можно провести касательную. Из уравнения $y' = f(x, y)$ следует, что угловой коэффициент y' к интегральной кривой в каждой ее точке (*x, y*) равен значению в этой точке правой части уравнения $f(x, y)$.

Таким образом, уравнение $y' = f(x, y)$ устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом y' касательной к графику интегральной кривой в этой точке. Зная *x* и *y*, можно указать направление касательной к этой интегральной кривой в точке (*x, y*).

Если сопоставить каждой точке интегральной кривой направленный отрезок, угловой коэффициент которого равен $f(x, y)$, то получим так называемое *поле направлений* данного уравнения, раскрывающее геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка.

Итак, с геометрической точки зрения уравнение $y' = f(x, y)$ определяет на плоскости *Oxy* *поле направлений.* Решение этого уравнения – интегральная кривая, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке. Построив на плоскости поле направлений данного дифференциального уравнения, можно приближенно построить интегральные кривые.

Чтобы облегчить построение интегральных кривых, находят линии, во всех точках которых направления одинаковы. Такие линии называют *изоклины* («изо» – *равный*, «клино» – *наклон*).

Пример 1. Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = x + y$.

Решение. Построим поле направлений при помощи компьютерной универсальной математической системы Maple (рис. 2).

```
> DEplot(D(y)(x)=y(x)+x,y(x),x=-3..3,[[y(0)=0],[y(0)=2],[y(0)=-3]],
title=`Поле направлений и интегральные кривые`,colour=magenta,
linecolor=[black,green,blue]);
```

Поле направлений задает направление интегральных кривых, проходящих через точки (0;0), (0;2), (0,-3).

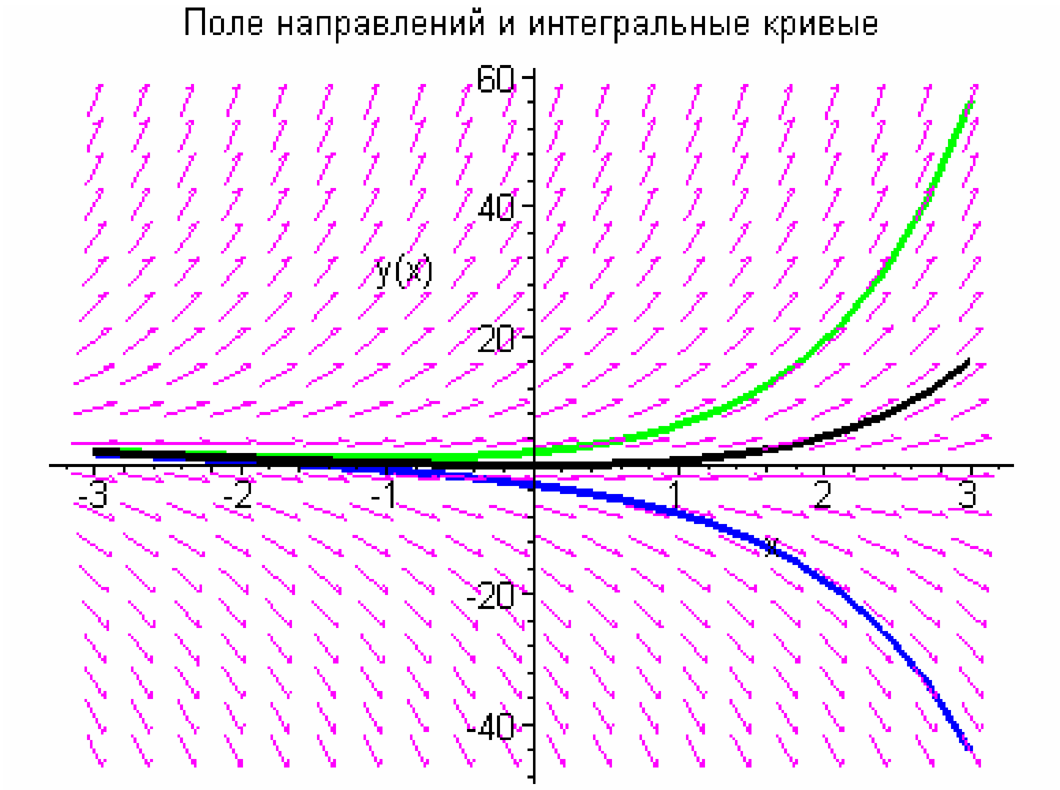


Рис. 2

Пример 2. Решить графически уравнение $y' = \frac{1}{2}x$.

Решение. Уравнение семейства изоклин данного уравнения имеет вид $\frac{x}{2} = k$, или $x = 2k$, где k — параметр.

Таким образом, изоклинами служат прямые, параллельные оси *Oy*.

При $k = 0$ будем иметь изоклину $x = 0$ (ось *Oy*), во всех точках которой поле направлений будет параллельно оси *Ox*.

При $k = 1$ получаем изоклину $x = 2$, во всех точках которой направление поля образует с осью *Ox* угол 45°; полагая $k = -1$, найдем, что во всех точках изоклины $x = -2$ направление поля образует с осью *Ox* угол $-45°$ и т.д.

Если задать какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0)$, то можно приближенно построить интегральную кривую, проходящую через эту точку. По рис. 3 видно, что интегральная кривая напоминает параболу. Действительно, общим решением этого уравнения является $y = \frac{1}{4}x^2 + C$, т.е. семейство парабол.

На рис. 3 построено поле направлений и интегральные кривые при помощи математической системы Maple.

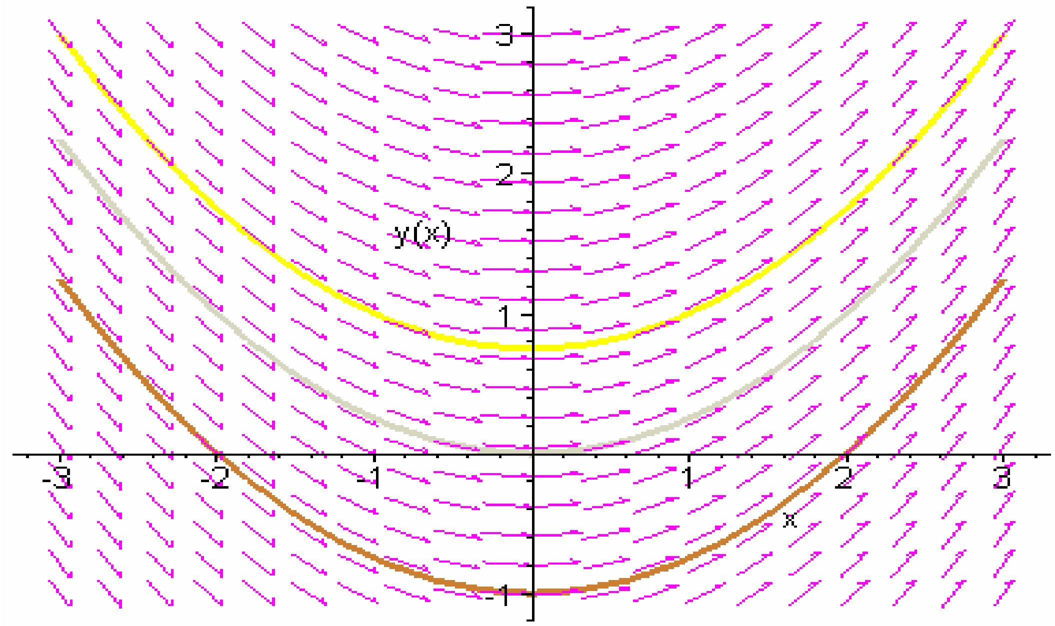


Рис. 3

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида (2):

$$y' = f(x, y).$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Умножим его на величину dx, получим $dy = f(x, y)\,dx$, откуда имеем

$$f(x, y)\,dx - dy = 0.$$

Получившееся уравнение можно рассматривать как уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \quad (7)$$

Пусть каждая из функций $M(x,y)$ и $N(x,y)$ является произведением двух функций, из которых одна зависит только от x, а вторая — только от y:

$$M(x, y) = M_1(x)\,M_2(y), \qquad N(x, y) = N_1(x)\,N_2(y),$$

тогда уравнение (7) принимает вид

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \quad (8)$$

и называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Разделим (8) на величину $M_2(y)\,N_1(x)$, получим

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0 \quad (9)$$

или, введя обозначения $\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)} = f_1(x)$, $\quad \dfrac{N_2(y)}{M_2(y)} = f_2(y)$,

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0\,. \quad (10)$$

Уравнения вида (9) или (10) называются *уравнениями с разделенными переменными*. В них множитель перед dx — функция только одной переменной x, а множитель перед dy — функция только одной переменной y.

Итак, уравнение с разделяющимися переменными (8) сводится к уравнению с разделенными переменными (9) путем деления обеих частей уравнения (8) на произведение $M_2(y)N_1(x)$. Эта операция называется *разделением переменных*.

Интегрируем (10), получим решение (интеграл) уравнения (2):

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C .$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными состоит в выполнении двух действий:

1) разделить переменные, т.е. получить уравнение вида (9) или (10);
2) проинтегрировать уравнение с разделенными переменными.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = e^{3x+y}$.

Решение. Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные x и y:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot e^{y}, \qquad e^{-y}dy = e^{3x}dx .$$

Интегрируем: $\int e^{-y}dy = \int e^{3x}dx$, откуда получим

$$-e^{-y} = \frac{1}{3}e^{3x} + C .$$

Таким образом, $\frac{1}{3}e^{3x} + e^{-y} + C = 0.$— общее решение.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + y^2)dx - xy\,dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

1. Найдем сначала общее решение. Для этого разделим переменные x и y:

$$(1 + y^2)\, dx = xy\, dy,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{1+y^2}.$$

Проинтегрируем последнее равенство: $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{1+y^2}$, получим $\ln|x| + \ln|C_1| = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|$.

Учитывая свойства логарифмов, общее решение данного уравнения можно записать в виде

$$Cx^2 - y^2 = 1, \text{ где } C = (C_1)^2.$$

2. Найдем частное решение. Для этого подставим в общее решение начальные условия $x = 1$, $y = 0$, получим $C = 1$.

Подставим в общее решение найденные значения постоянной C, получим частное решение данного уравнения: $x^2 - y^2 = 1$.

На рис. 4 представлены интегральные кривые при С = 1; 2; 3.

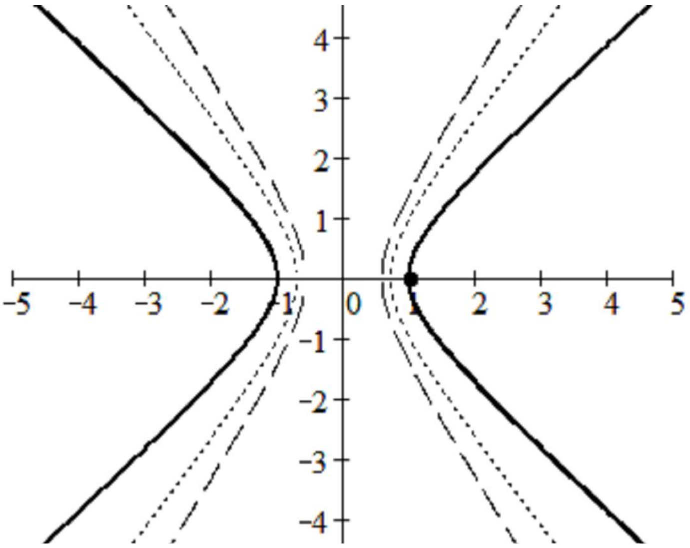


Рис. 4

Приведем примеры решения различных прикладных задач с помощью дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Пример 3. Определить форму диска равного сопротивления, если его толщина мала по сравнению с диаметром и диск быстро вращается.

Решение. Исходя из условия задачи, можно предположить, что напряжения, создаваемые центробежной силой, по толщине диска не меняются и зависят лишь от расстояния r от оси диска.

Обозначим через p и q соответственно напряжения в направлении радиуса и в перпендикулярном к нему направлении, а через y — толщину диска на расстоянии r от оси (рис. 5).

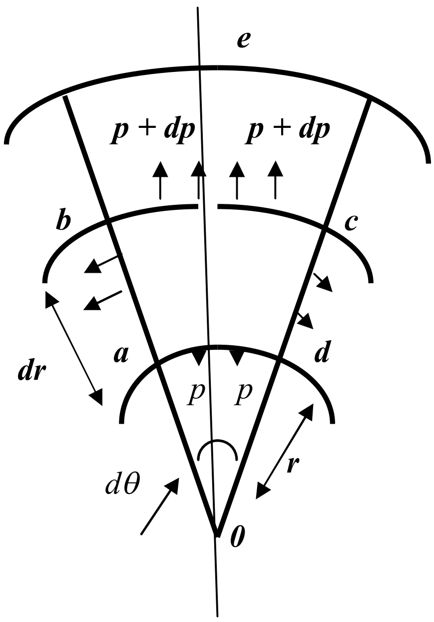


Рис. 5

Выделим на диске бесконечно малый элемент *abcd* двумя меридиональными плоскостями, проходящими через ось под углом u, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$. Рассмотрим силы, действующие на этот элемент, и установим условие их равновесия. На площадку *ad* действует напряжение p. Чтобы получить полное усилие, направленное по радиусу к центру, умножим p на величину площадки $yrdr$ (считая эту площадку плоской). Получим $dR_1 = pryd\,u$.

Это усилие направлено по радиусу к центру. Аналогично на площадку *bc* действует усилие $dR_2 = (pry + d(pry))du$ в противоположном направлении.

Рассмотрим площадки *ab* и *cd*, на которые нормально к ним действует напряжение q. Считаем, что эти площадки — прямоугольники с основанием dr и высотой y. Тогда для величины усилий, действующих перпендикулярно радиусам Od и Oa, получим

$$dT = qydr.$$

Сложив их по правилу параллелограмма, получим равнодействующую, направленную по радиусу eO к центру и равную $2dT\sin\dfrac{d\theta}{2}$ или $dT \cdot du = qy\,dr\,du$.

Вычислим центробежную силу, действующую на выделенный элемент. Примем этот элемент за параллелепипед с осями $ad = r\,du$, $ab = dr$, y.

Для объема получим выражение $dv = ry\,dr\,du$.

Обозначим через w – угловую скорость вращения диска, а g — вес единицы объема. Тогда центробежная сила, направленная по радиусу Oe от центра, будет равна

$$dz = dmw^2r = \frac{\gamma}{g}dvw^2r = \frac{\gamma w^2}{g}r^2y\,dr\,d\theta\,.$$

Условие равновесия всех сил будет: $dR_2 - dR_1 - dTdu + dz = 0$
или

$$\frac{d(pry)}{dr} - qy + \frac{\gamma w^2}{g}r^2y = 0\,.$$

При $p = q = y$ получим $\dfrac{d(ry)}{dr} - y + \dfrac{\gamma w^2}{q\sigma}r^2y = 0$.

Поскольку $\dfrac{y}{r} \approx 0$ (по условию $y << r$), то

$$\frac{dy}{dr} + \frac{\gamma w^2}{q\sigma}ry = 0\,.$$

Разделим переменные и проинтегрируем: $\displaystyle\int\frac{dy}{y} = \frac{\gamma w^2}{q\sigma}rdr$;

$$\ln|y| = \frac{-\gamma \cdot w^2}{2q\sigma}r^2 + \ln|C|.$$

Диск равного сопротивления изготовляют в форме $y = Ce^{\frac{-\gamma \cdot w^2}{2q\sigma}r^2}$.

Задача 4. *Поток научной информации.*
Найти закон, определяющий достигнутый уровень числа публикаций как функцию времени.

Решение. При исследовании роста информационных потоков в науке, т.е. числа научных публикаций, исходят из допущения, что скорость роста $\dfrac{dy}{dt}$ пропорциональна достигнутому уровню y публикаций, т.е. относительная скорость роста $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dt}$ остается постоянной. Закон, определяющий достигнутый уровень числа публикаций в зависимости от времени, находится из дифференциального уравнения

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = K, \quad \mathrm{K} > 0,$$

где $K = \mathrm{const}$ — коэффициент, характеризующий (в среднем) отклики на публикации в той или иной области знания. Решаем полученное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{y} = Kdt$:

$$\ln|y| = Kt + C_1\ ,\ y = Ce^{Kt}, \quad \text{где } C = \pm e^{C_1}.$$

Начальное условие: при $t = 0$ $y = a$, где a – постоянная, характеризующая некоторый начальный уровень развития науки. Тогда $y = a \cdot e^{Kt}$.

При резком изменении внешних условий закон не может уже сохраниться. Рост уровня ограничивается некоторым его значением, и механизм роста числа публикаций представится следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = K \cdot y(b - y), \qquad (K > a,\ 0 < y < b),$$

где b – максимально возможное значение величины y.

Относительная скорость роста $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = K(b - y)$ становится линейной функцией от переменной y.

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{y(b-y)} = Kdt$. Так как

$$\int \frac{dy}{y(b-y)} = \frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right)dy = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{y}{y-b}\right|,$$

получим $\frac{1}{b}\ln\left|\frac{y}{y-b}\right| = Kt + C_1$, откуда $\ln\left|\frac{y}{y-b}\right| = Ktb + C_1 b$.

Обозначим $C_1\, b = C_2$, тогда $\ln\left|\frac{y}{y-b}\right| = Ktb + C_2$, $\left|\frac{y}{y-b}\right| = e^{Ktb+C_2}$, $\frac{y}{y-b} = Ce^{Ktb}$,

где $C = \pm\ e^{C_2}$, откуда найдем значение y:

$$y = (y - b)\cdot C\cdot e^{Ktb}, \qquad y(C\cdot e^{Ktb} - 1) = C\cdot b\cdot e^{Ktb},$$

$$y = \frac{C \cdot b \cdot e^{Ktb}}{C \cdot e^{Ktb} - 1}.$$

Постоянная C находится по начальному условию.

Задача 5. *Охлаждение тела.*

Пусть в начальный момент тело массой m имеет температуру T_0. Температура окружающей среды постоянна и равна T_c, $T_0 > T_c$. Найти закон охлаждения тела.

Решение. При решении используется закон Ньютона (для охлаждающего тела): скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Если T — температура тела в любой момент времени t, $\frac{dT}{dt}$ — скорость изменения температуры тела, то $\frac{dT}{dt} = k(T - T_c)$ — закон Ньютона. Для охлаждающегося тела:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c),$$

где k — коэффициент пропорциональности, $k = \text{cons}\,t$.

Интегрируем уравнение, разделив переменные: $\dfrac{dT}{T - T_c} = -kdt$, $\quad \ln|T - T_c| = -kt + C$,

$$|T - T_c| = e^{-kt+C}, \qquad T = T_c + e^{-kt}\,C_1, \quad \text{где } C_1 = \pm e^C.$$

Введем начальное условие. При $t_0 = 0$, $\quad T = T_0 \qquad C_1 = T_0 - T_c$.

Решение задачи Коши:

$$T = T_c + (T_0 - T_c)e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k должен быть задан.

Задача 6. *Истечение жидкости из сосуда.*

Сосуд наполнен жидкостью до уровня *H*. Пусть S – площадь поперечного сечения, известная функция высоты *h*, т.е. $S = S(h)$. На дне сосуда имеется отверстие площадью w, через которое жидкость вытекает. Определить время *t*, за которое уровень жидкости понизится от начального положения *H* до произвольного *h*, и время *T* полного опорожнения сосуда, считая, что скорость *v* изменения количества (объема) жидкости в сосуде является известной функцией $v = v(h)$ от уровня жидкости в сосуде (напора).

Решение. Пусть высота жидкости в любой момент времени *t* равна *h*.

Количество жидкости *dv*, вытекшее из сосуда за промежуток времени *dt* от момента *t* до $\Delta t = t + dt$, можно подсчитать как объем цилиндра с площадью основания w и высотой $v(h)dt$. Тогда

$$dv = wv(h)dt. \tag{11}$$

Этот же объем жидкости может быть вычислен другим способом. Вследствие утечки воды уровень *h* жидкости в сосуде понизится на величину *dh*. Следовательно,

$$d\,v = -\,S(h)dh, \tag{12}$$

(знак минус, т.к. $dh < 0$). Из формул (11) и (12) следует

$$wv(h)dt = -S(h)dh$$

— дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Разделив переменные в этом уравнении, получим

$$wdt = -\frac{S(h)}{v(h)}dh,$$

откуда $wt = -\int \dfrac{S(h)}{v(h)}dh + c.$ Или, с учетом начальных условий,

$$t = \frac{-1}{w}\int_H^h \frac{S(h)}{v(h)}dh. \tag{13}$$

При полном опорожнении сосуда $h = 0$, $t = T$. Тогда время опорожнения

$$T = \frac{1}{w}\int_0^H \frac{S(h)}{v(h)}dh. \tag{14}$$

Если истечение жидкости происходит через малое отверстие или через короткий патрубок, то, согласно закону Торичелли,

$$v = \mu\sqrt{2gh},$$

где g — ускорение свободного падения; μ — эмпирический коэффициент (коэффициент расхода). Формулы (13), (14) могут быть записаны в виде

$$t = \frac{1}{w\mu\sqrt{2g}} \int_h^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh; \qquad T = \frac{1}{w\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh.$$

Задача 7. *Химическая реакция.*

Если X – количество вещества С, в которое переходит каждое из двух веществ А и В, то при постоянстве температуры и соблюдении некоторых других условий полагают, что скорость реакции dX/dt пропорциональна:

1) оставшемуся количеству вещества А (в случае перехода вещества А в вещество С), т.е.

$$\frac{dX}{dt} = K(a - X),$$

где a — начальное количество вещества А ($a \geq 0$); K — коэффициент пропорциональности, $K > 0$;

2) произведению реактирующих масс (в случае перехода двух веществ А и В в вещество С), т.е.

$$\frac{dX}{dt} = K(a - X)(b - X),$$

где a и b — начальное количество веществ А и В соответственно ($a \geq 0$, $b \geq 0$); K — коэффициент пропорциональности, $K > 0$.

Найти зависимость X от времени t в обоих случаях.

Решение. Составленные дифференциальные уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными.

Для случая 1): $\dfrac{dX}{a - X} = Kdt$; $-\ln|a - X| = Kt + C_1$;

$$\ln|a - X| = -Kt - C_1; \quad |a - X| = e^{-Kt - C_1}, \quad a - X = C_2 e^{-Kt}, \quad \text{где } C_2 = \pm e^{-C_1}.$$

Тогда $X = a - C_2 e^{-Kt}$. Постоянную C_2 находим по начальному условию (при $t = 0$ $X = 0$): $C_2 = a$.

$$X = a(1 - e^{-Kt}).$$

Для случая 2):

$$\frac{1}{b - a} \ln\left|\frac{X - b}{X - a}\right| = Kt + C \quad \text{или} \quad \frac{1}{b - a} \ln\left|\frac{X - a}{X - b}\right| = -Kt - C.$$

$$\left|\frac{X - a}{X - b}\right| = e^{(b-a)(-Kt-C)}; \quad \frac{X - a}{X - b} = \pm e^{(b-a)(-Kt-C)}; \quad \frac{X - a}{X - b} = C_1 e^{-K(b-a)t},$$

где $C_1 = \pm e^{-C(b-a)}$.

Из начальных условий находим, что $C_1 = \dfrac{a}{b}$, откуда получаем частное решение в виде:

$$\frac{X - a}{X - b} = \frac{a}{b} e^{-K(b-a)t}$$

или

$$X = ab \frac{1 - e^{-K(b-a)t}}{b - ae^{-K(b-a)t}}.$$

Задача 8. *Очищение газа.* Для очистки газа для некоторой газообразной смеси его пропускают через скруббер (сосуд, содержащий тот или иной поглотитель). Количество газообразной примеси, поглощаемое тонким слоем поглотителя при установившемся режиме аппарата, пропорционально концентрации примеси, а также толщине и площади поперечного сечения слоя. Скруббер имеет форму конуса с радиусом основания R и высотой H (рис. 6). Газ поступает через вершину конуса.

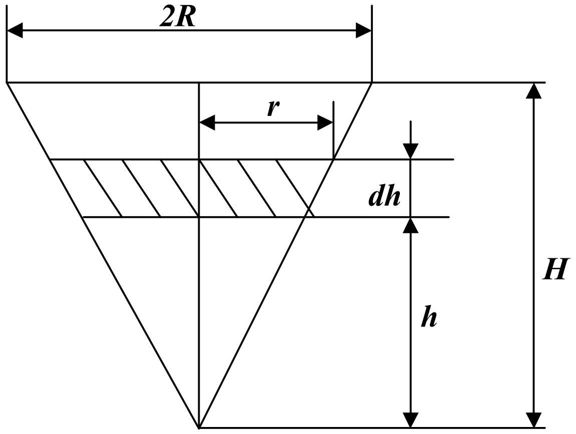


Рис. 6

Найти зависимость концентрации газообразной примеси в скруббере как функцию расстояния слоя от вершины конуса, если концентрация примеси в поступающем газе равна a %, а в выходящем b %.

Решение. Обозначим концентрацию примеси через q %, расстояние слоя от вершины конуса через h, изменение концентрации газа через $\frac{dq}{dh}$.

Тогда дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$\frac{dq}{dh} = kq\pi r^2,$$

где $k = \text{const}$ – коэффициент пропорциональности; r – радиус сечения тонкого слоя конуса, который связан с размерами конуса зависимостью $r = \frac{Rh}{H}$.

Тогда

$$\frac{dq}{dh} = kq\pi\frac{R^2h^2}{H^2}.$$

Решим это уравнение:

$$dq = kq\pi\frac{R^2h^2}{H^2}dh; \qquad \frac{dq}{q} = k\pi\frac{R^2}{H^2}h^2dh;$$

$$\ln|q| = k\pi\frac{R^2h^3}{3H^2} + C_1; \qquad q = Ce^{k\pi\frac{R^2h^3}{3H^2}};$$

$$C = \pm e^{C_1}; \qquad q = Ce^{k\pi\frac{R^2h^3}{3H^2}},$$

где C найдем по начальному условию: при $h = 0$ и $q = a$.

Получим $C = a$, следовательно,

$$q = ae^{k\pi\frac{R^2h^3}{3H^2}}.$$

Остается найти коэффициент k из условия: $h = H$, $q = b$. Из последнего уравнения получим

$$b = a\,e^{k\pi\frac{R^2H^3}{3H^2}}.$$

Заметим, что проще найти выражение, содержащее *k:*

$$\left(e^{k\pi\frac{R^2}{H^2}}\right)^{\frac{H^3}{3}} = \frac{b}{a}; \qquad e^{k\pi\frac{R^2}{H^2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{H^3}}.$$

Откуда получим

$$q = a\cdot\left(e^{k\pi\frac{R^2}{H^2}}\right)^{\frac{H^3}{3}} = a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{H^3}}.$$

Окончательно имеем

$$q = a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{H^3}}.$$

Задания для самостоятельного решения

Проинтегрировать уравнения (1—17):

1. $y' = y^3$.

2. $(4-3y^2)dx + x^3y^{\,2}dy = 0$.

3. $y' = 5^{x+y}$.

4. $y' = 2y^{2/3}\cdot x$.

5. $\ln\cos y\;dx + x\cdot tg\;y\;dy = 0$.

6. $y'ctgx + y = 2$.

7. $y' = (2y+1)\cdot tgx$.

8. $(2+e^x)y\cdot y' = e^x$.

9. $x\sqrt{1+y^2} + y\,y'\sqrt{1+x^2} = 0$.

10. $(1+y)^2y' = 16x$.

11. $y' = \sqrt{\dfrac{9-y^2}{9-x^2}}$.

12. $y' = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin y}}$.

13. $\dfrac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

14. $\dfrac{dx}{x(y-2)} + \dfrac{dy}{y(x+1)} = 0$.

15. $e^{1+x^2}\cdot tg\;y\;dx - \dfrac{e^{2x}}{x-1}dy = 0$, $\quad y\,(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

16. $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0$, $y\,(0) = 1$.

17. $\sec^2 x\cdot tg\;y\;dx + \sec^2 y\cdot tgx\;dy = 0$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

18. Найти кривую, проходящую через точку (0, –4), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной в три раза.

19. Найти кривую, для которой площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная и равная 4.

20. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый данный момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость равна A_0. Найти стоимость оборудования по истечении *t* лет.

21. Температура вынутого из печи тела в течение 20 мин падает со 100^0 до 60^0 С. Температура воздуха равна 20^0 С. Через сколько времени от момента начала охлаждения температура тела понизится до 30^0 С?

22. *Задача о приросте населения*. Пусть скорость прироста населения прямо пропорциональна количеству населения. Найти зависимость между численностью населения A и временем t, если известно, что в некоторый момент, принимаемый за начальный, количество населения равнялось A_0, а через год оно увеличилось на a %.

23. Эластичность спроса η = - 1/3 для любых значений p. Найдите функцию спроса.

Замечание. Эластичность спроса определяется $\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$, где p – цена товара, $x = x(p)$ – функция спроса.

24. В условиях конкурентного рынка найти выражение для объема реализованной продукции $y = y\ (t)$, если известно, что цена на товар задается функцией $p(y) = 2 - y$, норма инвестиций $m = 0{,}5$, коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скоростью выпуска продукции $l = 2$ и объема реализованной продукции в начальный времени равен 0,5 у.е.

Замечание. Объем производства задается уравнением $\frac{dy}{dt} = m \cdot p(y) \cdot l \cdot y$.

1.3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f\,(x, y)$ называется *однородной порядка k*, если выполняется тождество

$$f\,(tx,\ ty) = t^k f\,(x, y).$$

При $k = 0$ имеем однородную функцию нулевого порядка.

Пример 1. Функция $f\,(x,\ y) = x\ y - 4x^2$ является однородной функцией порядка 2, т.к. $f\,(tx,\ ty) = (tx)\cdot(ty) - 4(tx)^2 = t^2(x\ y - 4x^2) = t^2 f\,(x,y)$.

Функция $f\,(x,\ y) = \dfrac{3x^2+2y^2}{xy}$ является однородной функцией нулевого порядка, т.к.

$$f\,(tx,\ ty) = \frac{3(tx)^2+2(ty)^2}{(tx)\cdot(ty)} = \frac{t^2\cdot(3x^2+2y^2)}{t^2\cdot xy} = \frac{3x^2+2y^2}{xy} = f\,(x,y).$$

Уравнение вида

$$M\,(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется *однородным* дифференциальным уравнением первого порядка, если функции $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ являются однородными функциями одного порядка.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка всегда можно представить в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{15}$$

С помощью подстановки $y = ux$ это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Заметим, что при решении однородного уравнения необязательно его приводить к виду (15), можно сразу сделать подстановку

$$y = ux \text{ (или } x = uy)$$

и получить уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$$

Решение. Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим его с помощью подстановки.

Пусть $y = ux$. Дифференцируя это равенство, получим $y' = (ux)' = u + x\dfrac{du}{dx}$. Подставим эти выражения в данное уравнение:

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \sin u .$$

Сократим на величину u, получим уравнение с разделяющимися переменными: $x\dfrac{du}{dx} = \sin u$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln|C|,$$

что после потенцирования дает

$$\left|tg\frac{u}{2}\right| = |C| \cdot |x|.$$

Так как

$$u = \frac{y}{x}, \text{ то } \ tg\frac{y}{2x} = \pm C\,x$$

и общий интеграл имеет вид

$$y = 2x \cdot arctg\,(\pm C\,x).$$

Пример 3. *Задача о форме зеркала рефлектора.*

По какой поверхности вращения надлежит отшлифовать зеркало рефлектора, чтобы все лучи, исходящие из помещенного в определенной точке O на оси вращения источника света, отражались от зеркала параллельно этой оси?

Решение. Пусть L – искомое сечение формы зеркала (рис. 7). Ox — ось вращения; треугольник MTO — равнобедренный, так что

$$TO = OM.$$

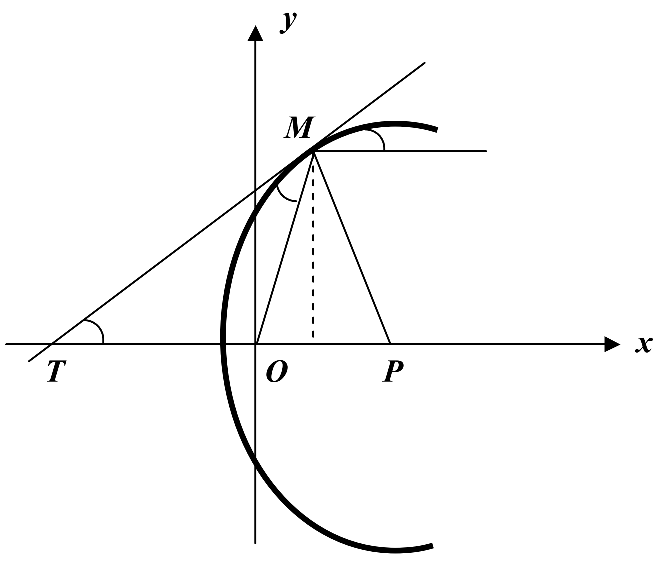


Рис. 7

Отрезок TO равен разности подкасательной $TP = \frac{y}{y'}$ и абсциссы $OP = x$ точки M: $TO = TP - OP$; отрезок $OM = x^2 + y^2$, откуда условие задачи выражается уравнением

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2},$$

или

$$ydx = \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy.$$

Полученное уравнение является однородным. Чтобы проинтегрировать его, сделаем подстановку: $x = ty$; $dx = tdy + ydt$, откуда получим:

$$y(tdy + ydt) = y(t + \sqrt{1 + t^2})dy,$$

$$ydt = \sqrt{1 + t^2}dy.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{dy}{y}; \quad \ln|y| = \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + \ln|C_1|; \qquad y = C \cdot \left(t + \sqrt{1+t^2}\right), \text{ где } C = \pm C_1.$$

Так как $t = \frac{x}{y}$, то $y = C \cdot \left(\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\right)$, $y^2 = C \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Избавившись от иррациональности, получим $y^2 = 2C \cdot \left(x + \frac{C}{2}\right)$ – семейство парабол.

Пример 4. Найти ортогональные траектории данного семейства парабол $x = ay^2$, где a — параметр.

Решение. Ортогональными траекториями данного семейства кривых называются такие кривые другого семейства, каждая их которых пересекает каждую из кривых первого семейства под прямым углом.

Пусть уравнение заданного семейства $F(x,y,a)=0$. Для отыскания ортогональной траектории необходимо:

а) составить дифференциальное уравнение заданного семейства $f(x, y, y') = 0$;

б) исходя из условия ортогональности $y'_1 \cdot y'_2 = -1$ заменить в этом дифференциальном уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$;

в) проинтегрировать полученное уравнение $f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$. Дифференцируя уравнение заданного семейства, имеем: $1 = 2ayy'$. В результате получим систему:

$$\begin{cases} 1 = 2ayy'; \\ x = ay^2. \end{cases}$$

Исключая параметр a ($a = \frac{x}{y^2}$) из уравнений этой системы, получим дифференциальное уравнение заданного семейства парабол:

$$1 = 2\frac{x}{y^2}yy'; \quad 1 = 2\frac{x}{y}y'; \quad \text{или } 2xy' = y.$$

Заменим y' на $-\frac{1}{y'}$ и получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий:

$$-2x\frac{1}{y'}=y \text{ или } ydy+2xdx=0.$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решив его, получим $\frac{y^2}{2}+x^2=C$ или $\frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{2C}=1$.

Таким образом, ортогональными траекториями заданного семейства парабол являются подобные друг другу эллипсы, у которых малая полуось равна $\sqrt{C}$, большая равна $\sqrt{2C}$.

1.4. Уравнения, сводящиеся к однородным

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{16}$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — постоянные, f — непрерывная функция.

Если $c=c_1=0$, то уравнение (16) является однородным и интегрируется, как указано в п. 1.3. Если хотя бы одно из чисел c или c_1 отлично от нуля, то рассмотрим два случая.

1. Определитель $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=ab_1-a_1b\neq 0$.

Введем новые переменные u и v по формулам:

$$\begin{cases} x=u+m; \\ y=v+n, \end{cases}$$

где числа m и n найдем из системы:

$$\begin{cases} am+bn+c=0; \\ a_1m+b_1n+c_1=0. \end{cases}$$

Так как $dx=du$, $dy=dv$, то уравнение (16) можно привести к однородному уравнению вида (15) относительно функции $v(u)$:

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{au+bv+am+bn+c}{a_1u+b_1v+a_1m+b_1n+c_1}\right)=f\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)=f\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{a_1+b_1\frac{v}{u}}\right)=f\left(\frac{v}{u}\right).$$

Полученное уравнение интегрируется, как указано в п. 1.3.

2. Определитель $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=ab_1-a_1b=0$. Тогда $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$,

и, следовательно, $a_1x+b_1y=\lambda\ (ax+by)$. Уравнение (16) примет вид:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right).$$

Подстановкой $u(x)=ax+by(x)$ это уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными и решить его, как указано в п. 1.2.

Пример. Решить дифференциальное уравнение:

$$(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0.$$

Решение. Данное уравнение можно привести к виду (16):

$$(2x+2y-1)\,dy=-(x+y+1)dx, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-(x+y+1)}{2x+2y-1}.$$

Так как $\Delta=0$ и $\lambda=-2$ (случай 2), то данное уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными. Решим его с помощью подстановки.

Пусть $u(x) = -x - y(x)$, тогда $du = -dx - dy$, уравнение примет вид

$$(1 - u)\, dx + (-2u - 1)(-dx - du) = 0.$$

Преобразуем его:

$$(1 - u)\, dx + (2u + 1)\, dx + (2u + 1)\, du = 0,$$

$$(2 + u)\, dx = -(2u + 1)\, du.$$

Таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные: $dx = -(2u + 1)/(2 + u)\, du$.

Проинтегрируем: $\int dx = -\int \frac{2u+1}{2+u} du$, откуда получим

$$x = -\int (2 - \frac{3}{u+2}) du; \qquad x = -2\int du + 3\int \frac{du}{u+2}.$$

После преобразований получим общее решение данного уравнения:

$$x + 2y + \ln\left|(2 - x - y)^3\right| + C = 0.$$

Задания для самостоятельного решения

Проинтегрировать уравнения:

1. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

2. $xy' \cdot \sin\frac{y}{x} + x = y \cdot \sin\frac{y}{x}$.

3. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

4. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.

5. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

6. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.

7. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

8. $3y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{x}\right) + 9$.

9. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

11. $y = x(y' - e^{y/x})$.

12. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$.

13. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$.

14. $y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}$.

15. $y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}$.

16. $(2x + y + 1)\, dx = (x + 2y - 1)\, dy$.

17. $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

18. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

19. $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$.

20. $y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}$.

21. $x\,dy - (y + \sqrt{x^2 - y^2})\, dx = 0, \quad y(1) = 0$.

22. $y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}$.

23. $(2y + x)\, y' = 1, \quad y(-1) = 0$.

24. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$.

1.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{17}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные непрерывные функции.

Если $q(x) = 0$, то уравнение (17) называется линейным *однородным*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными и решается, как указано в п. 1.1.

Если $q(x) \neq 0$, то уравнение (17) называется линейным *неоднородным*. Для нахождения его решения используют метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) или метод Бернулли (метод подстановки).

1.5.1. Метод Лагранжа

Метод Лагранжа предполагает, что сначала находят общее решение линейного однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \tag{18}$$

соответствующего данному неоднородному уравнению (17). Так как оно является уравнением с разделяющимися переменными, то, разделив переменные и проинтегрировав, получают

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|.$$

Потенцируя, находят общее решение уравнения (18):

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \tag{19}$$

где C — произвольная постоянная.

Далее находят общее решение линейного неоднородного уравнения (17) в виде (19), где C считают не постоянной, а новой неизвестной функцией от x, т.е. в виде

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \tag{20}$$

Для нахождения функции $C(x)$ подставляют (20) в исходное уравнение (17):

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}.$$

Интегрируют, получают:

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Подставляя найденное выражение для $C(x)$ в (19), получают общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка, где $p(x) = 2x$, $q(x) = x \cdot e^{-x^2}$. Решим его методом вариации произвольной постоянной.

1) Сначала решим соответствующее однородное уравнение

$$y' + 2xy = 0.$$

Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -2x\,dx$ и интегрируя, находим

$$\ln|y| = -x^2 + C_1, \quad y = \pm C_1 \cdot e^{-x^2} \text{ или } y = Ce^{-x^2}, \text{ где } C = \pm C_1.$$

2) Найдем общее решение данного неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{-x^2}$.

Дифференцируя, имеем

$$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}.$$

Подставляя в данное уравнение выражения для y и y', получим:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}.$$

Отсюда

$$\frac{dC(x)}{dx} = x, \text{ или } C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, общее решение данного неоднородного уравнения: $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}$.

1.5.2. Метод Бернулли

Метод Бернулли предполагает, что общее решение линейного неоднородного уравнения (17) ищут в виде

$$y = u(x) \cdot v(x), \tag{21}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — неизвестные функции от x, одна из которых может быть выбрана произвольно. Найдем эти функции.

Дифференцируем (21):

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Подставим в уравнение (17) выражения для y и y', получим:

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + p(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = q(x);$$

$$v(x) \cdot (u'(x) + p(x) \cdot u(x)) + (u(x) \cdot v'(x) - q(x)) = 0.$$

Так как одна из неизвестных функций, например $u(x)$, может быть выбрана произвольно, то пусть $u(x)$ — любое частное решение уравнения $u'(x) + p(x) \cdot u(x) = 0$. Пусть, например,

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Тогда имеем уравнение $e^{-\int p(x)dx} \cdot v'(x) - q(x) = 0$. Решая его, получаем вторую функцию

$$v(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C = v(x, C).$$

Возвращаясь к переменной y, находим общее решение линейного неоднородного уравнения (17):

$$y = u(x) \cdot v(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C\right). \tag{22}$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $xy' - 2y = 2x^4$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Разделив его на x, получим

$$p(x) = -2/x, \qquad q(x) = 2x^3.$$

Решим уравнение методом Бернулли.

Пусть $y = u \cdot v$. Дифференцируем это выражение: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставим в данное уравнение выражения для y и y':

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{2}{x} uv = 2x^3 .$$

Сгруппируем члены, содержащие u в первой степени, получим $v \cdot (u' - \frac{2}{x} u) + u \cdot v' = 2x^3$.

Полагаем $u' - \frac{2}{x} u = 0$, откуда $\frac{du}{u} = \frac{2}{x} dx$. Интегрируя, находим $\ln|u| = 2\ln|x|$ или $u = x^2$ (постоянную интегрирования не вводим, так как достаточно найти какое-либо частное решение этого вспомогательного уравнения).

Для нахождения v имеем уравнение $x^2 \cdot v' = 2x^3$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим его на x^2: $v' = 2x$. Проинтегрируем, получим $v = x^2 + C$.

Таким образом, общее решение данного уравнения

$$y = u\, v = x^2 \cdot (x^2 + C).$$

Пример 3. *Задача о переменном синусоидальном токе.*

Пусть дана электрическая лампа, в которую включен источник периодического переменного тока. Найти закон изменения тока в зависимости от времени, если напряжение v изменяется по синусоидальному закону.

Решение. Примем за начальный момент времени t_0, при котором $v_0 = 0$. Тогда можно положить $v = v_0 \sin \omega \cdot t$, где ω — частота.

Уравнение изменения силы тока в электрической цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L примет вид

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{v_0}{L} \sin \omega \cdot t.$$

Это линейное уравнение. Решаем его по общей формуле

$$I = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(C + \int \frac{v_0}{L} \sin \omega \cdot t \cdot e^{\int \frac{R}{L} dt} dt \right) = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(C + \frac{v_0}{L} \int \sin \omega \cdot t \cdot e^{\int \frac{R}{L} dt} dt \right) =$$

$$= e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(C + \frac{v_0 \cdot \frac{R}{L} \sin \omega \cdot t - \omega \cos \omega \cdot t}{\left(\frac{R}{L} \right)^2 + \omega^2} e^{\frac{R}{L} t} \right).$$

Здесь при нахождении интеграла $\int \sin \omega \cdot t \cdot e^{\frac{R}{L} t} dt$ мы воспользовались формулой

$$\int e^{a\,x} \sin bx\, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{a\,x}.$$

Пример 4. *Переходной процесс в электрической цепи.*

В цепи с индуктивностью происходит переходный процесс. Индуктивность L и активное сопротивление R постоянны. Напряжение U задано как функция от времени t: $U = f(t)$. Начальный ток равен i_0. Найти зависимость тока i от времени t. В частности, рассмотреть случай, когда $U = U_0 = \text{const}$.

Решение. Так как ток i в цепи изменяется со временем, то вследствие наличия индуктивности L возникает ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L\frac{di}{dt}.$$

По закону Кирхгофа падение напряжения в цепи R_i равно сумме ЭДС. Таким образом,

$$U - L\frac{di}{dt} = R,$$

или

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U$$

– линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

По условию $U = f(t)$, тогда получаем

$$L\frac{di}{dt} + Ri = f(t),$$

или

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{f(t)}{L}.$$

Частным решением дифференциального уравнения, соответствующим начальному условию при $t = 0$, $i = i_0$, является функция

$$i = e^{-\int\frac{R}{L}dt}\left(i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t f(t)e^{\frac{R}{L}t}dt\right).$$

При $f(t) = U_0 = \text{const}$ получим:

$$i = e^{-\int\frac{R}{L}dt}\left(i_0 + \frac{U_0}{L}\int_0^t f(t)e^{\frac{R}{L}t}dt\right),$$

или

$$i = \frac{U_0}{L} + \left(i_0 - \frac{U_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

При возрастании t множитель $e^{-\int\frac{R}{L}dt}$ убывает, и через некоторое время процесс можно считать установившимся.

Ток будет определяться по закону Ома: $i = \dfrac{U_0}{R}$.

Если $i_0 = 0$, то получим формулу для тока при замыкании цепи:

$$i = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Из этой формулы видно, что ток i после включения батареи растет до значения $\dfrac{U_0}{R}$, так как ток $\dfrac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$, называемый экстратоком замыкания, очень быстро убывает.

Если $U_0 = 0$, то получим формулу затухающего тока при размыкании цепи $i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$. Этот ток называется экстратоком размыкания, с ростом t он стремится к нулю.

Постоянная величина $\dfrac{L}{R}$ называется постоянной времени цепи.

Пример 5. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(a,a)$ и обладающей следующим свойством: если в любой точке $M(x,y)$ с ординатой *PM* провести касательную до пересечения с осью *Oy* в точке *T*, то площадь трапеции *OTMP* есть величина постоянная, равная a^2 (рис. 8).

Решение. Площадь трапеции найдем по формуле

$$S=\frac{OT+PM}{2}OP. \qquad (23)$$

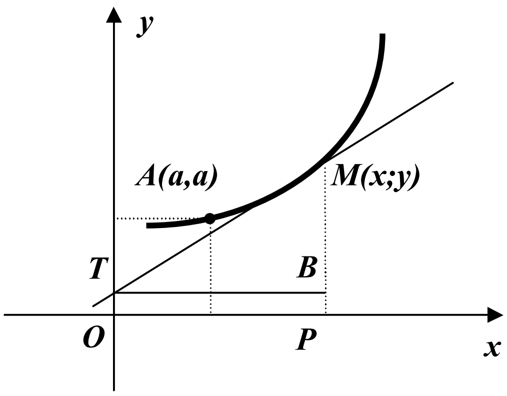


Рис. 8

Имеем: $OP = x$; $MP = y$; $OT = PB = MP - MB = y - y'x$.

Тогда зависимость (23) будет $(2y - xy')x = 2a^2$, откуда получаем

$$y'-\frac{2}{x}y=-\frac{2a^2}{x^2}$$

– неоднородное линейное дифференциальное уравнение.

Общее решение находим по формуле

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right),$$

учитывая, что $p(x)=-\dfrac{2}{x}$; $q(x)=-\dfrac{2a^2}{x^2}$.

Тогда

$$y=e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}\left(\int\left(-\frac{2a^2}{x^2}\right)e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}dx+C\right),$$

или

$$y=e^{2\ln|x|}\left(-2a^2\int\frac{e^{-2\ln|x|}}{x^2}dx+C\right).$$

Откуда

$$y=x^2\left(-2a^2\int\frac{dx}{x^4}+C\right)=x^2\left(\frac{2a^2}{3x^3}+C\right).$$

После преобразований окончательно получим

$$y=\frac{2a^2}{3x}+Cx^2.$$

По начальным условиям при $x = a$ и $y = a$ найдем

$$C=\frac{1}{2a}.$$

Уравнение искомой кривой имеет вид $y=\frac{2a^2}{3x}+\frac{x^2}{3a}$.

Задания для самостоятельного решения

Найти общий интеграл уравнений (1—14):

1. $y'-\frac{y}{\sin x}=\cos^2 x\cdot tg\frac{x}{2}$.

2. $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x$.

3. $y'+\frac{2y}{x}=1-x.$

4. $y'=e^x-e^x\cdot y.$

5. $y'=\frac{y+1}{x}$.

6. $y'-2y=e^x$.

7. $(x^2+1)y'+2xy=3$.

8. $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$.

9. $y'-\frac{2}{x}y=e^x x^2(x-2)$.

10. $y'=y\cdot tg\,x+\cos x$.

11. $y'+y=e^x\sin x$.

12. $xy'+y=x+1$.

13. $xy'+y=\sin x$.

14. $xy'+(x+1)y=3xe^{-x}$.

Решить задачу Коши (15—23):

15. $x^2+xy'=y, \quad y(1)=0.$

16. $y'-y\cdot tgx=\frac{1}{\cos^3 x}, \quad y(0)=0.$

17. $y'+y\cos x=\cos x, \quad y(0)=1.$

18. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, зная, что середина ее нормали от любой точки кривой до оси OX, находится на параболе $y=ax^2$.

19. Конденсатор, емкость которого равна Q, включается в цепь с напряжением E и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

20. Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

21. Найти уравнение кривой, обладающей тем свойством, что отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси Oy, равен квадрату абсциссы точки касания.

22. Показать, что линейное уравнение остается линейным при любой замене независимой переменной $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция.

23. Показать, что линейное уравнение остается линейным при любом линейном преобразовании искомой функции $y=\alpha(x)\cdot z+\beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — дифференцируемые функции, причем $\alpha(x)\neq 0$ в рассматриваемом интервале.

1.6. Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^m, \tag{24}$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$, $p(x)$ и $q(x)$ — заданные непрерывные функции, называется *уравнением Бернулли*.

Заметим, что при $m = 0$ уравнение (24) является линейным и решается, как указано в п. 1.4. При $m = 1$ (24) — уравнение с разделяющимися переменными и решается, как указано в п. 1.1.

Уравнение Бернулли (24) обычно решают с помощью подстановки $z = y^{1-m}$ (тем самым сводя его к линейному) или $y = u \cdot v$ (т.е. методом Бернулли).

Пример. Найти общее решение уравнения $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли, где $p(x) = 1/(x - 1) = q(x)$, $m = 2$. Решим это уравнение разными способами.

1-й способ. Решим уравнение методом Бернулли. Пусть $y = u \cdot v$.

Дифференцируем это выражение:

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Подставим в данное уравнение выражения для y и y':

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x-1} = \frac{(uv)^2}{x-1}.$$

Сгруппируем члены, содержащие u в первой степени, получим

$$v \cdot (u' - \frac{u}{x-1}) + u \cdot v' = \frac{(u \cdot v)^2}{x-1}.$$

Полагаем $u' - \dfrac{u}{x-1} = 0$, откуда $\dfrac{du}{u} = \dfrac{dx}{x-1}$.

Интегрируя, находим $\ln|u| = \ln|x-1|$, или $u = x - 1$ (постоянную интегрирования не вводим, так как достаточно найти какое-либо частное решение этого уравнения).

Для нахождения v имеем уравнение $(x-1) \cdot v' = \dfrac{(x-1)^2 \cdot v^2}{x-1}$, откуда $v' = v^2$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные и проинтегрировав, получим $v = -\dfrac{1}{(x+C)}$.

Таким образом, общее решение данного уравнения

$$y = uv = \frac{1-x}{x+C}.$$

2-й способ. Решим уравнение с помощью подстановки $z = y^{1-m}$. Так как $m = 2$, то $z = y^{-1}$, $y = z^{-1}$, $y' = -z^{-2} \cdot z'$, подставляя в исходное уравнение выражения для y и dy, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$-\frac{z^{-2}dz}{dx} - \frac{z^{-1}}{x-1} = \frac{z^{-2}}{x-1}.$$

Разделим переменные:

$$-z^{-2}dz = \frac{1}{x-1}(z^{-1} + z^{-2})dx, \quad \frac{-z^{-2}}{z^{-1} + z^{-2}}dz = \frac{dx}{x-1},$$

$$\frac{dz}{z+1} = -\frac{dx}{x-1}.$$

Проинтегрируем, получим $-\ln|z+1| = \ln(|C_1| \cdot |x-1|)$, откуда

$$z+1=\frac{\pm C_1}{x-1}.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общее решение данного уравнения $\frac{1}{y}+1=\frac{\pm C_1}{x-1}$, или после преобразований $y=\frac{1-x}{x+C}$, где $C=\mp C_1-1$.

Задания для самостоятельного решения

Проинтегрировать уравнения (1—30):

1. $y'+2xy=2x^3y^3$.

2. $xy'+y=y^2\ln x$.

3. $y'-y\cdot tgx+y^2\cos x=0$.

4. $(x^2+1)y'+4xy=3$.

5. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2y}{\cos^2 x}$.

6. $y'-y+y^2\cos x=0$.

7. $y'-7y=e^{3x}y^2$.

8. $y'+y=xy^{\frac{1}{2}}$.

9. $y'+y=2x\sqrt{y}.$

10. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$.

11. $\cos y dx=(x+2\cos y)\sin y dy$.

12. $\frac{dy}{dx}-\frac{3y}{x}=-x^2y^2$.

13. $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}$.

14. $y'+\frac{y}{x}=2\frac{\ln x}{x}y^2$.

15. $y'+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$.

16. $xy'+2y=(x+3)xy^2$.

17. $y'+\frac{y}{x}=y^2x$.

18. $y'-\frac{y}{2-x}=y^2\cdot\frac{1}{2-x}$.

19. $y'+\frac{3x^2y}{x^3+1}=y^2(x^3+1)$.

20. $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$.

21. $4xy'+3y=-e^x x^2 y$.

22. $y'+\frac{2y}{x}=2\sqrt{y}$.

23. $ydx+(x+x^2y^2)dy=0.$

24. $y'-2y\cdot tgx+y^2\sin^2 x=0.$

25. $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x.$

26. $xy'+y=2y^2\ln x$.

27. $2(xy'+y)=xy^2$.

28. $y'+4x^2y=4(x^2+1)e^{-4x}y^2$.

29. $xy'-y=-y^2(\ln x+2)$.

30. $y'+2xy=2x^3y^3$.

Найти решение задачи Коши (31—36):

31. $y'+4yx^3=4y^2e^{4x}(1-x^3),\quad y(0)=1.$

32. $3y'+2xy=2x^2y^{-2}e^{-2\cdot x^2},\ y(0)=-1.$

33. $2xy'-3y=-(20x^2+12)y^3,\quad y(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

34. $y'-y\cdot tgx=-\frac{2}{3}y^4\sin x,\quad y(0)=1.$

35. $2y'+3y\cdot\cos x=\frac{(8+12\cos x)e^{2x}}{y},\quad y(0)=2.$

36. $y'-\frac{2}{x}y=x^4,\quad y(1)=\frac{4}{3}.$

1.7. Уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{25}$$

Из определения следует, что левая часть такого уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, а само уравнение имеет вид

$$d\,F(x, y) = 0.$$

Интегрируя его, видим, что решением уравнения в полных дифференциалах является функция $F(x, y) = C$.

Таким образом, решить уравнение в полных дифференциалах – значит найти функцию $F(x, y)$, дифференциал которой

$$d\,F(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy. \tag{26}$$

Найдем функцию $F(x, y)$. Пусть для уравнения (7) выполняется условие (25), следовательно, и условие (26). Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y). \tag{27}$$

Интегрируем любое из уравнений (27), например, первое (по x):

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = \int M(x, y)\,dx, \text{ откуда } \quad F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + C(y).$$

Дифференцируем получившееся уравнение по y и приравняем его к правой части второго уравнения (27):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,dx\right) + C'(y) = N(x, y).$$

Отсюда

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,dx\right).$$

Интегрируя это уравнение по y, найдем $C(y)$, а затем и общее решение уравнения в полных дифференциалах:

$$F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + C(y),$$

где $C(y)$ — уже известная функция.

Пусть для уравнения (7) условие (27) не выполняется. В некоторых случаях такое уравнение можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением на так называемый *интегрирующий множитель*. В общем случае он является функцией от x и y: $\mu(x, y)$.

Если у данного уравнения существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, то его находим по формуле

$$\mu = e^{\int \frac{M'_y - N'_x}{N} dx},$$

где выражение $\frac{M'_y - N'_x}{N}$ должно являться функцией только от x.

Аналогично множитель, зависящий только от y, находится по формуле

$$\mu = e^{-\int \frac{M'_y - N'_x}{M} dy},$$

где выражение $\frac{M'_y - N'_x}{M}$ должно являться функцией только от y.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.к.

$$M(x, y) = y + e^x \sin y, \quad N(x, y) = x + e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + e^x \cos y.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = y + e^x \sin y.$$

Интегрируем его по x:

$$F(x, y) = \int (y + e^x \sin y)dx + C(y) = yx + \sin y e^x + C(y).$$

Дифференцируем получившееся уравнение по y и приравняем его к функции $N(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + e^x \cos y + C'(y) = N(x, y);$$

$$x + e^x \cos y + C'(y) = x + e^x \cos y.$$

Отсюда $C'(y) = 0$, $C(y) = C_1$. Общее решение уравнения в полных дифференциалах:

$$F(x, y) = yx + e^x \sin y + C_1 = C_2,$$

или

$$yx + \sin y \cdot e^x = C,$$

где $C = C_2 - C_1$.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0.$$

Решение. Приведем уравнение к виду (7):

$$(y + \ln x)\,dx - x\,dy = 0.$$

Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, т.к.

$$M(x, y) = y + \ln x, \quad N(x, y) = -x,$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$. Видим, что условие (27) нарушено.

Найдем интегрирующий множитель, для этого проверим, от каких переменных зависят выражения $\frac{M'_y - N'_x}{N}$ и $\frac{M'_y - N'_x}{M}$.

Выражение $\frac{M'_y - N'_x}{N} = -\frac{2}{x}$ зависит только от x, следовательно, интегрирующий множитель также зависит только от x: $\mu(x)$.

Найдем $\mu(x)$. Для этого решим уравнение

$$\frac{d(\ln \mu)}{dx} = \frac{M'_y - N'_x}{N} = -\frac{2}{x},$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные, проинтегрируем: $\int d(\ln \mu) = -\int \frac{2}{x}dx$, получим $\ln \mu = \ln \frac{C}{x^2}$,

откуда интегрирующий множитель $\mu(x) = \frac{C}{x^2}$, где C – произвольная постоянная.

Пусть $C = 1$. Умножим данное уравнение на интегрирующий множитель $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$:

$$\frac{y+\ln x}{x^2}dx-\frac{x}{x^2}dy=0\,,\quad \frac{y+\ln x}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy=0\,.$$

Получили уравнение в полных дифференциалах, т.к.

$$M(x,\,y)=\frac{y+\ln x}{x^2}\,,\quad N(x,\,y)=-\frac{1}{x},\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x^2}.$$

Рассмотрим уравнение $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)\;=\frac{y+\ln x}{x^2}$. Интегрируя его по x:

$$F(x,\,y)=\int\frac{y+\ln x}{x^2}dx+C(y)\,,$$

получим

$$F(x,\,y)=-\frac{y}{x}+\frac{\ln x-1}{x}+2x(\ln x-1)+C(y)\,.$$

Дифференцируем получившееся уравнение по y и приравняем его к функции $N(x,\,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\;-\frac{1}{x}+C'(y)\;=N(x,\,y),\quad -\frac{1}{x}+C'(y)\;=-\frac{1}{x}.$$

Отсюда $C'(y)=0$, $C(y)=C_1$. Общее решение данного уравнения:

$$F(x,\,y)=-\frac{y}{x}+\frac{\ln x-1}{x}+2x(\ln x-1)+C_1=C_2\,.$$

Его можно записать в виде

$$-\frac{y}{x}+\frac{\ln x-1}{x}+2x(\ln x-1)=\mathrm{C}\,,$$

где $C=C_2-C_1$, или, умножив на x и приведя к явному виду:

$$y=Cx+\ln x-1+2x^2\,(\ln x-1).$$

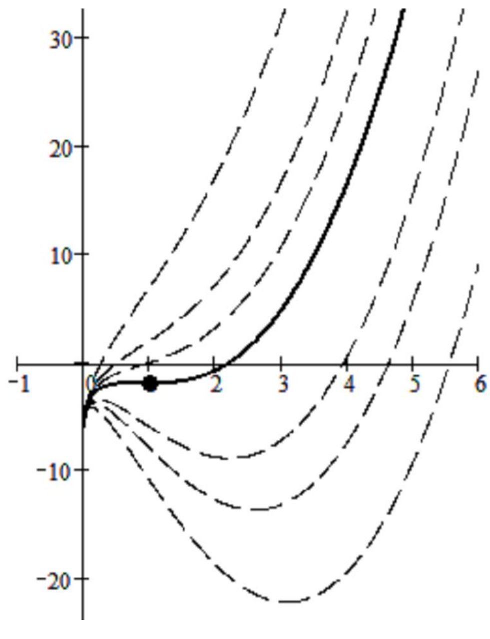


Рис. 9

На рис. 9 представлены интегральные кривые при $C=-8;\,-5;\,-3;\,1;\,3;\,5;\,10$. Жирной линией выделена кривая, удовлетворяющая начальному условию $y\,(1)=-2$ (для нее $C=1$).

Пример 3. Проинтегрировать уравнение, интегрирующий множитель которых имеет вид $\mu(x)$ или $\mu(y)$:

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$$

Решение.

$$M(x, y) = (x^2 + y^2 + 2x),\ N(x, y) = 2y.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, т.к. условие (27) нарушено. Найдем μ. Для этого проверим, от каких переменных зависят $\frac{M'_y - N'_x}{N}$ и $\frac{M'_y - N'_x}{M}$.

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{2y}{2y} = 1.$$

Выражение $\frac{M'_y - N'_x}{N}$ = 1. Будем считать, что оно зависит от x. Найдем $\mu(x)$. Так как $\mu(x) = e^{\int \frac{M'_y - N'_x}{N} dx}$, то $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$. После умножения на e^x уравнение примет вид

$$(x^2 + y^2 + 2x)e^x dx + 2ye^x dy = 0.$$

Получили уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^x.$$

Решим уравнение: $\frac{\partial F}{\partial x} = (x^2 + y^2 + 2x)e^x$.

Проинтегрируем по x:

$$F(x, y) = \int (x^2 + y^2 + 2x)e^x dx + C(y) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + y^2e^x + C(y).$$

При интегрировании по переменной x применили формулу интегрирования по частям. Дифференцируем полученное уравнение по y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x + C'(y);$$

приравняем $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$: $2ye^x + C'(y) = 2ye^x$.

Откуда $C'(y) = 0$ или $C(y) = C$. Общее решение уравнения:

$$F(x, y) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + y^2e^x + C,$$

или

$$x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + y^2e^x = C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Проинтегрировать уравнения (1—15):

1. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$.

2. $(2x + e^{\frac{x}{y}})dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0$.

3. $x + ye^x + (y + e^x)y' + e^x = 0$.

4. $2x\cos^2 ydx + 2(y^{\frac{1}{3}} - \frac{x^2}{2}\sin 2y)dy = 0.$

5. $e^{-y}dx + (2y\text{-}xe^{-y})dy = 0$.

6. $xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

7. $\left(2x\ln y + \dfrac{y}{\cos^2 x}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + tgx + e^y\right)dy = 0.$

8. $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$.

9. $\sin(x+y)dx + x\cos(x+y)(dx+dy) = 0$.

10. $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3 ydy = 0$.

11. $(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy$.

12. $(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0$.

13. $xy^2dx + (x^2y + y)dy = 0.$

14. $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$.

15. $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2+y^2})ydy = 0$.

Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения (16—22):

16. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$.

17. $y(1 + xy)dx - xdy = 0.$

18. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$

19. $2xydy + (x^2 - 3y^2)dx = 0$;

20. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$

21 $(x^2 + y)dx - xdy = 0.$

1.8. Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнением Лагранжа называется дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно x и y, коэффициентами которого служат функции от y':

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$$

Уравнение Лагранжа интегрируем следующим образом. Разрешим его относительно y и примем за параметр y' полагая $y' = p$:

$$y = xf(p) + \varphi(p).$$

Здесь введены обозначения:

$$f(y') = -P(y')/Q(y'),\ \ \varphi(y') = -R(y')/Q(y').$$

Дифференцируя полученное уравнение и заменяя в левой части dy на pdx, приходим к уравнению

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp.$$

Полученное уравнение — линейное относительно x (как функции от p) и поэтому может быть проинтегрировано.

Если его решение есть $x = F(p, C)$, то *общее решение* исходного уравнения Лагранжа запишется в виде

$$\begin{cases} x = F(p,C); \\ y = xf(p) + \varphi(p) = F(p,C)\cdot f(p) + \varphi(p) \end{cases}.$$

Уравнением Клеро называется уравнение первой степени (т.е. линейное) относительно функции и аргумента вида

$$y = xy' + \varphi(y'),$$

которое является частным случаем уравнения Лагранжа. С учетом замены $y' = p$, уравнение принимает вид $y = xp + \varphi(p)$.

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx};\ \ p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx};\ \ (x + \varphi'(p))\cdot\frac{dp}{dx} = 0.$$

Последнее уравнение имеет два возможных решения: $\dfrac{dp}{dx} = 0$ или $(x + \varphi'(p)) = 0.$

В первом случае $p = C,\ y = Cx + \varphi(C), C - const.$ Видно, что *общее решение* представляет собой семейство прямых линий.

Во втором случае $\left(x+\varphi'(p)=0\right)$ решение в параметрической форме выражается системой уравнений: $\begin{cases} x+\varphi'(p)=0, \\ y=xp+\varphi(p). \end{cases}$ Исключив параметр p, получаем второе уравнение $F(x,y)=0$. Это решение не содержит произвольной постоянной и не получено из общего решения, следовательно, не является частным решением. Это решение будет *являться особым интегралом.*

Иными словами, *общим решением уравнения Клеро служит семейство касательных к особому решению.*

Уравнение Лагранжа также может иметь особые решения, причем особыми решениями этого уравнения (если они существуют) являются общие касательные ко всем интегральным кривым, определяемым общим решением.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y=xy'-e^{y'}$.

Решение. Это уравнение Клеро. Пусть $y'=p$, тогда $y=px-e^{p}$. Продифференцируем его: $dy=pdx+xdp-e^{p}dp$; но $dy=pdx$, поэтому $xdp-e^{p}dp=0$, или $(x-e^{p})dp=0$.

Таким образом, либо $dp=0$, либо $x=e^{p}$. Если положить $dp=0$, то $p=C$. Подставляя это значение p в равенство $y=px-e^{p}$, получаем общее решение данного уравнения: $y=Cx-e^{C}$.

Если положить $x=e^{p}$, то $y=pe^{p}-e^{p}=e^{p}(p-1)$. Получим *особое решение* данного уравнения:

$$\begin{cases} x=e^{p}; \\ y=(p-1)e^{p}. \end{cases}$$

Или, исключая параметр p ($p=\ln x$), находим особое *решение* в явном виде: $y=x(\ln x-1)$.

Пример 2. Решить уравнение $y=xy'^{2}+y'^{2}$.

Решение. Это уравнение Лагранжа. Положим $y'=p$, тогда $y=xp^2+p^2=p^2(x+1)$. Продифференцируем последнее равенство:

$$dy=p^2dx+2pxdp+2pdp.$$

Заменяя $dy=pdx$, получим уравнение

$$pdx=p^2dx+2pxdp+2pdp.$$

Сокращая на p, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$(1-p)dx=2(x+1)dp,$$

или

$$\frac{dx}{x+1}=\frac{2dp}{1-p}.$$

Интегрируя, получим $\ln|x+1|=-2\ln|1-p|+\ln|C_1|,\; x+1=\pm C_1/(1-p)^2$.

$$y=\pm\frac{C_1p^2}{(1-p)^2}.$$

Сокращение на p могло привести к потере особого решения. Полагая $p=0$, находим $y=C$. Это особое решение.

Итак,

$$\begin{cases} x+1=\dfrac{\pm C_1}{(p-1)^2}; \\ y=\dfrac{\pm C_1 p^2}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

- общее решение;

$y = C$ – особое решение.

В общем решении параметр p можно исключить и тогда оно приводится к виду

$$\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^2=|C_1|.$$

Задания для самостоятельного решения

Проинтегрировать уравнения:

1. $y=xy'-e^{y'}$.

2. $x=\dfrac{y}{y'}+\dfrac{1}{y'^2}$.

3. $y=xy'-3y'^3$.

4. $y=xy'+y'-y'^2$.

5. $y=xy'+\dfrac{1}{y'}$.

6. $y=xy'^2+y'^2$.

7. $y=x\left(\dfrac{1}{x}+y'\right)+y'$.

8. $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$.

9. $y=xy'-\ln y'$.

10. $y-xy'=\dfrac{1}{2y'^2}$.

11. $y'^3=3(xy'-y)$.

12. $y=xy'+y'^2$.

13. $y=xy'-y'-y'^2$.

14. $y=xy'+\sin y'$

15. $xy'-y=\ln y'$.

16. $y=y'^2(x+1)$.

17. $y=yy'^2+2xy'$.

18. $y=xy'-y'^4$.

19. $y=x(1+y')+y'^2$

20. $y'=\ln(xy'-y)$.

21. $y=xy'+y'+\sqrt{y'}$.

22. $y=xy'-3y'^2$.

23. $x=y\left(\dfrac{1}{\sqrt{y'}}-\dfrac{1}{y'}\right)$.

24. $y'^2-yy'+e^x=0$.

25. $y'=xy'+y$

26. $y'(y'-2x)=2(y-x^2)$.

27. $y=y'(x+1)+y'^2$.

28. $y=xy'-\dfrac{1}{2}y'$.

29. $2yy'=x(y'^2+4)$.

30. $y'=2xy'+y'^2$.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0$$

или, если оно разрешено относительно старшей производной,

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'',\ y''',\ \dots,\ y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Решением дифференциального уравнения (1), как и уравнения первого порядка, называется дифференцируемая функция $y = y\ (x)$, которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество.

Решения дифференциальных уравнений высших порядков могут быть общими, частными или особыми.

Общее решение уравнения (1) зависит от переменной x и n произвольных постоянных, т.е. имеет вид:

$$y = y\ (x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Решение, которое получается из общего решения при некоторых фиксированных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется *частным решением* уравнения (1).

Для того, чтобы получить частное решение из общего, обычно задают начальные условия:

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_0',\quad y''(x_0) = y_0'',\ \dots,\quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

При этом отыскание частного решения уравнения (1), удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется решением *задачи Коши* для этого уравнения.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) аналогична соответствующей теореме, рассмотренной ранее (п. 1.1) для случая $n = 1$.

Особым решением уравнения (1) называется такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется.

Из всего многообразия дифференциальных уравнений высших порядков в данном разделе рассмотрим только основные простейшие виды, а именно — уравнения, допускающие понижения порядка, и подробнее остановимся на линейных уравнениях второго порядка.

2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим простейшие виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

2.1.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение дифференциального уравнения такого вида получают n-кратным интегрированием самого уравнения:

$$y^{(n)} = f(x);$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \big(f_1(x) + C_1\big)dx + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n,$$

где $f_n(x) = \underbrace{\iint\dots\int}_{n} f(x)dx^n$.

Так как $\frac{C_1}{(n-1)!}, \frac{C_2}{(n-2)!}, \ldots$ являются постоянными величинами, то общее решение можно записать в виде

$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n .$$

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y^{IV} = \cos^2 x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1/32$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1/8$, $y'''(0) = 0$.

Решение. 1) Найдём общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y''' = \int y^{IV} dx = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C_1 ;$$

$$y'' = \int y''' dx = \frac{1}{2}\int (x + \frac{1}{2}\sin 2x + 2C_1) dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\cos 2x + 2C_1 x) + C_2 ;$$

$$y' = \int y'' dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\cos 2x + 2C_1 x + 2C_2\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + 2C_2 x\right) + C_3 ;$$

$$y = \int y' dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{24} + \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{C_1}{3}x^3 + C_2 x^2\right) + C_3 x + C_4 .$$

2) Для нахождения частного решения необходимо определить константы C_1, C_2, C_3, C_4. Подставим начальные условия в полученные нами уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} + C_4 = \frac{1}{32}; \\ C_3 = 0; \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + C_2 = \frac{1}{8}; \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

Видим, что $C_1 = 0$, $C_2 = 1/4$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2}(\frac{x^4}{24} + \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{4}x^2) = \frac{1}{8}(\frac{x^4}{6} + \frac{1}{4}\cos 2x + x^2) .$$

2.1.2. Уравнения, не содержащие искомой функции и производных этой функции до порядка $k - 1$ включительно

Уравнения, не содержащие искомой функции и производных до порядка $k - 1$ включительно, можно записать в виде

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 . \qquad (2)$$

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц заменой $y^{(k)} = z(x)$, т.е. взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных. Тогда уравнение (2) примет вид

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0 .$$

Из последнего уравнения можно определить функцию

$$z = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

а затем найти y из уравнения $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, .., C_{n-k})$ k-кратным интегрированием.

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1) ,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим искомой функции.

1. Найдём общее решение данного уравнения. Полагая $y' = z$, преобразуем уравнение к виду

$$z' - \frac{z}{x-1} = x(x-1). \tag{3}$$

Это неоднородное линейное уравнение первого порядка. Решим его методом Лагранжа.

Сначала найдём общее решение соответствующего однородного линейного уравнения первого порядка:

$$z' - \frac{z}{x-1} = 0.$$

Для этого разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x-1} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \ln|z| = \ln|x-1| + \ln|C_0|$$

$\Rightarrow z = C \cdot (x-1)$, где $C = \pm C_0$.

Затем найдём общее решение неоднородного линейного уравнения (3). Пусть

$$z = (x-1) \cdot C(x). \tag{4}$$

Дифференцируя это равенство, получим $z' = C(x) + (x-1) \cdot C'(x)$. Подстановка z и z' в уравнение (3) даёт

$$C(x) + (x-1) \cdot C'(x) - \frac{C(x) \cdot (x-1)}{x-1} = x(x-1) \quad \Rightarrow (x-1) \cdot C'(x) = x(x-1) \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Подставим последнее равенство в (4), получим общее решение неоднородного линейного уравнения (3):

$$z = (x-1) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right).$$

Так как $y' = z$, получим

$$y' = (x-1) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + C_1 x - C_1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} - C_1 x + C_2.$$

2. Для нахождения частного решения необходимо определить константы C_1, C_2. Подставим начальные условия $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$ в полученные нами уравнения:

$$\begin{cases} 1 = \frac{2^4}{8} - \frac{2^3}{6} + \frac{C_1 2^2}{2} - 2C_1 + C_2; \\ -1 = 4 + 2C_1 - 2 - C_1. \end{cases}$$

Решив систему, получим $C_1 = -3$; $C_2 = 1/3$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3}.$$

2.1.3. Уравнения, не содержащие независимой переменной

Дифференциальные уравнения*,* не содержащие независимой переменной x, можно записать в виде

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 . \qquad (5)$$

Порядок такого уравнения можно понизить на единицу заменой $y' = z$. При этом z рассматривается как новая неизвестная функция от y: $z = z(y)$. Все производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ выражаются через производные от новой неизвестной функции $z(y)$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = z(y) = z\,;$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}\,;$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dy}\right) = z^2\frac{d^2z}{dy^2} + z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \text{ и т.д.}$$

Подставив эти выражения вместо $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (5), получим дифференциальное уравнение $(n - 1)$-го порядка.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y' \cdot y''' - 2(y'')^2 = 0$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением третьего порядка*,* не содержащим независимой переменной x.

Пусть $y' = z \;\Rightarrow\; y'' = z \cdot z' \;\Rightarrow\; y''' = z^2 z'' + z(z')^2$. Подставив эти выражения вместо y', y'', y''' в исходное уравнение, получим уравнение второго порядка*,* не содержащее независимой переменной y:

$$z \cdot \left(z^2 z'' + z(z')^2\right) - 2z^2 \cdot (z')^2 = 0 \;\Rightarrow\; z \cdot z'' + (z')^2 - 2(z')^2 = 0 \;\Rightarrow\; z \cdot z'' - (z')^2 = 0 .$$

Ещё раз понизим на единицу порядок уравнения. Для этого введём замену $z' = p \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; z'' = p \cdot p'$. Получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$z \cdot p \cdot p' - p^2 = 0 .$$

Отсюда $p = 0$ или $z \cdot p' = p$. Интегрируем второе уравнение $z \cdot \frac{dp}{dz} = p$: $\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dz}{z} \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; \ln|p| = \ln|z| + C \;\Rightarrow\; p = z\,C_1$.

Так как $p = z'$, то получим опять дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $z' = z\,C_1$. Разделив переменные и проинтегрировав, получим $z = C_2 e^{C_1 y}$.

Вводим ещё раз обратную подстановку $z = y'$. Получим снова дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = C_2 e^{C_1 y} .$$

Интегрируя его, найдём общее решение исходного уравнения:

$$e^{C_1 y} = C_2 x + C_3 .$$

Случай $p = 0$ даёт $z' = 0$, откуда $z = C \Rightarrow y' = C \Rightarrow y = Cx + C_4$ — частное решение, которое можно получить из общего при соответствующих значениях коэффициентов C_1, C_2, C_3.

Пример 4. Найти плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален длине нормали.

Решение. Пусть $y = y(x)$ — уравнение искомой кривой, тогда радиус кривизны $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, а длина нормали MN кривой (рис. 10) равна: $|MN|=|y|\cdot\sqrt{1+y'^2}$.

Так как по условию $R=k\cdot|MN|$, где k — коэффициент пропорциональности, то получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1+y'^2}{y''}=ky. \tag{6}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной x.

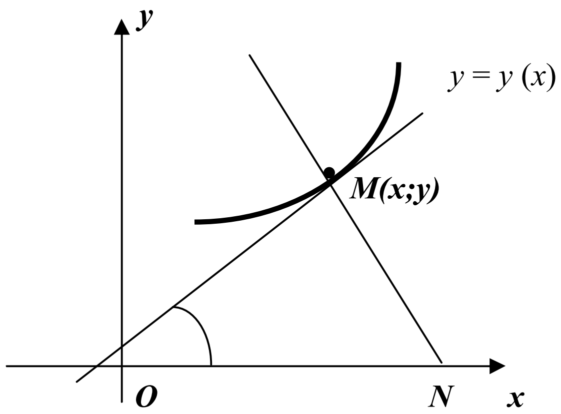


Рис. 10

Запишем уравнение (6) в виде $\frac{2y'y''}{1+y'^2}=\frac{2y'}{k\cdot y}$. Интегрируя, найдём

$$\ln\left(1+y'^2\right)=\frac{2}{k}\left(\ln|y|-\ln|C_1|\right), \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{k}}-1}.$$

Разделяя переменные и интегрируя ещё раз, получим общее решение исходного уравнения (6):

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{k}}-1}}.$$

Заметим, что при $k = -1$ искомыми кривыми будут являться окружности произвольных радиусов с центрами на оси Ox:

$$\left(x+C_2\right)^2+y^2=C_1^2.$$

При $k = 2$ искомыми кривыми будут являться параболы, оси которых параллельны оси Oy:

$$\left(x+C_2\right)^2=4C_1\left(y-C_1\right).$$

Задания для самостоятельного решения

Найти общее решение указанных дифференциальных уравнений (1—60):

1. $y'''=6x+1$.

2. $y'''=x+2\sin x$.

3. $y^{IV}=x^3-2x$.

4. $y'''=x\cdot e^{-x}$.

5. $x \cdot y'' = y' + x^2$.

6. $x \cdot \ln x \cdot y'' = y'$.

7. $(1 - x^2)y'' - y' = 2$.

8. $2x \cdot y''' \cdot y'' = y''^2 - 9$.

9. $(1 + y) \cdot y'' - y'^2 = y'$.

10. $y \cdot y'' - y'^2 = y^2 \ln y$.

11. $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$.

12. $y'' - 2\sqrt{1 - y'^2}$.

13. $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{x}}$.

14. $x \cdot y''' - y'' = 0$.

15. $y'^2 + yy'' = 0$.

16. $x^2 y^2 + xy' = y$.

17. $y'' + y' tgx = \sin 2x$.

18. $y'' + 2yy' = 0$.

19. $y'' = y'e^y$.

20. $y'' + 2xy'^2 = 0$.

21. $y'' tgy = 2y'^2$

22. $y'' x \ln x = y'$.

23. $y^3 y'' = 1$.

24. $y'' + \dfrac{1}{x} y' = 0$.

25. $yy'' = y'' 2y'^2$.

26. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$.

27. $2yy'' - y'^2 = 0$.

28. $y'' + \dfrac{y'}{x} = \dfrac{1}{x}$.

29. $2y'^2 = (y - 1)y''$.

30. $x(y'' + 1) + y' = 0$.

31. $y'' = 2 - y$.

32. $xy'' = y' + x^2$.

33. $y'' = \sqrt{1 + y'}$.

34. $2y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x}{y'}$.

35. $y'(2 - y') = y''$.

36. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(\ln \dfrac{y'}{x} + 1\right)$.

37. $y'' + y' + 2 = 0$.

38. $y'' - \dfrac{y'}{x - 1} = x(x - 1)$.

39. $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0$.

40. $xy'' = y' + x^2$.

41. $2yy'' = y'^2$.

42. $xy'' = y' + x^2$.

43. $yy'' = y'^2 \ln y'$.

44. $xy'' = y'$.

45. $-2yy'' + 1 + y'^2 = 0$.

46. $y'' tgx = y' + 1$.

47. $2(y')^2 = (y - 1)y''$.

48. $xy'' + y' + x = 0$.

49. $xy'' + y' = 0$.

50. $yy'' = y'^2$.

51. $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

52. $xy'' = y'$.

53. $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0$.

54. $(y''x - y')y' = x^3$.

55. $-2yy'' + 1 + y'^2 = 0$.

56. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

57. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$.

58. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.

59. $y'' x \ln x = y'$.

60. $1 + y'^2 = y''$.

Найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям (61—64):

61. $y'' = x \cdot e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

62. $2y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x}{y'}$, $y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$, $y'(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

63. $y' = y'' \ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

64. $(x-1)\cdot y''' - y'' = 0$, $y(2)=2$, $y'(2)=1$, $y''(2)=1$.

65. Найти кривую, у которой радиус кривизны равен кубу нормали. Искомая кривая должна проходить через точку с координатами (0; 1) и иметь в этой точке касательную, составляющую с осью *Ox:* а) угол 45є; б) угол 60є.

66. Найти кривую, у которой проекция радиуса кривизны на ось *Oy* постоянна и равна 2, а ось *Ox* касается искомой кривой в начале координат.

67. Определить форму равновесия нерастяжимой нити, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепных мостов).

68. Найти кривую, у которой радиус кривизны равен постоянной величине.

69. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что площадь треугольника, образованного касательной к кривой в некоторой точке, ординатой этой точки и осью *Ox*, пропорциональна площади криволинейной трапеции, образованной кривой, осью *Ox* и ординатой этой точки.

2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x)\, y = f(x), \tag{7}$$

где функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ заданы и непрерывны в некотором промежутке $(a,\ b)$.

Если в уравнении (7) $f(x) \neq 0$, то оно называется *линейным неоднородным*, или уравнением *с правой частью.*

Если в уравнении (7) $f(x) = 0$, то оно принимает вид

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{8}$$

и называется *линейным однородным*, или уравнением *без правой части*.

Однородное уравнение с той же левой частью, что и данное неоднородное, называется *соответствующим* ему.

Одним из замечательных свойств линейных уравнений является то, что общее решение таких уравнений можно найти по их известным частным решениям.

Общее решение линейного однородного уравнения находят исходя из следующей теоремы.

Теорема. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ — линейно независимые частные решения уравнения (8), то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{9}$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (8).

Решение задачи Коши для уравнения (8) находят следующим образом:

1) находят постоянные $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ по заданным начальным условиям;
2) подставляют найденные значения C_1, C_2, ... , C_n в формулу (9) общего решения.

Напомним, что функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* в промежутке $(a,\ b)$, если существуют такие постоянные α_1, α_2, ..., α_n, не равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0.$$

В противном случае данные функции называются *линейно независимыми.*

Для случая двух функций условие линейной зависимости принимает вид

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \quad \text{или} \quad \frac{y_1}{y_2} = C,$$

где C — постоянная величина.

Примеры. 1) $y_1 = x^2 + x$, $y_2 = 3x(x+1)$ — линейно зависимые функции; 2) $y_1 = 2x^2 + x$, $y_2 = 2 - 1$ — линейно независимые функции; 3) $y_1 = 3\cos 2x$, $y_2 = 4\cos 2x$ — линейно зависимые функции; 4) $y_1 = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{e^{2x}}$, $y_2 = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{e^{2x}}$ — линейно независимые функции.

Совокупность линейно независимых частных решений уравнения (8) $y_1, y_2, ..., y_n$ называется *фундаментальной системой решений*.

Для того, чтобы система частных решений уравнения (8) $y_1, y_2, ..., y_n$ была фундаментальной, т.е. линейно независимой в промежутке (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ x \in (a, b)$ *определитель Вронского* (*вронскиан*) не был равен нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ & \dots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (7) имеет вид

$$y = y_0 + y^*, \tag{10}$$

где y_0 – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения (8);

y^* – частное решение данного линейного неоднородного уравнения (7).

Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ однородного уравнения (8), то общее решение соответствующего неоднородного уравнения (7) можно найти также *методом вариации произвольных постоянных*, который рассмотрим в п. 2.5.

2.3. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n\ y = 0, \tag{11}$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ — некоторые действительные числа.

Это частный случай уравнения (8), когда выполняется условие:

$$a_i(x) = a_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Для нахождения частных решений уравнения (11) составляют *характеристическое уравнение*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{12}$$

которое получается из уравнения (11) заменой в нём производных искомой функции y соответствующими степенями k, а саму функцию y заменяют единицей. Так как уравнение (12) является уравнением n-й степени относительно неизвестного k, то оно имеет n корней действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные.

Общее решение уравнения (11) имеет вид (9) и строится в зависимости от характера корней уравнения (12) по следующему правилу:

1) каждому действительному простому корню k в общем решении (9) соответствует слагаемое вида $C \cdot e^{kx}$;

2) каждому действительному корню кратности m в общем решении (9) соответствует слагаемое вида $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + ... + C_m x^{m-1}) \cdot e^{kx}$;

3) каждой паре комплексных сопряжённых простых корней $k_{1,2}$ = б ± вi в общем решении (9) соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;

4) каждой паре комплексных сопряжённых корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ кратности m в общем решении (9) соответствует слагаемое вида

$$e^{\alpha x}((C_1 + C_2 x + \ ... + C_m x^{m-1})\cos \beta x + (\underline{C}_1 + \underline{C}_2\, x + ... + \underline{C}_m\, x^{m-1})\sin \beta x).$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^3 - 3k^2 + 2k = 0.$$

Его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$ — простые действительные числа (случай 1). Следовательно, $e^{0\cdot x} = 1$, $e^{1\cdot x} = e^x$, $x \cdot e^x$ — частные линейно независимые решения, а общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2\, e^x + C_3\, e^{2x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + y' = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 + k = 0.$$

Его корни: $k_1 = 0$ — простой действительный корень (случай 1), $k_{2,3} = 1$ — действительный корень кратности 2 (случай 2). Следовательно, $e^{0\cdot x} = 1$, $e^{1\cdot x} = e^x$, $x \cdot e^x$ — частные линейно независимые решения, а общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2\, e^x + C_3\, xe^{2x}.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^4 + 5k^2 + 4 = 0.$$

Его корни: $k_{1,2} = \pm i$, $k_{3,4} = \pm 2i$ — две пары комплексных сопряжённых простых корней (случай 3; $\alpha = 0$, $\beta = 1$ для первой пары корней и $\beta = 2$ для второй пары корней). Следовательно, $e^{0\cdot x} \cdot \cos x = \cos x$, $e^{0\cdot x} \cdot \sin x = \sin x$, $e^{0\cdot x} \cdot \cos 2x = \cos 2x$, $e^{0\cdot x} \cdot \sin 2x = \sin 2x$ — частные линейно независимые решения, а общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y^{VI} + 10y^{IV} + 32y'' + 32y = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением шестого порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^6 + 10k^4 + 32k^2 + 32 = 0.$$

Для нахождения корней преобразуем характеристическое уравнение к виду $(k^2+4)^2(k^2+2) = 0$. Откуда имеем: $k_{1,2} = \pm 2i$ — комплексные сопряжённые корни кратности 2 (случай 4; $\alpha = 0$, $\beta = 2$); $k_{3,4} = \pm\sqrt{2}\, i$ — пара комплексных сопряжённых простых корней (случай 3; $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{2}$). Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2\, x) \cos 2x + (C_3 + C_4\, x) \sin 2x + C_5 \cos\sqrt{2}\, x + C_6 \sin\sqrt{2}\, x.$$

Выделим особо частный случай линейных однородных уравнений n- го порядка с постоянными коэффициентами (11) при $n = 2$, т.к. решение различных практических задач часто сводится к решению уравнений именно второго порядка.

Линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{13}$$

где p, q — некоторые действительные числа.

Для практического использования указанный алгоритм оформим в виде таблицы 1.

На основании теории, рассмотренной в п. 2.3, получим следующий ***алгоритм решения линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами***.

1. Записать дифференциальное уравнение в виде (13).

2. Составить его характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 .$$

3. Вычислить дискриминант $D = p^2 - 4q$.

а) Если $D > 0$, то уравнение имеет два разных действительных корня k_1 , k_2, а общее решение записывается в виде

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x} .$$

б) Если $D = 0$, то уравнение имеет два одинаковых корня $k_1 = k_2 = k$, а общее решение записывается в виде

$$y = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}.$$

в) Если $D < 0$, то уравнение имеет пару комплексных сопряжённых корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, а общее решение записывается в виде

$$e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Для практического использования указанный алгоритм представим в табл. 1.

Таблица 1. **Решение линейного однородного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами**

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Дискриминант	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2 \in R$	$k_1 = k_2 = k \in R$	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in C$
Общее решение	$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$C_1 e^{kx} + C_2 x\, e^{kx}$	$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 10 = 0 .$$

Его корни ($D < 0$) $k_{1,2} = 1 \pm 3i$ — комплексные сопряжённые числа (случай 3; $\alpha = 1$, $\beta = 3$), следовательно, $e^x \cos 3x$, $e^x \sin 3x$ — частные линейно независимые решения, а общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 6. Найти частное решение уравнения $y'' + 3y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k = 0 .$$

Его корни ($D > 0$) $k_1 = 0$, $k_2 = -3$ — простые действительные числа (случай 1). Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2\, e^{-3x}.$$

Дифференцируем это решение: $y' = -3\, C_2\, e^{-3x}$. Подставляя начальные условия в общее решение и его производную, получим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ -3C_2 = 2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 5/3$, $C_2 = -2/3$. Значит решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y = \frac{5 - 2e^{-3x}}{3}.$$

Пример 7. *Распространение тепла в стержне.*

Длинный тонкий стержень, сделанный из металла с теплопроводностью λ, находится в состоянии теплового равновесия, т.е. температура точек стержня не изменяется во времени. Потеря тепла через поверхность стержня в окружающую среду, температура которой ω_0 = const, пропорциональна разности температур с постоянным коэффициентом теплопередачи α. Считая температуру ω во всех точках поперечного сечения стержня постоянной, найти её зависимость $\omega = \omega(x)$ от координаты, отсчитываемой от какого-либо, например левого, конца (рис. 11).

Решение. Пусть длина стержня равна l, периметр поперечного сечения P, площадь поперечного сечения Q. Выделим элемент стержня длиной dx, находящийся на расстоянии x от левого конца (рис. 11).

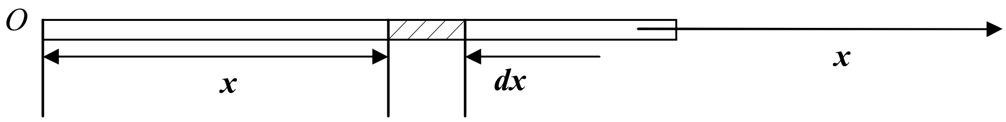


Рис. 11

Примем его температуру равной ω. За время $\Delta\tau$ через левую границу этого элемента пройдёт количество тепла $\left(-\lambda Q \left.\frac{d\omega}{dx}\right|_x \Delta\tau\right)$, а через правую на расстоянии $x + \Delta x$ от конца $\left(-\lambda Q \left.\frac{d\omega}{dx}\right|_{x+\Delta x} \Delta\tau\right)$.

Таким образом, выделенный участок приобретает за время $\Delta\tau$ количество тепла, равное разности

$$\left(-\lambda Q \left.\frac{d\omega}{dx}\right|_x \Delta\tau\right) - \left(-\lambda Q \left.\frac{d\omega}{dx}\right|_{x+\Delta x} \Delta\tau\right) = \lambda Q \left.\frac{d\omega}{dx}\right|_{x+\Delta x} \Delta\tau - \lambda Q \left.\frac{d\omega}{dx}\right|_x \Delta\tau = \lambda Q\left(\left.\frac{d\omega}{dx}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{d\omega}{dx}\right|_x\right)\Delta\tau \approx$$

$$\approx \lambda Q \frac{d^2\omega}{dx^2} dx\, \Delta\tau.$$

Потеря тепла этого элемента через поверхность в окружающую среду равна $\alpha\, m\, dx(\omega - \omega_0)\,\Delta\tau$, и если процесс стационарный, то эта величина равна найденной нами:

$$\lambda Q \frac{d^2\omega}{dx^2} dx\, \Delta\tau = \alpha\, m\, dx(\omega - \omega_0)\,\Delta\tau \quad \frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{\alpha m}{\lambda Q}(\omega - \omega_0) = 0.$$

Так как ω_0 = const, положив $\omega - \omega_0 = u$, получим

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} - a^2 u = 0, \qquad \text{где } a = \frac{\alpha P}{\lambda Q} = \text{const}.$$

Таким образом, получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$u = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}, \text{ или}$$

$$\omega = \omega_0 + C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax},$$

где C_1 и C_2 находят по дополнительным (краевым) условиям.

Пусть, например, на обоих концах стержня поддерживается постоянная температура ω_1 и ω_2 ($\omega_2 < \omega_1$). Тогда краевые условия имеют вид: $\omega(0) = \omega_1$; $\omega(l) = \omega_2$. Подставляя их в общее решение, находим

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + C_1 + C_2; \\ \omega_2 = \omega_0 + C_1 e^{al} + C_2 e^{-al}. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим C_1 и C_2, а затем соответствующее частное решение, удовлетворяющее заданным краевым условиям.

Задания для самостоятельного решения

Проинтегрировать уравнения (1—21):

1. $y'' - 2y' - 4y = 0.$

2. $y'' + 6y' + 9y = 0.$.

3. $y'' - 6y' + 18y = 0$.

4. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

5. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

6. $y'' - y' - 2y = 0$.

7. $y'' + 25y = 0$.

8. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

9. $y'' + 5y' + 6y = 0$.

10. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

11. $y'' - 2y' + 10y = 0$.

12. $9y'' + 9y = 0$.

13. $y'' + 9y = 0$.

14. $y'' - 3y' - 18y = 0$.

15. $y'' - 2y' - 15y = 0$.

16. $3y^{IV} - y'' + y = 0$.

17. $y^{IV} - y'' = 0$.

18. $y''' + 3y'' = 0$.

19. $y^{IV} - 2y''' - y'' + 2y' = 0$.

20. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

21. $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям (22—39):

22. $y''' - 7y'' + 6y' = 0.$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = 30.$
23. $y''' - y'' = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = -1.$
24. $y''' - 4y' = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 2,$	$y''(0) = 4.$
25. $y''' + y' = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 1,$	$y''(0) = 1.$
26. $y''' - 13y'' + 12y' = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 1,$	$y''(0) = 133.$
27. $y''' - y'' + y' - y = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = 1.$
28. $y''' + 3y'' + 2y' = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = 2.$
29. $y''' + y'' + y' = 0.$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = 2.$
30. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0,$	$y(0) = -1,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = -6.$
31. $y''' - y' = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 2,$	$y''(0) = 4.$
32. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,$	$y(0) = 1,$	$y'(0) = -1,$	$y''(0) = 0.$
33. $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0.$	$y(0) = -1,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = 1.$
34. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0,$	$y(0) = -2{,}5,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = 0.$
35. $y''' + 9y' = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 9,$	$y''(0) = -18.$
36. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 0,$	$y''(0) = 4.$
37. $y''' + 2y'' + y' = 0,$	$y(0) = 0,$	$y'(0) = 2,$	$y''(0) = -3.$
38. $y'' - 4\sqrt{2}y' + 6y = 0,$	$y(0) = -3,$	$y'(0)=\sqrt{2}$	
39. $y'' + 4y = 0,$	y(p/4) = 1,	$y'(\pi/4) = -2$	

2.4. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n\,y=f(x), \tag{14}$$

где a_1, a_2, ..., a_n — некоторые действительные числа.

Это частный случай уравнения (7), когда выполняется условие:

$$a_i(x)=a_i=\mathrm{const}\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (14) можно найти двумя способами:

1) методом вариации произвольных постоянных, который рассмотрим в п. 2.5;

2) по формуле (10):

$$y=y_0+y^*,$$

где y_0 — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения (11);

y^* — частное решение данного линейного неоднородного уравнения (14).

Общее решение y_0, соответствующее линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами, находят по правилам, изложенным в п. 2.3.

Частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения (14) находят *методом подбора* (*методом неопределённых коэффициентов*). Этот метод применим только в том случае, если правая часть уравнения (14) имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x), \tag{15}$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены от x степени n и m соответственно; α, β — постоянные.

Тогда частное решение y^* уравнения (14) имеет вид

$$y^*=x^s\cdot e^{\alpha x}\cdot(P_k'(x)\cos\beta x+Q_k'(x)\sin\beta x), \tag{16}$$

где s — кратность корня $\alpha\pm\beta i$ характеристического уравнения (если $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то $s=0$); $k=\max(n,m)$; $P_k'(x)$, $Q_k'(x)$ — многочлены от x степени k общего вида с неопределёнными коэффициентами.

Простейшие виды правых частей $f(x)$ уравнения (14), частные случаи выражения (15) и соответствующие им частные решения y^*, частные случаи формулы (16), указаны в табл. 2.

Таблица 2. **Частные решения линейного неоднородного уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами**

№	Правая часть $f(x)$ уравнения (14)	Вид частного решения y^* уравнения (14): λ не является корнем характеристического уравнения (12)	Вид частного решения y^* уравнения (14): λ является корнем характеристического уравнения (12)
1	$f(x)=P_n(x)$ – многочлен степени n	$\lambda=0$ – не корень $\Rightarrow y^*=Q_n(x)$ – многочлен степени n	$\lambda=0$ – корень (12) кратности $s\Rightarrow$ $\Rightarrow y^*=x^s\cdot Q_n(x)$ – многочлен степени $s+n$
2	$f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$	$\lambda=\alpha$ – не корень $\Rightarrow$ $\Rightarrow y^*=e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)$	$\lambda=\alpha$ – корень кратности $s\Rightarrow$ $\Rightarrow y^*=e^{\alpha x}\cdot x^s\cdot Q_n(x)$
3	$f(x)=P_n(x)\cdot\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x$	$\lambda=\pm\beta i$ – не корень $\Rightarrow$ $\Rightarrow y^*=P'_k(x)\cos\beta x+Q'_k(x)\sin\beta x$	$\lambda=\pm\beta i$ – корень кратности $s\Rightarrow$ $\Rightarrow y^*=x^s\cdot(P_k'(x)\cos\beta x+Q'_k(x)\sin\beta x)$
4	$f(x)=e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cdot$ $\cdot\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$	$\lambda=\alpha\pm\beta i$ – не корень $\Rightarrow$ $\Rightarrow y^*=e^{\alpha x}\cdot(P'_k(x)\cos\beta x+$ $+Q'_k(x)\sin\beta x)$	$\lambda=\alpha\pm\beta i$ – корень кратности $s\Rightarrow$ $\Rightarrow y^*=x^s\cdot e^{\alpha x}(P'_k(x)\cos\beta x+$ $+Q'_k(x)\sin\beta x)$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} - y = 10\cos x .$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение найдём по формуле (10):

$$y = y_0 + y^*,$$

где y_0 — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y^{IV} - y = 0$; y^* — частное решение данного линейного неоднородного уравнения.

1. Найдём общее решение y_0 соответствующего линейного однородного уравнения

$$y^{IV} - y = 0 .$$

Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^4 - k = 0 .$$

Его корни: $k_{1,2} = \pm 1$ — простые действительные числа (п. 2.3, случай 1); $k_{3,4} = \pm i$ — комплексные сопряжённые простые корни (п. 2.3, случай 3; $\alpha = 0$, $\beta = 1$). Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

2. Найдём частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть уравнения

$$f(x) = 10 \cos x$$

является частным случаем выражения (15); в табл. 2 это случай 3, где $P_n(x) = P_0(x) = 10$, $\beta = 1$, $Q_n(x) = Q_0(x) = 0$.

Так как $\pm i$ — однократные корни характеристического уравнения, то по табл. 2 (последний столбец третьей строки) получаем частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения:

$$y^* = x \cdot (A_1 \cos x + A_2 \sin x).$$

Найдём неизвестные величины A_1, A_2. Для этого продифференцируем четыре раза получившееся уравнение:

$y^{*\prime} = (x \cdot (A_1 \cos x + A_2 \sin x))' = A_1 \cos x + A_2 \sin x + x \cdot (-A_1 \sin x + A_2 \cos x)$;

$y^{*\prime\prime} = 2A_2 \cos x - 2A_1 \sin x - x \cdot (A_1 \cos x + A_2 \sin x)$;

$y^{*\prime\prime\prime} = -3A_1 \cos x - 3A_2 \sin x - x \cdot (-A_1 \sin x + A_2 \cos x)$;

$y^{*IV} = 4A_1 \sin x - 4A_2 \cos x + x \cdot (A_1 \cos x + A_2 \sin x)$.

Подставим выражения для y^{IV} и y в исходное уравнение $y^{IV} - y = 10 \cos x$:

$4A_1 \sin x - 4A_2 \cos x + x\,(A_1 \cos x + A_2 \sin x) - xA_1 \cos x - xA_2 \sin x = 10 \cos x$.

После преобразований получим уравнение:

$$4A_1 \sin x - 4A_2 \cos x = 10 \cos x.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях при $\sin x$ и $\cos x$:

$$4A_1 = 0; \; -4A_2 = 10.$$

Отсюда $A_1 = 0$; $A_2 = -5/2$. Подставим эти значения в частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения:

$$y^* = x \cdot (A_1 \cos x + A_2 \sin x) = -5/2\, x \sin x.$$

3. Таким образом, общее решение данного линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = y_0 + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 5/2\, x \sin x.$$

Линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p, q — некоторые действительные числа; $f(x) \neq 0$.

Его общее и частное решения находят на основе правил, изложенных в п. 2.4, т.к. это частный случай уравнения (14) при $n = 2$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение найдём по формуле (10):

$$y = y_0 + y^*,$$

где y_0 — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$; y^* — частное решение данного линейного неоднородного уравнения.

1. Найдём общее решение y_0 соответствующего линейного однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ — простые действительные числа (п. 2.3, случай 1). Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

2. Найдём частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть уравнения $f(x) = x^2 + 3x$ — многочлен 2-й степени — является частным случаем выражения (15). В табл. 2 это случай 1, где $P_n(x) = P_2(x) = x^2 + 3x$. Так как 0 не является корнем характеристического уравнения, то по табл. 2 (предпоследний столбец первой строки) получаем частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения:

$$y^* = Q_2(x) = A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Найдём неизвестные величины A_1, A_2, A_3. Для этого продифференцируем два раза получившееся уравнение:

$$y^{*\prime} = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3)' = 2A_1 x + A_2; \qquad y^{*\prime\prime} = 2A_1.$$

Подставим выражения для y'', y' и y в исходное уравнение:

$$2A_1 - 6A_1 x - 3A_2 + 2A_1 x^2 + 2A_2 x + 2A_3 = x^2 + 3x.$$

После преобразований получим уравнение:

$$2A_1 x^2 + (2A_2 - 6A_1)x + (2A_1 - 3A_2 + 2A_3) = x^2 + 3x.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях полученного равенства при одинаковых степенях неизвестного x:

$$\begin{cases} 2A_1 = 1; \\ 2A_2 - 6A_1 = 3; \\ 2A_1 - 3A_2 + 2A_3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $A_1 = 1/2$; $A_2 = 3$; $A_3 = 4$. Подставим эти значения в частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения:

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4.$$

3. Таким образом, общее решение данного линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = y_0 + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = x \cdot e^x.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение найдём по формуле (10):

$$y = y_0 + y^*,$$

где y_0 — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$; y^* — частное решение данного линейного неоднородного уравнения.

1. Найдём общее решение y_0 соответствующего линейного однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 = 0.$$

$k_1 = k_2 = 1$ — действительный корень кратности 2 (п. 2.3, случай 2). Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = e^x (C_1 + C_2 x).$$

2. Найдём частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть уравнения $f(x) = x \cdot e^x$ является частным случаем выражения (15). В табл. 2 это случай 2, где $P_n(x) = P_1(x) = x$, $\alpha = 1$. Так как $\alpha = 1$ — это корень характеристического уравнения кратности 2, то по табл. 2 (последний столбец второй строки) получаем частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения:

$$y^* = e^x \cdot x^2 \cdot Q_1(x) = e^x \cdot x^2 \cdot (A_1 x + A_2) = e^x \cdot (A_1 x^3 + A_2 x^2).$$

Найдём неизвестные величины A_1, A_2. Для этого продифференцируем два раза получившееся уравнение:

$$y^{*\prime} = (e^x \cdot (A_1 x^3 + A_2 x^2))' = e^x \cdot (A_1 x^3 + (A_2 + 3A_1)x^2 + 2A_2 x);$$

$$y^{*\prime\prime} = e^x \cdot (A_1 x^3 + (A_2 + 3A_1)x^2 + 2A_2 x + 3A_1 x^2 + 2(A_2 + 3A_1)x + 2A_2).$$

Подставим выражения для y'', y' и y в исходное уравнение:

$$e^x \cdot (A_1 x^3 + (A_2 + 3A_1)x^2 + 2A_2 x + 3A_1 x^2 + 2(A_2 + 3A_1)x + 2A_2) - 2\, e^x (A_1 x^3 + (A_2 + 3A_1)x^2 + 2A_2 x + {}$$
$$+ e^x \cdot (A_1 x^3 + A_2 x^2) = x \cdot e^x.$$

Разделим равенство на e^x и после несложных преобразований получим уравнение

$$6A_1 x + 2A_2 = x.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях полученного равенства при одинаковых степенях неизвестного x: $6A_1 = 1$; $2A_2 = 0$. Откуда получим $A_1 = 1/6$; $A_2 = 0$. Подставим эти значения в частное решение y^* данного линейного неоднородного уравнения:

$$y^* = \frac{1}{6} e^x \cdot x^3.$$

3. Таким образом, общее решение данного линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = y_0 + y^* = e^x (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{6} e^x \cdot x^3 = e^x (C_1 + C_2 x + \frac{1}{6} x^3).$$

Пример 4. К источнику с электродвижущей силой (ЭДС), равной $e(t)$, подключили контур, состоящий из последовательно соединённых катушки индуктивности L, омического сопротивления R и ёмкости C. Найти силу тока i в цепи как функцию времени t, если в начальный момент времени сила тока в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

Решение. По закону Кирхгофа электродвижущая сила в цепи равна сумме падений напряжения на индуктивности, сопротивлении и ёмкости:

$$e(t) = U_L + U_R + U_C,$$

где $U_L = L\dfrac{di}{dt}$; $U_R = R\, i$; $U_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\, dt$.

Заметим, что последнее равенство получается из соотношения между силой тока и зарядом конденсатора: $i = \dfrac{dq}{dt}$, откуда $q = \displaystyle\int_0^t i(t)\, dt + q_0$, а так как $U_C = \dfrac{q}{C}$, то $U_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\, dt + \dfrac{q_0}{C}$.

По условию задачи $q_0 = 0$. Таким образом, получаем интегрально-дифференциальное уравнение $e(t) = L\dfrac{di}{dt} + R\, i + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\, dt$. Продифференцировав его по t, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}.$$

Здесь возможны два случая: 1) $e(t) = C = \text{const}$; 2) $e(t) = E \sin \omega t$.

Рассмотрим ***первый случай.*** Здесь $\frac{d\,e}{d\,t} = 0$. Тогда получим однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 i}{d\,t^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{1}{LC}i = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + \frac{R}{L}\cdot r + \frac{1}{LC} = 0$ имеет корни

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}.$$

Если $R^2 C - 4L \geq 0$, то корни характеристического уравнения — действительные и общее решение есть функция непериодическая. Соответственно апериодической является и сила тока. Никаких электрических колебаний в цепи не произойдёт.

Если же $R^2 C - 4L < 0$, то общее решение

$$i = e^{-\delta\, i}\cdot(C_1 \cos\omega\, t + C_2 \sin\omega\, t),$$

где $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ определяет электрические колебания.

Так как $L\left.\frac{d\,i}{d\,t}\right|_{t=0} = E$, то $\left.\frac{d\,i}{d\,t}\right|_{t=0} = \frac{E}{L}$.

Следовательно, начальные условия можно записать в виде

$$i\,\big|_{t=0} = 0;\quad \left.\frac{d\,i}{d\,t}\right|_{t=0} = \frac{E}{L}.$$

Дифференцируя i по t, имеем

$$\frac{d\,i}{d\,t} = e^{-\delta\, t}\cdot\left\{-\delta(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) + \omega(-C_1\sin\omega_1 t + C_2\cos\omega_1 t)\right\}.$$

Подставив $t = 0$ в выражения для i и $\frac{d\,i}{d\,t}$, получим

$$0 = \text{C1},\quad \frac{E}{L} = -\delta\, C_1 + \omega_1 C_2,$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{E}{L\omega}$.

Итак, частное решение уравнения принимает вид

$$i = \frac{E}{L\omega_1}\cdot e^{-\delta\, t}\cdot\sin\omega_1 t.$$

Рассмотрим ***второй случай.*** Так как $e(t) = E \sin \omega t$, то $\frac{d\,e}{d\,t} = E\cdot\omega\cdot\cos\omega t$. Тогда получим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 i}{d\,t^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{1}{LC}i = E\cdot\omega\cdot\cos\omega t.$$

Его общее решение найдём по формуле (10):

$$i = i_0 + i^*,$$

где i_0 - общее решение соответствующего линейного однородного уравнения (его мы уже нашли, рассматривая первый случай); i^* - частное решение данного линейного неоднородного уравнения. Найдём частное решение i^* данного линейного неоднородного уравнения методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть уравнения $f(t) = E\cdot\omega\cdot\cos\omega t$ является частным случаем выражения (15);

в табл. 2 это случай 3, где $P_n(t) = P_0(t) = = E\cdot\omega\cdot\cos\omega t$, $\beta = \omega$, $Q_n(t) = Q_0(t) = 0$. Так как $\pm \omega i$ не является корнем характеристического уравнения, то по табл. 2 (предпослед-ний столбец третей строки) получаем частное решение i^* линейного неоднородного уравнения:

$$i^* = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t.$$

Найдём неизвестные величины A_1, A_2. Для этого продифференцируем два раза получившееся уравнение:

$$i^{*\prime} = (A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t)' = - A_1 \omega \sin\omega t + A_2 \omega \cos\omega t;$$

$$i^{*\prime\prime} = - A_1 \omega^2 \cos\omega t0 - A_2 \omega^2 \sin\omega t.$$

Подставим выражения для $i^{*\prime\prime}$, $i^{*\prime}$ и i в исходное уравнение:

$$- A_1 \omega^2 \cos\omega t - A_2 \omega^2 \sin\omega t + \frac{R}{L}\cdot(- A_1 \omega \sin\omega t + A_2 \omega \cos\omega t) + \frac{1}{L}\cdot(A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t) =$$

$$= E\cdot\omega\cdot\cos\omega t.$$

После преобразований, приравнивая коэффициенты в левой и правой частях при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$, получим:

$$A_1 = \frac{E\omega}{1+4\omega^2};\quad A_2 = \frac{2E\omega^2}{\delta(1+4\omega^2)}.$$

Подставим эти значения в частное решение i^* данного линейного неоднородного уравнения, получим:

$$i^* = \frac{E\omega}{1+4\omega^2}\cos\omega t + \frac{2E\omega^2}{\delta(1+4\omega^2)}\sin\omega t.$$

Таким образом, общее решение данного линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$i = e^{-\delta i}\cdot(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \frac{E\omega}{1+4\omega^2}\cos\omega t + \frac{2E\omega^2}{\delta(1+4\omega^2)}\sin\omega t,$$

где $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega^2 = \frac{1}{L,,} - \frac{R^2}{4L^2}$. Подставив начальные условия, получим частное решение этого уравнения.

$i(0) = 0 \Rightarrow C_1 + \frac{E\cdot\omega}{1+4\omega^2}$; $C_1 = -\frac{E\cdot\omega}{1+4\omega^2}$.

Для использования второго начального условия продифференцируем по переменной t :

$$i' = -\delta\cdot e^{-\delta\cdot t}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + e^{-\delta\cdot t}(-C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t.) - \frac{E\omega^2}{1+4\omega^2\sin\omega t} +$$

$$+\frac{2E\omega^3}{\delta(1+4\omega^2)}\cos\omega t.$$

По условию задачи $i'(0) = \frac{E}{L} \Rightarrow \frac{E}{L} = -\delta C_1 + C_2\omega + \frac{2E\omega^3}{\delta(1+4\omega^2)}$. $C_2 = \frac{E(2\omega^3 - \delta^2}{\delta(1+4\omega^2}$. Частное решение уравнения имеет вид

$$i = e^{-\delta\cdot t}\left(-\frac{E\omega}{1+4\omega^2}\cos\omega t + \frac{E(2\omega^3-\delta^2}{\delta(1+4\omega^2)}\sin\omega t\right) + \frac{E\omega}{1+4\omega^2}\cos\omega t + \frac{2E\omega^2}{\delta(1+4\omega^2)}\sin\omega t,$$

где $\delta = \frac{R}{2L}, \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$.

Задания для самостоятельного решения

Проинтегрировать уравнения (1—16):

1. $y'' + y' = 2x - 1$.

2. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$.

3. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$.

4. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$.

5. $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$.

6. $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 3x$.

7. $y'' + 16y = 8\cos 4x$.

8. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$.

9. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.

10. $y'' - 2y' = 6 + 12x$.

11. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.

12. $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 2x$.

13. $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$.

14. $y'' + 4y' = e^x(24\cos 2x + 2\sin 2x)$.

15. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$.

16. $y'' + y' - y = 3\sin x - \cos x$.

Решить задачу Коши (17—25):

17. $y'' - 6y' + 13y = 2\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. $y'' + 5y' = 3\sin x - \cos x$, $y(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

19. $y'' + 4y' + 4y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

20. $y'' - 22y' + 121y = x^2$, $y(0) = -1$, $y''(0) = 2$.

21. $y'' + y = (x + 2)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

22. $y'' + y' - 2y = 4x^2 - 3x + 5$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

23. $y'' - 2y' + 2y = x^3 - 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

24. $y'' + 2y' + y = (4x - 1)e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

25. $y'' + 4y' - y = x - 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

2.5. Метод вариации произвольных постоянных

Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ однородного уравнения (8), то общее решение соответствующего неоднородного уравнения (7) можно найти *методом вариации произвольных постоянных* (*методом Лагранжа*). Этот метод можно применять при решении линейного неоднородного уравнения (7) как с переменными, так и с постоянными коэффициентами. При этом, если правая часть неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами (14) не является частным случаем формулы (15), то этот метод позволяет найти решение. Суть метода заключается в следующем.

Общее решение уравнения (7) записывают в виде

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + ... + C_n(x)\, y_n,$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ — линейно независимые частные решения уравнения (8), а функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ \dots\ + C_n'(x)y_n = 0; \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ \dots\ + C_n'(x)y_n' = 0; \\ \dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ \dots\ + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ \dots\ + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{17}$$

Система (17) всегда имеет решения, т.к. её определитель является определителем Вронского, а $W(x) \neq 0$ (п. 2.2).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y' + x \cdot y'' = x^2. \tag{18}$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением второго порядка. Решим его методом вариации произвольных постоянных.

1. Найдём общее решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$x \cdot y'' + y' = 0. \tag{19}$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим искомой функции y. Полагая $y' = z$, следовательно, $y'' = z$, преобразуем уравнение (19) к виду

$$x \cdot z' + z = 0.$$

Таким образом понизили порядок уравнения на единицу и получили уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = -z \;\Rightarrow\; \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|z| = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right| \;\Rightarrow\; z = \frac{C_1}{x}.$$

Возвращаясь к переменной y, опять получим уравнение с разделяющимися переменными: $y' = \frac{C_1}{x}$. Решим его:

$$dy = \frac{C_1}{x}dx \;\Rightarrow\; \int dy = \int \frac{C_1}{x}dx \;\Rightarrow\; y = C_1 \ln|x| + C_2$$

— общее решение линейного однородного уравнения (19). Исходя из вида полученного общего решения, можно допустить, что $y_1 = \ln|x|$, $y_2 = 1$ — частные решения уравнения (19).

2. Найдём общее решение данного линейного неоднородного уравнения (18) в виде:

$$y = C_1(x)\ln|x| + C_2(x). \tag{20}$$

Для нахождения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0; \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{21}$$

Заметим, что если разделить исходное уравнение (18) на $x \neq 0$, получим уравнение

$$y'' + y'\frac{1}{x} = x. \tag{22}$$

Тогда $f(x) = x$, $y_1 = \ln|x|$, $y_2 = 1$ и система (21) примет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \ln|x| + C_2'(x) \cdot 1 = 0; \\ C_1'(x) \cdot \dfrac{1}{x} + C_2'(x) \cdot 0 = x. \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} C_1'(x) \cdot \ln|x| = -C_2'(x) \cdot 1; \\ C_1'(x) \cdot \dfrac{1}{x} = x. \end{cases}$$

Последовательно дифференцируя уравнение (20) два раза и учитывая равенства системы, получим:

$$y' = C_1'(x)\ln|x| + C_1(x) \cdot \frac{1}{x} + C_2'(x) = C_1(x) \cdot \frac{1}{x};$$

$$y'' = C_1'(x) \cdot \frac{1}{x} - C_1(x) \cdot \frac{1}{x^2} = x - C_1(x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Подставив эти выражения вместо y', y'' в исходное уравнение (22), получим

$$C_1'(x) \cdot \frac{1}{x} - C_1(x) \cdot \frac{1}{x^2} + C_1(x) \cdot \frac{1}{x^2} = x.$$

Откуда $C_1'(x) \cdot \frac{1}{x} = x \;\Rightarrow\; C_1'(x) = x^2 \;\Rightarrow\; C_1(x) = \frac{x^3}{3} + C_1$.

Первое уравнение системы (21) примет вид $x^2 \ln|x| + C_2'(x) = 0$.

Интегрируя его, получим $C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln|x| + \frac{x^3}{9} + C_2$.

Таким образом, подставляя найденные значения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ в уравнение (20), получим общее решение данного линейного неоднородного уравнения (18):

$$y = C_1 \ln|x| + \frac{x^3}{9} + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Заметим, что при $x = 0$ исходное уравнение (18) принимает вид $y' = 0$. Откуда получим частное решение: $y = C$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением третьего порядка. Решим его методом вариации произвольных постоянных.

1. Найдём общее решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Данное уравнение является линейным однородным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Его корни $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 2$ — простые действительные числа (п. 2.3, случай 1). Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

Исходя из вида общего решения, можно допустить, что $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{2x}$ — частные решения однородного уравнения.

2. Найдём общее решение данного линейного неоднородного уравнения в виде

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x} + C_3(x) e^{2x}. \qquad (23)$$

Для нахождения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ составим систему уравнений (17). Она примет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0; \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_3'(x)y_3'(x) = 0; \\ C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + C_3'(x)y_3''(x) = f(x). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} + C_3'(x)e^{2x} = 0; \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} + 2C_3'(x)e^{2x} = 0; \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} + 4C_3'(x)e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Решая систему из трёх уравнений с тремя неизвестными, например методом Гаусса, получим:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{e^x + 1}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{6}\frac{e^{3x}}{e^x + 1}, \quad C_3'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{e^x + 1}.$$

Интегрируя эти выражения, найдём:

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\ln(e^x + 1) + C_1;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{6}\int \frac{e^{3x} dx}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int \frac{e^{2x} d(e^x)}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int \frac{((e^{2x} - 1) + 1) d(e^x)}{e^x + 1} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}\right) de^x = \frac{1}{6}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x + 1)\right) + C_2;$$

$$C_3(x) = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{e^x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{3}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x - \int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}\right) = \frac{1}{3}\left(x-\ln(e^x+1)\right)+C_3 \cdot$$

Таким образом, подставляя найденные значения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ в уравнение (23), получим общее решение данного линейного неоднородного уравнения:

$$y = \left(C_1 - \frac{1}{2}\ln(e^x+1)\right)e^x + \left(\frac{1}{6}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1)\right)+C_2\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{3}\left(x-\ln(e^x+1)\right)+C_3\right)e^{2x} =$$

$$= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + \frac{1}{12}(e^x - 2 + 4xe^{2x}) + \frac{1}{6}\left(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x}\right)\ln(e^x+1),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Задания для самостоятельного решения

Проинтегрировать методом вариации произвольных постоянных следующие уравнения:

1. $y'' + y = -tg\ x$.

2. $y'' + y = tgx$.

3. $y'' - 2y' = \frac{1}{2x}$

4. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

5. $y'' - y = \frac{e^x}{e^{x+1}}$.

6. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

7. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

8. $y'' + 2y' + y = xe^x$.

9. $y'' + 9y' + y = \frac{1}{3x}$

10. $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$

11. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$.

12. $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$.

13. $(x+1)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

14. $y'' + 4y = ctg\,2x$.

15. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

16. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

17. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

18. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$.

19. $x \cdot y'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$.

20. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$.

21. $y^V - y''' = \cos^2 x$.

22. $y^{IV} - y'' = \sin^2 x$.

23. $y^{IV} + y = 3xe^x + \sin x$.

24. $y''' + 5y'' = 3x + e^{-x}$.

25. $y''' + y = \sin x$.

26. $y''' - y = \cos^2 x$.

27. $y^{(4)} + 2y^{(2)} = x^2$.

28. $3y^V + y''' = -x\sin x$.

29. $y^{VI} + 5y'' + 4 = 2xe^x - 1$.

30. $y''' + y'' = x\sin 4x$.

31. $y''' + y'' + y' + y = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} - 1$.

32. $y'' - y = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

Системой дифференциальных уравнений называют совокупность дифференциальных уравнений, т.е. уравнений, содержащих независимые переменные, неизвестные функции и их производные (или дифференциалы).

Система n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно всех производных, называется *нормальной*. Она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ \quad .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{1}$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ — неизвестные функции независимой переменной x; $f_1, f_2, ..., f_n$ — известные функции, зависящие от x, $y_1, y_2, ..., y_n$, заданные и непрерывные в некоторой области.

Число уравнений, входящих в систему, называют *порядком* системы.

Решить систему или *проинтегрировать* в некотором интервале $[a, b]$ — значит найти совокупность n функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, определённых и непрерывно дифференцируемых в указанном интервале, обращающих каждое уравнение системы в тождество.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (1) состоит в нахождении решения

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x),$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \ ..., \ y_n(x_0) = y_n^{(0)}.$$

Геометрический смысл задачи Коши заключается в нахождении среди всех интегральных кривых тех, которые проходят через точки (x_0, y_1^0), … ,(x_0, y_n^0).

Общим решением системы (1) называют совокупность n функций:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n); \\ y_2 = y_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n); \\ \quad .... \\ y_n = y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{cases}$$

зависящих от переменной x и произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $y_1, y_2, ..., y_n$ определены в области изменения переменной x и имеют непрерывные частные производные по x;

2) функции $y_1, y_2, ..., y_n$ должны являться решением системы (1) при любых значениях C_1, C_2, ..., C_n.

Частным решением системы (1) называют решение, полученное из общего при некоторых частных значениях постоянных C_1, C_2, ..., C_n.

Интегралом нормальной системы (1) называют функцию

$$\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

которая в области изменения переменных:

1) определена и непрерывна вместе с частными производными

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_n};$$

2) принимает при любых x постоянное значение при подстановке в неё произвольного решения системы.

Функция $\psi\ (x,\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$ зависит только от выбора решения $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$, но не зависит от переменной x.

Первым интегралом нормальной системы (1) называют равенство

$$\psi\ (x, y_1, y_2, ..., y_n) = C,$$

где $\psi\ (x, y_1, y_2, ..., y_n)$ — интеграл нормальной системы (1); C — произвольная постоянная.

Иногда первым интегралом системы (1) называют просто интеграл этой системы.

При решении систем часто используют следующее *утверждение*: систему дифференциальных уравнений (1) можно свести к одному дифференциальному уравнению n-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'',\ y''',\ ...\ ,\ y^{(n\text{-}1)}),$$

и наоборот, одно дифференциальное уравнение n-го порядка можно свести к системе дифференциальных уравнений (1).

Пример 1. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение $y'' + 2\,y - 3 = 0$.

Решение. Пусть $y' = z$, тогда $y'' = z'$ и уравнение приводится к нормальной системе

$$\begin{cases} y' = z; \\ z' = 3 - 2y. \end{cases}$$

Пример 2. Привести нормальную систему

$$\begin{cases} y' = 3 - z; \\ z' = 1 + 6y + z \end{cases}$$

к одному дифференциальному уравнению.

Решение. Из первого уравнения системы выразим $z = 3y - y' \Rightarrow z' = 3\,y' - y''$. Подставим значения z и z' во второе уравнение системы, получим $3y' - y'' = 1 + 6y + 3y - y' \Rightarrow$

$$y'' - 4\,y' + 9y + 1 = 0$$

— линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Решение различных прикладных задач приводит к так называемым линейным системам дифференциальных уравнений.

Система называется *линейной*, если неизвестные функции и их производные (или дифференциалы) входят в каждое из уравнений только в первой степени. Нормальная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \qquad\qquad\qquad .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{2}$$

где функции $a_{ij}(x), f_i(x)$ $(i = 1, ..., n; j = 1, ..., n)$ непрерывны в некотором интервале.

Если все $f_i(x) = 0$, то система (2) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Если $a_{ij}(x) = a_{ij} = \text{const}$, то система (2) называется *линейной с постоянными коэффициентами*.

Существуют различные методы решения систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим простейшие из них.

3.1. Метод исключения

Метод исключения основан на следующем утверждении: нормальная система n дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентна одному дифференциальному уравнению n—го порядка. Следовательно, можно исключить в системе (1) все неизвестные функции, кроме одной, и получить одно дифференциальное уравнение n-го порядка.

Свести нормальную систему (1) к одному уравнению можно дифференцированием одного из уравнений системы и последовательным исключением всех неизвестных, кроме одного. Каким образом это можно осуществить рассмотрим на конкретном примере.

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 + e^x; \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 + x; \\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

Решение. Решим систему методом исключения.

1. Дифференцируем по x любое, например первое уравнение заданной системы и подставляем вместо y'_1, y'_2, y'_3 их выражения из этой системы. В результате получим

$$y_1'' = 3y_1' - y_2' + y_3' + e^x = 3(3y_1 - y_2 + y_3 + e^x) - (y_1 + y_2 + y_3 - x) + 4y_1 - y_2 + 4y_3 + e^x =$$
$$= 12y_1 - 5y_2 + 6y_3 + 4e^x + x\cdot$$

Дифференцируем y''_1, по x и опять заменяем y'_1, y'_2, y'_3 их выражениями из системы:

$$y_1''' = 12y_1' - 5y_2' + 6y_3' + 4e^x + 1 = 12(3y_1 - y_2 + y_3 + e^x) - 5(y_1 + y_2 + y_3 - x) + 6(4y_1 - y_2 + 4y_3) +$$
$$+ 4e^x + x = 55y_1 - 23y_2 + 31y_3 + 16e^x + 6x$$

Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 + e^x; \\ y_1'' = 12y_1 - 5y_2 + 6y_3 + 4e^x + x; \\ y_1''' = 55y_1 - 23y_2 + 31y_3 + 16e^x + 6x. \end{cases} \qquad (3)$$

Из первых двух уравнений находим y_2 и y_3:

$$y_2 = y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^x - x;$$
$$y_3 = y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + e^x - x. \qquad (4)$$

Выражения для y_2 и y_3 подставим в третье уравнение системы (3):

$$y_1''' = 55y_1 - 23(y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^x - x) + 31(y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + e^x - x) + 16e^x + 6x = 8y_1'' - 17y_1' +$$
$$+ 10y_1 + e^x - 2x$$

Получили неоднородное линейное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = e^x - 2x. \qquad (5)$$

Его общее решение найдём по формуле

$$y_1 = y_1^0 + y_1^*,$$

где y_1^0 — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения;

y_1^* — частное решение линейного неоднородного уравнения (5).

2. Найдём общее решение y_1^0 соответствующего линейного однородного уравнения $y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = 0\cdot$

Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^3 - 8k^2 + 17k - 10 = 0\,.$$

Его корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$ — простые действительные числа (п. 2.3, случай 1). Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y^0_1 = C_1 e^x + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{5x}.$$

3. Найдём частное решение y_1^* линейного неоднородного уравнения (4) методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть уравнения (5) $f(x) = e^x - 2x$ является суммой двух специальных функций $f_1(x) =$ и $f_2(x) = -2x$, следовательно, частным решением уравнения (5) будет являться $y_1^* = y_1^{*1} + y_1^{*2}$, где y_1^{*1} и y_1^{*2} — частные решения неоднородных линейных уравнений

$y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = f_1(x)$ и $y_1''' - 8y_1'' + 17y_1' - 10y_1 = f_2(x)$.

Для $f_1(x) =$ $k = 1$, для $f_2(x) = -2x$ $k = 0$, тогда получаем частное решение y_1^* линейного неоднородного уравнения (5):

$$y_1^* = A_1\, x e^x + A_2\, x + A_3.$$

Найдём неизвестные величины A_1, A_2, A_3. Для этого продифференцируем три раза полученное уравнение:

$$y_1^{*\prime} = A_1\, x e^x + A_1 e^x + A_2;$$

$$y_1^{*\prime\prime} = A_1\, x e^x + 2A_1 e^x;$$

$$y_1^{*\prime\prime\prime} = A_1\, x e^x + 3A_1 e^x.$$

Подставим выражения для $y_1^{*\prime\prime\prime}$, $y_1^{*\prime\prime}$, $y_1^{*\prime}$ и y_1^* в уравнение (5):

$$A_1 x e^x + 3A_1 e^x - 8(A_1 x e^x + 2A_1 e^x) + 17(A_1 x e^x + A_1 e^x + A_2) - 10(A_1 x e^x + A_2\, x + A_3) = e^x - 2x.$$

После преобразований получим уравнение:

$$4A_1\, e^x + 17A_2 - 10\, A_2 x - 10\, A_3 = e^x - 2x.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях при соответствующих выражениях, получим:

$$A_1 = 1/4;\; A_2 = 1/5;\; A_3 = 17/50.$$

Подставим эти значения в частное решение y_1^* линейного неоднородного уравнения (5):

$$y_1^* = \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{5}\, x + \frac{17}{50}.$$

4. Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами (5) имеет вид

$$y_1 = y_1^0 + y_1^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{5} x + \frac{17}{50}.$$

5. Найдём производные y'_1, y''_1:

$$y'_1 = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 5C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{4}\, e^x + \frac{1}{5};$$

$$y''_1 = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 25C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{2}\, e^x.$$

Подставим найденные значения y'_1, y''_1 в равенства (4):

$$y_2 = y_1'' - 6y_1' + 6y_1 + 2e^x - x = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 25C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{2}\, e^x - 6(C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} +$$

$$+ 5C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{4}\, e^x + \frac{1}{5}) + 6(C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{5} x + \frac{17}{50}) + 2\, e^x - x =$$

$$= C_1 e^x - 2C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{6}{5} x + \frac{21}{25} - e^x;$$

$$y_3 = y_1'' - 5y_1' + 3y_1 + e^x - x = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 25C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{2}\, e^x - 5(C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} +$$

$$+ 5C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{4}\, e^x + \frac{1}{5}) + 3(C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x} + \frac{1}{4}\, x e^x + \frac{1}{5}\, x + \frac{17}{50}) + e^x - x =$$

$$= C_1 e^x - 3C_2 e^{2x} + 3C_3 e^5 - \frac{1}{4} x e^x - \frac{2}{5} x + \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{50}.$$

Таким образом, общее решение заданной системы имеет вид

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{5} x + \frac{17}{50};$$

$$y_2 = C_1 e^x - 2C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x} + \frac{1}{4} x e^x + \frac{6}{5} x + \frac{21}{25} - e^x;$$

$$y_3 = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{5x} - \frac{1}{4} x e^x - \frac{2}{5} x + \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{50}.$$

Пример 2. *Фильтр низких частот.*

На электрической схеме (рис. 12) равные индуктивности L, ёмкость C и сопротивление нагрузки R подключены к источнику напряжения, изменяющемуся по закону $U(t) = U \cos$ щt. Выяснить характер колебаний падения напряжения на нагрузке, ограничиваясь установившимся процессом.

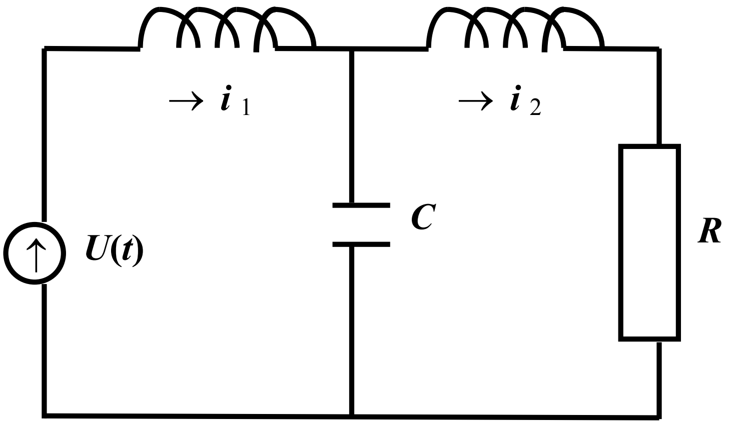


Рис. 12

Решение. Обозначим через i_1, i_2 — токи в левом и правом контурах. Тогда ток через ёмкость равен $i_2 - i_1$. По закону Кирхгофа получим систему дифференциальных уравнений относительно токов i_1, i_2:

$$\begin{cases} L\dfrac{d\,i_1}{d\,t} + L\dfrac{d\,i_2}{d\,t} + Ri_2 = U(t); \\ L\dfrac{d\,i_2}{d\,t} + R\,i_2 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t (i_2 - i_1)dt = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом исключения. Дифференцируем по t любое, например второе, уравнение заданной системы, получим

$$L\frac{d^2 i_2}{d\,t^2} + R\frac{d\,i_2}{d\,t} + \frac{1}{C}(i_2 - i_1) = 0.$$

Откуда

$$i_1 = LC\frac{d^2 i_2}{d\,t^2} + RC\frac{d\,i_2}{d\,t} + i_2.$$

Полученное уравнение ещё раз дифференцируем по t и подставим в первое уравнение системы. В результате получим

$$L^2 C\frac{d^3 i_2}{d\,t^3} + LRC\frac{d^2 i_2}{d\,t^2} + 2L\frac{d\,i_2}{d\,t} + R\,i_2 = U(t)$$

— линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Запишем для него характеристическое уравнение

$$L^2 C\,k^3 + LRC\,k^2 + 2L\,k + R = 0.$$

Все слагаемые в левой части этого уравнения положительны, поэтому оно не имеет действительных корней, его корни — комплексные. Можно доказать, что у мнимых корней этого уравнения действительные части отрицательные.

Таким образом, все слагаемые общего решения однородного уравнения, соответствующего исходному уравнению, содержат экспоненты с отрицательным показателем и поэтому быстро убывают при росте t. Установившийся процесс определяется частным решением исходного неоднородного уравнения.

Поскольку правая часть $U(t) = U\cos\,\omega t$, то частное решение ищем в виде

$$i_2 = i_2^* = A\cos\,\omega t + B\sin\,\omega t.$$

Дифференцируем по t полученное уравнение и подставим в исходное неоднородное уравнение. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A(-2L\omega + L^2C\omega^3) + B(R - LRC\omega^2) = 0; \\ A(R - LRC\omega^2) + B(2L\omega - L^2C\omega^3) = U. \end{cases}$$

Обозначив $б = -2\,L\omega + L^2C\omega^3$, $в = R - LCR\omega^2$, приходим к системе

$$\begin{cases} \alpha\ A + \beta\ e = 0; \\ \beta\ \ A - \alpha\ e = U. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{\beta\,U}{\alpha^2 + \beta^2}; \\ e = \dfrac{-\alpha\,U}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{cases}$$

Найдём амплитуду решения i_2 как $\sqrt{A^2 + B^2}$, т.е.

$$|v| = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|U|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

или

$$|v| = \frac{|U|}{\sqrt{L^2\omega^2(LC\omega^2 - 2)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}.$$

Падение напряжения на нагрузке можно получить из последнего уравнения умножением обеих частей равенства на R, т.к. $U_2 = R\,i_2$.

Выясним влияние частоты колебаний щ на отношение амплитуд напряжения на нагрузке к выходному напряжению.

При малых частотах ω величинами порядка ω^2 и выше можно пренебречь, тогда подкоренное выражение будет равно R^2, следовательно,

$$|v| \approx \frac{|U|}{R} \quad \Rightarrow \quad |v| \cdot \frac{R}{|U|} \approx 1.$$

Эта зависимость показывает, что колебания малой частоты проходят через схему, практически не изменяя амплитуды.

Для больших частот ω главным членом подкоренного выражения будет член со старшей степенью ω. Для таких частот

$$|v| \approx \frac{|U|}{L^2C\omega^3} \quad \Rightarrow \quad |v| \cdot \frac{R}{|U|} \approx \frac{R}{L^2C\omega^3} \approx 0,$$

т.е. колебания высокой частоты практически не проходят через данную схему.

Данная схема пропускает низкие частоты и почти не пропускает высоких частот. Поэтому такую схему называют *фильтром низких частот*.

3.2. Метод интегрируемых комбинаций

Данный метод заключается в том, что путём различных преобразований уравнения исходной системы (1) приводят к простому виду, позволяющему их легко проинтегрировать и получить решение системы. Полученные таким образом уравнения называют *интегрируемыми комбинациями*.

Обычно интегрируемую комбинацию получают с помощью сложения, вычитания, умножения или деления исходных уравнений системы.

Каждая интегрируемая комбинация даёт один первый интеграл. Если найдено n независимых первых интегралов системы (1), то её интегрирование закончено. Если найдено m независимых первых интегралов, где $n > m$, то система (1) сводится к системе с меньшим числом неизвестных функций.

Пример 1. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{x+y}; \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x+y} \end{cases}$$

при начальных условиях: $x\,(0) = 2$, $y\,(0) = 4$.

Решение. Данная система является нормальной системой двух дифференциальных уравнений.

Решим систему методом интегрируемых комбинаций.

1. Найдём общее решение системы. Для этого составим первую интегрируемую комбинацию. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

— дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные x и y: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$; проинтегрируем, получим

$$x = C_1\,y.$$

Составим вторую интегрируемую комбинацию. Сложив оба уравнения системы, получим

$$\frac{dx+dy}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \quad dx + dy = dt \quad \Rightarrow \quad x + y = t + C_2\,.$$

Таким образом, получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x = C_1 y; \\ x + y = t + C_2. \end{cases}$$

Откуда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 \dfrac{t + C_2}{1 + C_1}; \\ y = \dfrac{t + C_2}{1 + C_1}. \end{cases}$$

2. Найдём частное решение системы. Подставим начальные условия в общее решение системы:

$$\begin{cases} 2 = C_1 \dfrac{C_2}{1 + C_1}; \\ 4 = \dfrac{C_2}{1 + C_1}. \end{cases} \qquad \text{Откуда } C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = 6.$$

Частное решение заданной системы примет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{3} + 2; \\ y = \dfrac{2t}{3} + 4. \end{cases}$$

Пример 2. *Разложение вещества.*

Вещество A разлагается на два вещества X и $У$ со скоростью образования каждого из них, пропорциональной количеству неразложившегося вещества. Найти закон изменения количеств x и y веществ X и $У$ в зависимости от времени t, если при $t = 0$ имеем $x = y = 0$, а через час $x = a/8$, $y = 3a/8$, где a — первоначальное количество вещества A.

Решение. В момент времени t количество неразложившегося вещества A равно $a - x - y$. Введём следующие обозначения:

$\dfrac{dx}{dt}$ — скорость образования вещества X;

$\dfrac{dy}{dt}$ — скорость образования вещества $У$.

Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(a - x - y); \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(a - x - y), \end{cases}$$

где k_1, k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Решим систему методом интегрируемых комбинаций.

Разделим обе части второго уравнения системы на соответствующие части первого:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1} \qquad \Rightarrow \quad — = \frac{k_2}{k_1} › + C_1.$$

Поскольку при $t = 0$ имеем $x = y = 0$, то из последнего уравнения находим $C_1 = 0$, а значит

$$y = \frac{k_2}{k_1} x.$$

Полученную функцию подставим в первое уравнение системы:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a - x - \frac{k_2}{k_1} x) = k_1 a - k_1 x - k_2 x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1 a\,.$$

Это уравнение является линейным неоднородным уравнением первого порядка, общее решение которого

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_2 e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_2 e^{-(k_1 + k_2)t}; \\ y = \dfrac{k_2 x}{k_1} + C_1. \end{cases}$$

Используя начальное условие: при $t = 0$ $x = 0$, найдём

$$C_2 = -\frac{k_1 a}{k_1 + k_2}.$$

Таким образом, частное решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1 + k_2)t}); \\ y = \dfrac{k_2 x}{k_1}. \end{cases}$$

Это законы изменения количеств x и y веществ X и $У$ в зависимости от времени t.

Коэффициенты пропорциональности k_1, k_2 найдём из условия, что при $t = 1$ $x = a/8$, $y = 3a/8$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8} = \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1 + k_2)}); \\ 3 = \dfrac{k_2}{k_1}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3k_1 = k_2; \\ \dfrac{1}{8} = \dfrac{k_1}{4k_1}(1 - e^{-4k_1}). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3k_1 = k_2; \\ \dfrac{1}{2} = 1 - e^{-4k_1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k_1 = k_2; \\ \dfrac{1}{2} = e^{-4k_1}. \end{cases} \Rightarrow k_1 = \frac{\ln 2}{4},\ k_2 = \frac{3\ln 2}{4}.$$

Таким образом, искомое решение системы, т.е. закон изменения количеств x и y веществ X и $У$ в зависимости от времени t, принимает вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{4}(1 - 2^{-t}); \\ y = \dfrac{3a}{4}(1 - 2^{-t}). \end{cases}$$

3.3. Метод Эйлера

Метод Эйлера часто называют *видоизменённым методом Эйлера* или *методом собственных чисел и собственных векторов*. Он применяется для решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть дана система n линейных однородных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями, коэффициенты которой постоянные:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \qquad \ldots. \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в виде матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{d\,t} = A \cdot X,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\quad \frac{dX}{d\,t} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{d\,t} \\ \frac{dx_2}{d\,t} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{d\,t} \end{pmatrix}$.

Решение системы найдём в виде: $\begin{cases} x_1 = p_1 e^{\lambda t}; \\ x_2 = p_2 e^{\lambda t}; \\ \quad \dots . \\ x_n = p_n e^{\lambda t}, \end{cases}$

где λ, p_i ($i = 1, 2, ..., n$) — постоянные величины.

Подставив значения x_i ($i = 1, 2, ..., n$) в систему дифференциальных уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно p_i:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) p_1 + a_{12} p_2 + \ldots + a_{1n} p_n = 0; \\ a_{21} p_1 + (a_{22} - \lambda) p_2 + \ldots + a_{2n} p_n = 0; \\ \qquad\qquad \dots . \\ a_{n1} p_1 + a_{n2} p_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) p_n = 0. \end{cases}$$

Так как система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы равен нулю, то получим следующее уравнение n-й степени:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение позволит найти λ. Оно является *характеристическим уравнением* матрицы A и одновременно характеристическим уравнением системы.

Пусть характеристическое уравнение имеет n различных корней λ_i ($i = 1, 2, ..., n$), которые являются *характеристическими числами* матрицы A. Каждому характеристическому числу соответствует свой собственный вектор.

Пусть характеристическому числу λ_k соответствует собственный вектор (p_{1k} ; p_{2k} ; ... ; p_{nk}), где $k = 1, 2, ..., n$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет n решений:

1-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_1$:

$$x_{11} = p_{11} e^{\lambda_1 t}, x_{21} = p_{21} e^{\lambda_1 t}, ..., x_{n1} = p_{n1} e^{\lambda_1 t};$$

2-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_2$:

$$x_{12} = p_{12} e^{\lambda_2 t}, x_{22} = p_{22} e^{\lambda_2 t}, ..., x_{n2} = p_{n2} e^{\lambda_2 t} \quad \text{и т.д.};$$

n-е решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_n$:

$$x_{1n} = p_{1n} e^{\lambda_n t}, x_{2n} = p_{2n} e^{\lambda_n t}, ..., x_{nn} = p_{nn} e^{\lambda_n t}.$$

Таким образом, получили фундаментальную систему решений. Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1x_{11} + C_2x_{12} + \ \dots \ + \ C_nx_{1n}; \\ x_2 = C_1x_{21} + C_2x_{22} + \ \dots \ + \ C_{2n}x_{2n}; \\ \qquad \dots . \\ x_n = C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \ \dots \ + \ C_nx_{nn}. \end{cases}$$

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной однородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Эйлера.

Составим характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 2$ — характеристические числа матрицы.

При $\lambda_1 = -2$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} 2p_1 - 2p_2 = 0; \\ -2p_1 + 2p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 - p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow$$

(1; 1) — собственный вектор.

При $\lambda_2 = 2$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -2p_1 - 2p_2 = 0; \\ -2p_1 - 2p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = -p_2 \Rightarrow$$

(1; – 1) — собственный вектор.

Получаем фундаментальную систему решений:

для $\lambda_1 = -2$: $x_{11} = e^{-2t}$, $x_{21} = e^{-2t}$;

для $\lambda_2 = 2$: $x_{12} = e^{2t}$, $x_{22} = -e^{2t}$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t}; \\ x_2 = C_1e^{-2t} - C_2e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной однородной системой дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Эйлера.

Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$ — характеристические числа матрицы.

При $\lambda_1 = -1$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} 2p_1 - p_2 + p_3 = 0; \\ p_1 + 2p_2 - p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 + p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2 = -3p_1; \\ p_3 = -5p_1. \end{cases} \Rightarrow$$

(1; – 3; – 5) — собственный вектор.

При $\lambda_2 = 1$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -p_2 + p_3 = 0; \\ p_1 - p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 - p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_2 = p_3 \Rightarrow$$

(1; 1; 1) — собственный вектор.

При $\lambda_3 = 2$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -p_1 - p_2 + p_3 = 0; \\ p_1 - p_2 - p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 - 2p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2 = 0; \\ p_3 = p_1. \end{cases} \Rightarrow$$

(1; 0; 1) — собственный вектор.

Получаем фундаментальную систему решений:

для $\lambda_1 = -1$: $x_{11} = e^{-t}$, $x_{21} = -3\,e^{-t}$, $x_{31} = -5\,e^{-t}$;

для $\lambda_2 = 1$: $x_{12} = e^{t}$, $x_{22} = e^{t}$, $x_{32} = e^{t}$;

для $\lambda_3 = 2$: $x_{13} = e^{2t}$, $x_{23} = 0$, $x_{33} = e^{2t}$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{2t}; \\ x_2 = -3C_1e^{-t} + C_2e^{t}; \\ x_3 = -5C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной однородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Эйлера.

Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\lambda - 4)^2 + 9 = 0.$

Его корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$ — комплексные, являются характеристическими числами матрицы. Найдём для них собственные векторы.

При $\lambda_1 = 4 + 3i$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} 3i \cdot p_1 - 3p_2 = 0; \\ 3p_1 + 3i \cdot p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_2 = i\,p_1 \Rightarrow (1; i)$ — собственный вектор.

При $\lambda_2 = 4 - 3i$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -3i \cdot p_1 - 3p_2 = 0; \\ 3p_1 - 3i \cdot p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 = i\,p_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1; -i)$ — собственный вектор.

Получаем фундаментальную систему решений:
для $\lambda_1 = 4 + 3i$: $x_{11} = e^{(4+3i)\,t} = e^{4t}\,(\cos 3t + i \sin 3t)$, $x_{21} = i\, e^{(4+3i)\,t} = e^{4t}\,(-\sin 3t + i \cos 3t)$;
для $\lambda_2 = 4 - 3i$: $x_{12} = e^{(4\text{-}3i)\,t} = e^{4t}\,(\cos 3t - i \sin 3t)$, $x_{22} = i\, e^{(4\text{-}3i)\,t} = e^{4t}\,(-\sin 3t - i \cos 3t)$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = e^{4t}((C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)\, i \sin 3t); \\ x_2 = e^{4t}(-(C_1 + C_2)\sin 3t + (C_1 - C_2)\, i \cos 3t). \end{cases}$$

Введя замену: $C_1 + C_2 = C_1^*$; $(C_1 - C_2)\, i = C_2^*$, получим

$$\begin{cases} x_1 = e^{4t}(C_1^* \cos 3t + C_2^* \sin 3t); \\ x_2 = e^{4t}(-C_1^* \sin 3t + C_2^* - \text{os } 3t). \end{cases}$$

Общее решение для комплексных корней характеристического уравнения можно найти другим способом. В решениях, соответствующих одному из комплексных характеристических чисел, отделим действительную и мнимую части:

$$e^{(4+3i)\,t} = e^{4t}\,(\cos 3t + i \sin 3t) = e^{4t} \cos 3t + i\, e^{4t} \sin 3t;$$
$$i\, e^{(4+3i)\,t} = -\, e^{4t} \sin 3t + i\, e^{4t} \cos 3t.$$

Получим линейно независимые частные решения:

$$x_{11} = e^{4t} \cos 3t;$$
$$x_{21} = -\, e^{4t} \sin 3t;$$
$$x_{12} = e^{4t} \sin 3t;$$
$$x_{22} = e^{4t} \cos 3t.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12}; \\ x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t); \\ x_2 = e^{4t}(-C_1 \sin 3t + C_2 - \text{os } 3t). \end{cases}$$

Заметим, что сопряжённое характеристическое число мы не рассматривали, т.к. решения, соответствующие корню $a - bi$, линейно зависимы с решениями для корня $a + bi$.

3.4. Метод Лагранжа

Метод Лагранжа или *метод вариации произвольных постоянных* применяется для решения линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим суть метода Лагранжа на примере системы трёх неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть дана система трёх линейных неоднородных дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями, коэффициенты которой постоянные:

$$\begin{cases} x' + a_1 x + b_1 y + e_1 z = f_1(t); \\ y' + a_2 x + b_2 y + e_2 z = f_2(t); \\ z' + a_3 x + b_3 y + e_3 z = f_3(t). \end{cases} \qquad (6)$$

Пусть общее решение соответствующей однородной системы найдено и имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3; \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3; \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3. \end{cases} \qquad (7)$$

Будем искать решение неоднородной системы в виде

$$\begin{cases} x = C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2 + C_3(t)x_3; \\ y = C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2 + C_3(t)y_3; \\ z = C_1(t)z_1 + C_2(t)z_2 + C_3(t)z_3, \end{cases} \tag{8}$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ — неизвестные функции, которые нужно найти.

Подставим (8) в (6), тогда первое уравнение системы (6) примет вид:

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 + C_1(x_1' + a_1x_1 + b_1y_1 + e_1z_1) + C_2(x_2' + a_1x_2 + b_1y_2 + e_1z_2) + C_3(x_3' + a_1x_3 + b_1y_3 + e_1z_3) = f_1(t).$$

Все выражения, стоящие в скобках, обратятся в ноль, т.к. (7) — решение соответствующей однородной системы. Тогда получим

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 = f_1(t).$$

Аналогично, после подстановки (8) в (6) второе и третье уравнения системы (6) примут вид:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 = f_2(t),$$
$$C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_3'z_3 = f_3(t).$$

Таким образом, получили систему трёх линейных относительно C_1', C_2', C_3' уравнений. Она имеет решение, т.к. её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3. \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу линейной независимости частных решений соответствующей однородной системы.

Вычислим C_1', C_2', C_3'. Затем, интегрируя эти выражения, найдём $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, а следовательно, и решение (8) неоднородной системы (6).

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Лагранжа.

1. Сначала решим соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем: $x = -\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{d^2y}{dt^2}$. Подставим эти выражения в первое уравнение однородной системы:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Запишем для него характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0.$$

Его корни ($D < 0$) $k_{1,2} = \pm i$ — комплексные сопряжённые числа (п. 2.3; случай 3; $\alpha = 0$, $\beta = 1$). Следовательно, общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$y = e^{0\,t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Так как $x=-\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow x = C_1 \sin t - C_2 \cos t$. Таким образом, общее решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$x = C_1 \sin t - C_2 \cos t;$$
$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

2. Будем искать общее решение неоднородной системы в виде:

$$x = C_1(t) \sin t - C_2(t) \cos t;$$
$$y = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t.$$

Подставим эти выражения и их производные в данную неоднородную систему. После преобразований получим:

$$\begin{cases} C_1' \sin t - C_2' \cos t = 0; \\ C_1' \cos t + C_2' \sin t = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = tg\, t; \\ C_1' = 1. \end{cases}$$

Интегрируя, найдём:

$$\begin{cases} C_2(t) = -\ln(\cos t) + C_2; \\ C_1(t) = t + C_1, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Подставим эти значения в общее решение неоднородной системы, получим:

$$\begin{cases} x = (t + C_1)\sin t + (\ln(\cos t) - C_2)\cos t; \\ y = (t + C_1)\cos t - (\ln(\cos t) - C_2)\sin t. \end{cases}$$

3.5. Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределённых коэффициентов или *метод подбора* применяется для решения линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2) тогда, когда функции $f_i(x)$ ($i = 1, ..., n$), стоящие в правой части системы, имеют специальный вид: многочлены, экспоненциальные функции, синусы, косинусы, а также сумма или произведения этих функций. Исходя из вида правой части находят частное решение неоднородной системы (табл. 2, п. 2.4).

Метод неопределённых коэффициентов основан на следующей теореме:

Общее решение линейной неоднородной системы (2) равно сумме общего решения соответствующей однородной системы и любого частного решения данной неоднородной системы.

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y; \\ \dfrac{dx}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом подбора.

1. Сначала найдём методом Эйлера общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x - 2y = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} - x = 0. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$

Его корни (характеристические числа матрицы) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 2$ — простые действительные числа.

Общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x^0 = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}; \\ y^0 = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

2. Найдём частное решение неоднородной системы в виде (поскольку $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = -5 \sin t$):

$$x^* = A \cos t + B \sin t;$$
$$y^* = C \cos t + D \sin t.$$

Подставим эти выражения и их производные в данную неоднородную систему:

$$-A \sin t + B \cos t = A \cos t + B \sin t + 2(C \cos t + D \sin t);$$
$$-C \sin t + D \cos t = A \cos t + B \sin t - 5 \sin t.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ в обеих частях равенств, получим:

$$\begin{cases} -A = B + 2D; \\ B = A + 2C; \\ -C = B - 5; \\ D = A. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1; \\ B = 3; \\ C = 2; \\ D = -1. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородной системы имеет вид:

$$x^* = -\cos t + 3 \sin t;$$
$$y^* = 2 \cos t - \sin t.$$

3. Получим общее решение исходной неоднородной системы как сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения данной неоднородной системы :

$$\begin{cases} x = x^0 + x^* = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3 \sin t; \\ y = y^0 + y^* = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2 \cos t - \sin t. \end{cases}$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y - t^2. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим её методом Лагранжа.

1. Сначала решим методом Эйлера соответствующую однородную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$

Его корни $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ — характеристические числа матрицы.

При $\lambda_1 = 1$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид

$$\begin{cases} -p_1 + p_2 = 0; \\ -2p_1 + 2p_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow p_1 - p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow (1;\ 1)$ — собственный вектор.

При $\lambda_2 = 2$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид:

$$\begin{cases} -2p_1 + p_2 = 0; \\ -2p_1 + p_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow p_2 = 2p_1 \Rightarrow (1;\ 2)$ — собственный вектор.

Получаем фундаментальную систему решений:

для $\lambda_1 = 1$: $x_{11} = e^t$, $x_{21} = e^t$;

для $\lambda_2 = 2$: $x_{12} = e^{2t}$, $x_{22} = 2e^{2t}$.

Общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x^0 = C_1e^t + C_2e^{2t}; \\ y^0 = C_1e^t + 2C_2e^{2t}. \end{cases}$$

2. Найдём частное решение неоднородной системы в виде (поскольку $f_1(t) = t, f_2(t) = -t^2$):

$$x^* = A\,t^2 + B\,t + C;$$
$$y^* = D\,t^2 + E\,t + F.$$

Подставим эти выражения и их производные в данную неоднородную систему:

$$2A\,t + B = D\,t^2 + E\,t + F + t;$$
$$2D\,t + E = -2(A\,t^2 + B\,t + C) + 3\,(D\,t^2 + E\,t + F) - t^2.$$

$\Rightarrow$

$$2A\,t + B = D\,t^2 + (E+1)\,t + F;$$
$$2D\,t + E = (-2A + 3D - 1)t^2 + (-2B + 3\,E)\,t - 2C + 3F.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного t в обеих частях равенств, получим:

$$\begin{cases} 0 = D; \\ 2A = E + 1; \\ B = F; \\ 0 = -2A + 3D - 1; \\ 2D = -2B + 3E; \\ E = -2C + 3F. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2; \\ B = F = -3; \\ C = -7/2; \\ D = 0; \\ E = -2. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x^* = -\dfrac{1}{2}t^2 - 3t - \dfrac{7}{2}; \\ y^* = -2t - 3. \end{cases}$$

3. Получим общее решение исходной неоднородной системы как сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения данной неоднородной системы :

$$\begin{cases} x = x^0 + x^* = C_1e^t + C_2e^{2t} - \dfrac{1}{2}t^2 - 3t - \dfrac{7}{2}; \\ y = y^0 + y^* = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - 2t - 3. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

Решить системы дифференциальных уравнений (1—15):

1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x + 4y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x + y \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

Решить задачу Коши для следующих систем дифференциальных уравнений (16—18):

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y, \ \mathrm{x}(0) = 2, \ \mathrm{y}(0) = -1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = y + z; \\ y' = x + z; \quad x\,(0) = 1;\ y\,(0) = -1;\ z\,(0) = 0. \\ z' = x + y, \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t, \ \mathrm{x}(0) = 3, \ \mathrm{y}(0) = 1. \end{cases}$

Глава 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящее время разработано большое количество методов решения дифференциальных уравнений через элементарные функции, однако на практике эти методы бывают или совсем невозможны, или слишком громоздки. Поэтому для решения практических задач созданы методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Условно эти методы делят на три группы в зависимости от формы представления решения:

— *аналитические методы*, дающие приближенное решение в виде аналитического выражения;

— *графические методы*, дающие приближенное решение в виде графика;

— *численные методы*, дающие приближенное решение в виде таблицы.

Ниже рассматриваются следующие методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: интегрирование дифференциальных уравнений с помощью формулы Тейлора, метод последовательных приближений (метод Пикара), метод Эйлера и его модификации, метод Рунге-Кутта.

4.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения точными методами невозможно, его решение ищут в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x - x_0)^n .$$

Неопределённые коэффициенты C_n находят подстановкой ряда в исходное уравнение, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях разности $x - x_0$ в обеих частях полученного равенства. Если удаётся найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей своей области сходимости.

Рассмотрим подробнее суть метода на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть задано обыкновенное, разрешённое относительно производной, дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Пусть правая часть уравнения (1) является в точке (x_0, y_0) аналитической функцией, то есть может быть разложена в степенной ряд в некоторой окрестности этой точки. Тогда существует единственное решение $y = y(x)$ заданного уравнения (1) с начальным условием (2). Это решение также будет являться аналитическим в точке x_0 и может быть представлено в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k , \tag{3}$$

где $|x - x_0| < h$, h — некоторое положительное число; k — целое неотрицательное число.

Значения производных $y^{(k)}(x_0)$ в разложении (3) находят следующим образом: последовательно дифференцируют по x уравнение (1) $y' = f(x, y)$

$$y'' = f'_x + f'_y \cdot y' , \tag{4}$$

$$y''' = f''_{xx} + 2f''_{xy} \cdot y' + f''_{yy} \cdot y'^2 + f'_y \cdot y'',$$

....

подставляют начальное условие (2) в формулы (4):

$$y'(x_0),\ y''(x_0),\ y'''(x_0),\ \ldots$$

На практике ряд (3) обрывают на каком-либо члене и ищут приближённое решение в виде многочлена некоторой степени.

Аналогично с помощью ряда Тейлора можно интегрировать и дифференциальные уравнения высших порядков.

Пример.

1. Найти приближённое решение дифференциального уравнения $y' = x - 2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, в виде многочлена пятой степени.

2. Найти численное решение (в виде таблицы) данного дифференциального уравнения на [0, 1] с шагом $h = 0{,}1$, округляя результат до 0,001.

3. Найти точное решение и сравнить его с приближённым.

Решение.

1. Будем искать приближённое решение данного дифференциального уравнения в виде (3):

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Так как $y_0 = 0$, тогда:

$$y_0' = 0;$$
$$y_0'' = 1 + (-2)y' \,\big|_{x=0} = 1;$$
$$y_0''' = -2y'' \,\big|_{x=0} = -2;$$
$$y_0^{IV} = -2y''' \,\big|_{x=0} = 4;$$
$$y_0^{V} = -2y^{IV} \,\big|_{x=0} = -8.$$

Подставив найденные значения производных в уравнение (3), получим требуемое приближённое решение в виде многочлена пятой степени:

$$y = \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{15}. \qquad (5)$$

2. Найдём приближённое решение данного дифференциального уравнения в виде таблицы.

Подставив в решение (5) значения аргумента x из промежутка [0, 1] с шагом $h = 0{,}1$, получим численное решение данного уравнения на указанном промежутке. Запишем его, округляя результат до 0,001, в виде табл. 3.

Таблица 3

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	0	0	0,018	0,037	0,062	0,092	0,124	0,159	0,196	0,232	0,267

3. Найдём точное решение и сравним его с приближённым. Данное уравнение $y' = x - 2y$, или $y' + 2y - x = 0$, является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим его методом Бернулли.

Пусть $y = u\,v$, тогда имеем $u'v + uv' + 2uv - x = 0$. Сгруппируем члены, содержащие u в первой степени, получим

$$u(v' + 2v) + u'v - x = 0.$$

Полагаем $v' + 2v = 0$,

откуда $\dfrac{dv}{v} = -2dx$.

Интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int dx,$$

откуда находим $\ln v = -2x \Rightarrow$

$$v(x) = e^{-2x}$$

(постоянную интегрирования не вводим, так как достаточно найти какое-либо частное решение этого вспомогательного уравнения).

Для нахождения *u* имеем уравнение $u'e^{-2x} = x$, или $u' = x \cdot e^{2x}$. Разделяем переменные:

$$du = x \cdot e^{2x} dx,$$

интегрируем по частям:

$$\int du = \int x \cdot e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} \int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1; \\ u_1 = x; \quad dv_1 = e^{2x} dx; \\ du_1 = dx; \quad v_1 = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} e^{2x} x - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Таким образом находим функцию *u*(*x*):

$$u = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Подставив найденные значения функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ в уравнение $y = u\,v$, получим общее решение данного уравнения:

$$y = u\,v = \left(\frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C\right) \cdot e^{-2x} = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + e^{-2x} C.$$

Используя начальное условие $y(0) = 0$, получаем $0 = -\dfrac{1}{4} + C$, откуда $C = \dfrac{1}{4}$.

Следовательно, искомое частное (точное) решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2x}. \qquad (6)$$

Сравнение приближённого решения (5) данного дифференциального уравнения с точным (6) на промежутке [0, 1] проведём с помощью компьютера. Для этих целей используем математическую систему MathCAD фирмы-разработчика MathSoft. Результаты сравнения представлены на рис. 13.

Сравнение приближённого и точного решений дифференциального уравнения y ' =x -2y на [0,1] в системе MathCad

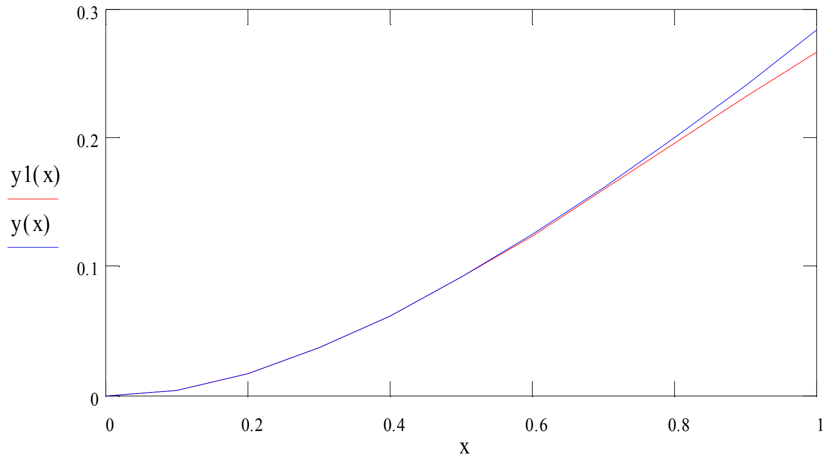
$$y1(x) := \left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^4}{6}\right) - \left(\frac{x^5}{15}\right)$$ - приближённое решение диф. уравнения в виде многочлена пятой степени;

$$y(x) := \left(\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + e^{-2\cdot x}\cdot\frac{1}{4}$$ - точное решение диф. уравнения;

$x := 0, 0.1 .. 1$ - задание промежутка изменения аргумента;

x	y1(x)	y(x)	y1(x) − y(x)
0	0	0	0
0.1	$4.683\cdot10^{-3}$	$4.683\cdot10^{-3}$	$-2.16\cdot10^{-8}$
0.2	0.018	0.018	$-1.345\cdot10^{-6}$
0.3	0.037	0.037	$-1.491\cdot10^{-5}$
0.4	0.062	0.062	$-8.157\cdot10^{-5}$
0.5	0.092	0.092	$-3.032\cdot10^{-4}$
0.6	0.124	0.125	$-8.826\cdot10^{-4}$
0.7	0.159	0.162	$-2.171\cdot10^{-3}$
0.8	0.196	0.2	$-4.719\cdot10^{-3}$
0.9	0.232	0.241	$-9.341\cdot10^{-3}$
1	0.267	0.284	−0.017

- табличное представление приближённого y1(x) и точного y(x) решений данного уравнения на отрезке [0,1] с шагом 0.1



- графики приближённого y1(x) и точного y(x) решений уравнения

Рис. 13

4.2. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений (или *метод Пикара*) является аналитическим, т. е. позволяет получить приближённое решение задачи Коши, определяемой дифференциальным уравнением (1) с начальным условием (2), в виде формулы. Возник метод в связи с доказательством теоремы существования и единственности решения задачи Коши (гл. 1).

Пусть в условиях данной теоремы требуется найти решение уравнения (1) с начальным условием (2). Проинтегрируем обе части уравнения (1) от x_0 до x:

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx, \text{ откуда}$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx. \tag{7}$$

Очевидно, что решение интегрального уравнения (7) будет удовлетворять уравнению (1) и начальному условию (2). Действительно, при $x = x_0$ получим

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x,y)dx = y_0.$$

Применим к интегральному уравнению (7) метод последовательных приближений. Заменим в равенстве (7) неизвестную функцию y данным значением y_0, получим первое приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx.$$

Заметим, что интеграл в правой части содержит только одну переменную x, поэтому аналитическое выражение первого приближения $y_1(x)$ будет являться функцией, зависящей от x. Заменим теперь в равенстве (7) неизвестную функцию y найденным значением $y_1(x)$, получим второе приближение

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx$$

и т. д. В общем случае итерационная формула имеет вид

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Применив неоднократно формулу (8), получим последовательность функций

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x), \ldots . \tag{9}$$

Можно доказать [1, 2, 3], что эта последовательность сходится и

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x),$$

т.е. предел последовательности является решением интегрального уравнения (7), а следовательно, и дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2). Это означает, что k-й член последовательности (9) является приближением к точному решению уравнения (1) с определённой степенью точности.

Погрешность k-го приближения можно оценить формулой

$$|\, y(x) - y_k(x) \,| \le L^k \cdot M \cdot \frac{d^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{10}$$

где L — постоянная Липшица; M — верхняя грань модуля функции f, т.е. $|f(x,y)| \le M$;

величина d для определения окрестности $|x - x_0| \le d$ вычисляется по формуле $d = \min(a, \frac{b}{M})$, числа a и b — из неравенства Липшица (гл. 1).

Пример 1. Найти три последовательных приближения решения дифференциального уравнения $y' = x + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. В качестве начального приближения возьмём

$$y_0 = y(0) = 1,$$

тогда:

первое приближение $y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx = 1 + \int\limits_0^x (x+1)dx$,

второе приближение $y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx = 1 + \int\limits_0^x (x + (y_1(x))^2)dx$,

третье приближение $y_3(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_2)dx = 1 + \int\limits_0^x (x + (y_2(x))^2)dx$.

Вычисления интегралов и построение графиков полученных функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ проведём в системе MathCAD. Результаты решения представлены на рис. 14.

Оценим погрешность третьего приближения.

Для определения области G, заданной неравенствами (6), примем $a = 1$, $b = 2$. Получим

$$G: -1 \le x \le 1, \; -1 \le y \le 3.$$

В прямоугольнике G функция

$$f(x, y) = x + y^2$$

определена и непрерывна, причём: $f'_y = 2y$,

$$L = \max\left| f'_y(x, y) \right| = \max_{-1 \le y \le 3} \left| 2y \right| = 6,$$

$$M = \max\left| f(x, y) \right| = \max_{\substack{-1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 3}} \left| x + y^2 \right| = 10,$$

$$d = \min(a, \frac{b}{M}) = \frac{1}{5}.$$

По формуле (10) получим

$$\left| y(x) - y_3(x) \right| \le 6^3 \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} \approx 0{,}144.$$

Пример решения дифференциального уравнения y ' =x +y^2,
y(0) = 1 методом Пикара в системе MathCad

$$y1(x) := 1 + \int_0^x (1+t)\,dt \to 1 + x + \frac{1}{2}\cdot x^2$$ - первое приближение;

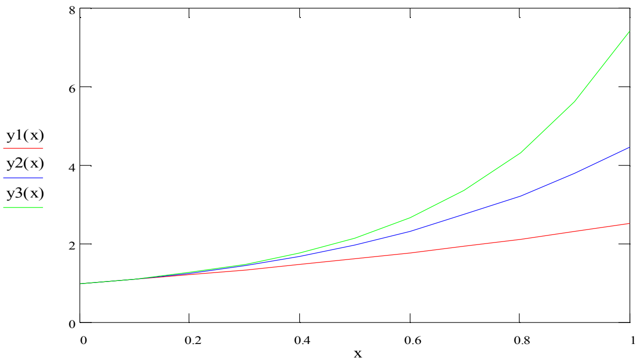
$$y2(x) := 1 + \int_0^x t + \left[1 + t + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot t^2\right]^2 dt \to 1 + \frac{3}{2}\cdot x^2 + \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{20}\cdot x^5 + x + \frac{1}{4}\cdot x^4$$

- второе приближение;

$$y3(x) := 1 + \int_0^x t + \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)\cdot t^2 + \left(\frac{1}{20}\right)\cdot t^5 + \left(\frac{1}{4}\right)\cdot t^4 + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot t^3 + t\right]^2 dt$$ - третье приближение;

$$1 + x + \frac{13}{30}\cdot x^6 + \frac{3}{2}\cdot x^2 + \frac{233}{1260}\cdot x^7 + \frac{1}{400}\cdot x^{10} + \frac{31}{2160}\cdot x^9 + \frac{1}{4400}\cdot x^{11} + \frac{13}{12}\cdot x^4 + \frac{49}{60}\cdot x^5 + \blacksquare$$
$$\blacksquare + \frac{29}{480}\cdot x^8 + \frac{4}{3}\cdot x^3$$

$x := 0, 0.1 .. 1$ - задание промежутка изменения аргумента;



- графики полученных приближений

Рис. 14

Заметим, что в программе MathCAD для вычисления интегралов с переменным верхним пределом интегрирования, необходимо выполнить следующие действия:

1) записать интеграл и выделить его в рамку;

2) выбрать команду Evaluate (Вычислить) из меню опции Simbolic (Символика) главного меню.

Существует и другой способ вычисления несобственных интегралов в программе MathCAD, по которому следует:

1) записать интеграл и выделить его в рамку;

2) выбрать команду Simplify (Упростить) из меню опции Simbolic (Символика) главного меню.

Пример 2. Найти пять последовательных приближений решения дифференциального уравнения

$$y' = x - 2y,$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$.

Сравнить полученные приближения с точным решением.

Решение. В качестве начального приближения возьмём

$$y_0 = y(0) = 0.$$

Решение данного уравнения, проведённое в системе MathCAD, показано на рис. 15.

Пример решения дифференциального уравнения y ' =x -2y, y(0)=0 методом Пикара в системе MathCad

$$y1(x) := \int_0^x t\,dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2$$ - первое приближение;

$$y2(x) := \int_0^x \left(t - t^2\right) dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{3}\cdot x^3$$ - второе приближение;

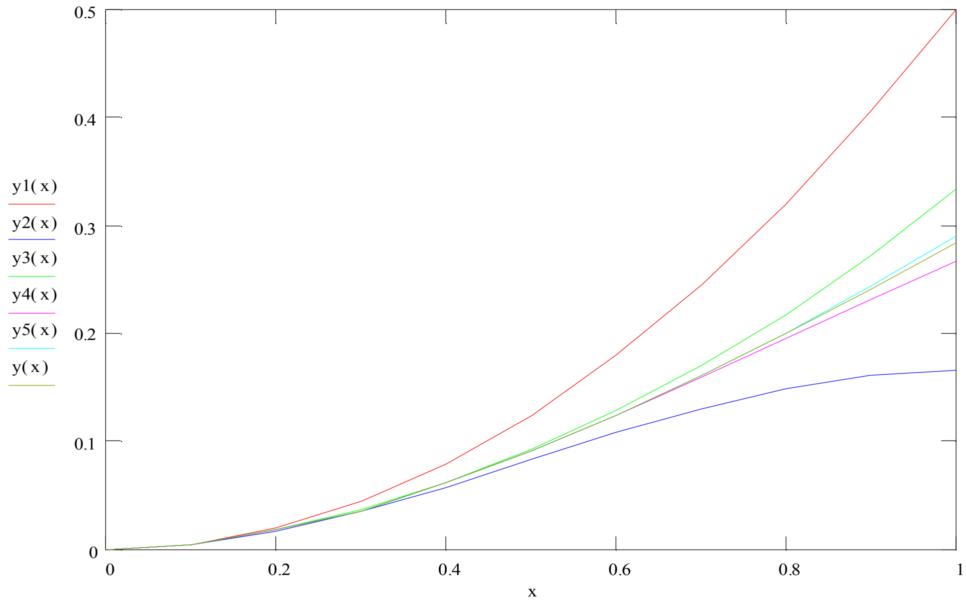
$$y3(x) := \int_0^x \left[t - t^2 + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot t^3\right] dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{6}\cdot x^4$$ - третье приближение;

$$y4(x) := \int_0^x \left[t - t^2 + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot t^3 - \left(\frac{1}{3}\right)\cdot t^4\right] dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{15}\cdot x^5 + \frac{1}{6}\cdot x^4$$ - четвёртое приближение;

$$y5(x) := \int_0^x \left[t - t^2 + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot t^3 - \left(\frac{1}{3}\right)\cdot t^4 + \left(2\cdot\frac{t^5}{15}\right)\right] dt \rightarrow \frac{1}{45}\cdot x^6 + \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{6}\cdot x^4 - \frac{1}{15}\cdot x^5$$ - пятое приближение;

$$y(x) := \left(\frac{1}{2}\right)\cdot x - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\cdot e^{-2\cdot x}$$ - точное решение;

$x := 0, 0.1 .. 1$ - задание промежутка изменения аргумента;



- графики полученных приближений

Рис. 15

4.3. Метод Эйлера

Метод Эйлера относится одновременно к численным и к графическим методам решения дифференциальных уравнений.

Суть метода заключается в том, что искомую интегральную кривую $y = y(x)$ заменяют ломаной $M_0M_1M_2$ ..., звенья которой являются касательными к интегральным кривым (рис. 16).

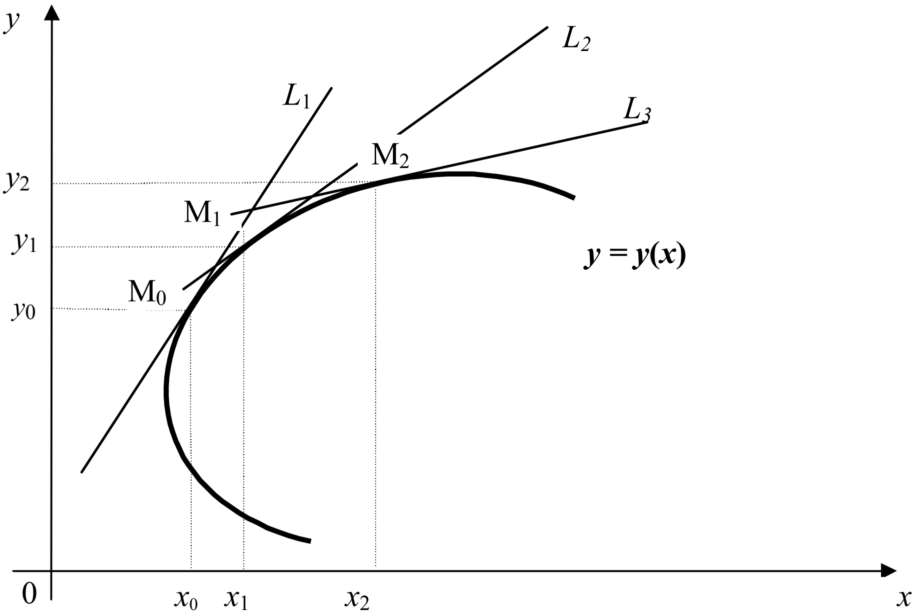


Рис. 16

Пусть требуется решить задачу Коши, т.е. найти решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2) в виде функции $y = y\ (x)$. Выбрав шаг h, построим, начиная с точки x_0, систему равноотстоящих точек:

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 0, 1, 2, ...).$$

Вместо искомой интегральной кривой $y = y\ (x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ рассмотрим отрезок касательной L_1 к ней в точке $M_0\ (x_0, y_0)$. Уравнение касательной L_1, в силу (1), имеет вид

$$y = y_0 + f\,(x_0, y_0)\ (x - x_0).$$

При $x = x_1$ из уравнения касательной L_1 получим

$$y_1 = y_0 + hf\,(x_0, y_0),$$

откуда видим, что приращение функции на первом шаге имеет вид

$$\Delta y_0 = hf\,(x_0, y_0).$$

Аналогично, проводя касательную L_2 к некоторой интегральной кривой семейства в точке $M_1(x_1, y_1)$, получим

$$y = y_1 + f\,(x_1, y_1)\ (x - x_1).$$

При $x = x_2$ имеем $y_2 = y_1 + hf\,(x_1, y_1)$, т.е. y_2 получается из y_1 добавлением приращения

$$\Delta y_1 = hf\,(x_1, y_1).$$

Таким образом, значения искомой функции $y(x)$ могут быть определены по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad \Delta y_i = hf\,(x_i, y_i), \tag{11}$$

где $i = 0,1,2,$ ... , которые называются *вычислительными формулами метода Эйлера*.

При этом искомую интегральную кривую $y = y\ (x)$, проходящую через точку $M_0\ (x_0, y_0)$, приближённо заменяем так называемой *ломаной Эйлера* $M_0M_1M_2$ ..., звенья которой M_iM_{i+1} прямолинейны между прямыми $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ и имеют подъём

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=f(x_i,y_i)\,.$$

Метод Эйлера является простейшим численным методом, удобным в применении, однако он имеет ряд существенных недостатков. Основной из них — малая точность. Она равна порядку h^2, причём с каждым шагом погрешность возрастает, т.е. происходит систематическое накопление ошибок. Поэтому на практике часто используют способ двойного счёта — с шагом h и с шагом $h/2$. Совпадение десятичных знаков в полученных двумя способами результатах даёт естественные основания считать их верными.

Пример.

1. Найти методом Эйлера численное решение дифференциального уравнения $y' = x^3 + y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, на отрезке [0, 1] с шагом $h = 0{,}1$.

2. Найти точное решение уравнения $y' = x^3 + y$ и сравнить его с приближённым на отрезке [0, 1].

Решение.

1. Для данного уравнения вычислительные формулы (11) имеют вид:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad \Delta y_i = 0{,}1\,(x_i^3 + y_i),$$

где $i = 0,1,2, ..., 10$.

Учитывая, что погрешность метода имеет порядок $h^2 = 0{,}01$, достаточно в промежуточных результатах брать три цифры после запятой, а во всех y_i сохранять только две цифры.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы.

Таблица

i	x_i	y_i	$\Delta y_i = hf(x_i, y_i) = 0{,}1(x_i^3 + y_i)$
0	0	1	0,1
1	0,1	1,1	0,110
2	0,2	1,21	0,122
3	0,3	1,33	0,136
4	0,4	1,47	1,634
5	0,5	1,62	0,175
6	0,6	1,79	0,201
7	0,7	1,99	0,233
8	0,8	2,22	0,273
9	0,9	2,49	0,322
10	1	2,82	—

2. Данное уравнение $y' = x^3 + y$ является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим его методом Бернулли.

Полагая $y = u\,v$, имеем

$$u'v + uv' - uv - x^3 = 0.$$

Сгруппируем члены, содержащие u в первой степени, получим

$$u(v' - v) + u'v - x^3 = 0.$$

Полагаем $v' - v = 0$, откуда $\frac{dv}{v} = dx$. Интегрируя, находим $\ln v = x$, или $v = e^x$ (постоянную интегрирования не вводим, так как достаточно найти какое-либо частное решение этого вспомогательного уравнения).

Для нахождения u имеем уравнение

$$u'e^x = x^3,$$

или

$$u' = x^3 \cdot e^{-x}.$$

Разделим переменные, получим $du = x^3 \cdot e^{-x} dx$, откуда

$$\int du = \int x^3 \cdot e^{-x} dx.$$

Интегрируем по частям три раза:

$$u = -e^{-x} \cdot x^3 + 3\int e^{-x} \cdot x^2 dx = e^{-x} \cdot x^3 + 3 \cdot (e^{-x} \cdot x^2 + 2\int e^{-x} \cdot x dx) = -e^{-x} \cdot x^3 - 3x^2 \cdot e^{-x} + 6 \cdot (-e^{-x} \cdot x + \int e^{-x} dx) =$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения

$$y = u\,v = (-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C) \cdot e^x,$$

или $y = Ce^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 6$.

Используя начальное условие y (0) = 1, получим 1 = - 6 + C, откуда C = 7. Следовательно, искомое частное (точное) решение имеет вид

$$y = 7e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 6.$$

Вычислим значения полученного точного решения на отрезке [0, 1] с шагом h = 0,1. Результаты округлим до 0,01 и запишем в таблицу.

Таблица

i	x_i	**Приближённые значения y_i**	**Точные значения $y(x_i)$**
0	0	1	1
1	0,1	1,1	1,11
2	0,2	1,21	1,22
3	0,3	1,33	1,35
4	0,4	1,47	1,5
5	0,5	1,62	1,67
6	0,6	1,79	1,86
7	0,7	1,99	2,08
8	0,8	2,22	2,35
9	0,9	2,49	2,66
10	1	2,82	3,03

Сравнение приближённого (численного) решения данного дифференциального уравнения с точным на промежутке [0, 1] проведём с помощью системы MathCAD.

Результаты сравнения, а также численное решение данного уравнения, проведённое методом Эйлера в системе MathCAD, представлены на рис. 17.

Пример решения дифференциального уравнения y ' = y + x^3, y(0)=1 методом Эйлера в системе MathCad

$f(x,y) := y + x^3$ - задание правой части уравнения;

$x := 0, 0.1 .. 1$ - задание промежутка изменения аргумента;

$i := 0 .. 9$ - задание цикла; $h := 0.1$ - задание шага;

$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ - задание начальных условий в векторном виде;

$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \end{bmatrix}$ - задание вычислительных формул;

$y1(x) := 7 \cdot e^x - x^3 - 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 6$ - точное решение;

Результаты вычислений:

	$x =$	$y =$	$y1(x_i)$	$y_i - y1(x_i)$
0	0	1	1	0
1	0.1	1.1	1.105	$-5.196 \cdot 10^{-3}$
2	0.2	1.21	1.222	-0.012
3	0.3	1.332	1.352	-0.02
4	0.4	1.468	1.499	-0.031
5	0.5	1.621	1.666	-0.045
6	0.6	1.796	1.859	-0.063
7	0.7	1.997	2.083	-0.087
8	0.8	2.231	2.347	-0.116
9	0.9	2.505	2.658	-0.153
10	1	2.828		

- значения приближённого *y* и точного *y*1(*x*) решений на [0,1] с шагом *h* = 0.1;

Графики точного и приближённого решений на [0,1]:

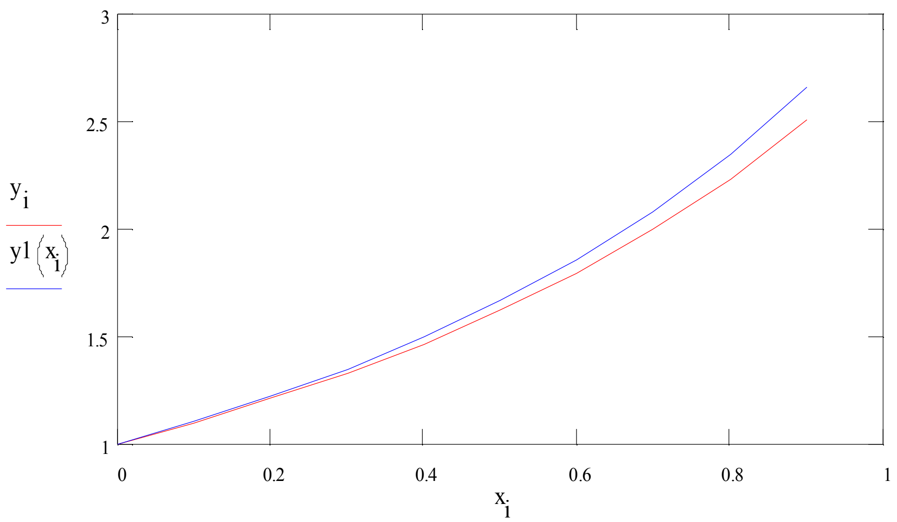


Рис. 17

4.4. Модификации метода Эйлера

Существуют различные уточнения метода Эйлера, повышающие его точность. Цель модификаций — более точно определить направление перехода из точки (x_i, y_i) в точку (x_{i+1}, y_{i+1}). Так, *метод Эйлера-Коши* предлагает вычислять значения искомой функции $y(x)$ по формулам:

$$y^*_{i+1} = y_i + \text{Д}y_i, \quad \text{Д}y_i = hf(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})}{2}, \qquad i = 0,1,2, \dots .$$

Геометрически это означает, что мы определяем направление интегральной кривой в исходной точке (x_i, y_i) и во вспомогательной точке (x_{i+1}, y^*_{i+1}). В качестве окончательного берём среднее этих направлений.

Другой модификацией метода Эйлера является *усовершенствованный метод ломаных*, при котором сначала вычисляют промежуточные значения:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

и находят значение направления поля интегральных кривых в средней точке ($x_{i+\frac{1}{2}}$, $y_{i+\frac{1}{2}}$), т.е.

$f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$, а затем полагают

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+\frac{1}{2}} .$$

Метод Эйлера и его модификации являются простейшими представителями *конечно-разностных* методов (*шаговых* методов) для приближённого решения задачи Коши.

Поскольку описанные методы предполагают повторяющиеся вычисления на каждом шаге, то они легко программируются и могут быть реализованы на компьютере.

На рис. 18 и 19 показаны решения дифференциального уравнения $y' = x^3 + y$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$, полученные модифицированными методами Эйлера (методом Эйлера-Коши и усовершенствованным методом ломаных) с помощью системы MathCAD.

Пример решения дифференциального уравнения y ' = y + x^3, y(0)=1 методом Эйлера-Коши в системе MathCad

$f(x,y) := y + x^3$ - задание правой части уравнения;

$x := 0, 0.1 .. 1$ - задание промежутка изменения аргумента;

$i := 0 .. 9$ - задание цикла; $h := 0.1$ - задание шага;

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ - задание начальных условий в векторном виде;

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_i + h \\ y_i + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i)) \right) \end{bmatrix}$$ - вычислительные формулы;

Результаты вычислений:

x =

	0
0	0
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

y =

	0
0	1
1	1.10505
2	1.22154
3	1.35159
4	1.49819
5	1.66527
6	1.8578
7	2.08189
8	2.34496
9	2.65579
10	3.02474

- численное решение $y = y(x)$ на [0,1] с шагом $h = 0.1$;

График полученного решения

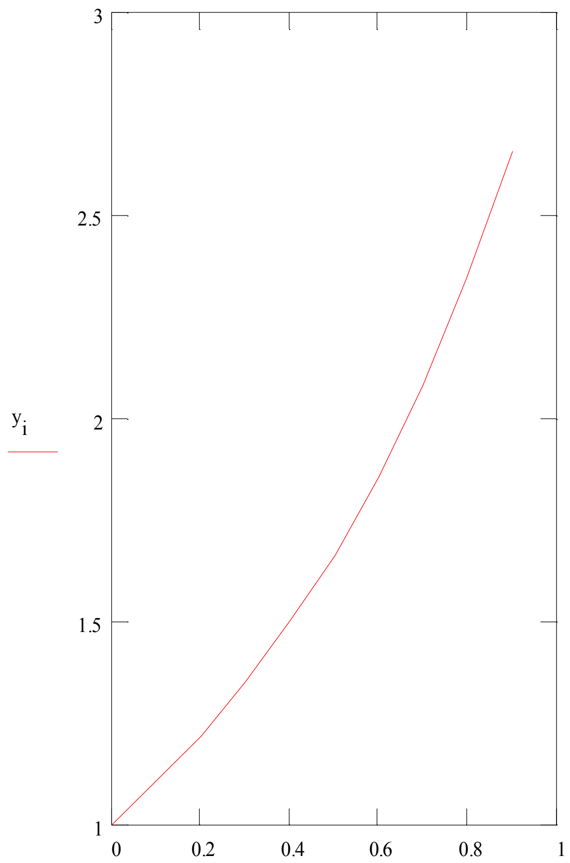


Рис. 18

Пример решения дифференциального уравнения y ' = y + x^3, y(0)=1 методом ломаных в системе MathCad

$f(x,y) := y + x^3$ - задание правой части уравнения;

$x := 0, 0.1 .. 1$ - задание промежутка изменения аргумента;

$i := 0 .. 9$ - задание цикла; $h := 0.1$ - задание шага;

$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ - задание начальных условий в векторном виде;

$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)\right) \end{bmatrix}$ - задание вычислительных формул;

Результаты вычислений:

$x =$

	0
0	0
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

$y =$

	0
0	1
1	1.10501
2	1.22138
3	1.35123
4	1.49753
5	1.6642
6	1.85621
7	2.07965
8	2.34192
9	2.65179
10	3.01961

- численное решение $y = y(x)$ на [0,1] с шагом $h = 0.1$;

График полученного решения

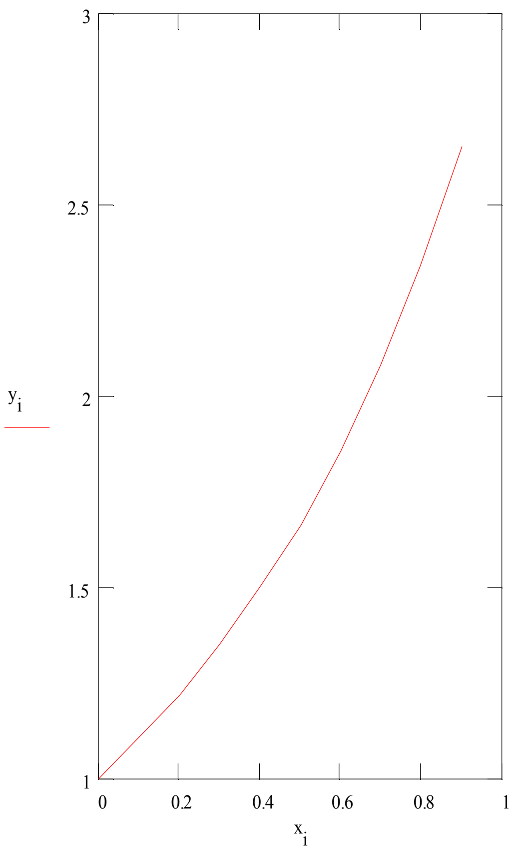


Рис. 19

4.5. Метод Рунге-Кутта

Рассмотренный выше метод Эйлера относится к семейству методов Рунге-Кутта и является их простейшим частным случаем (методом первого порядка точности). Наиболее известным из методов Рунге-Кутта является классический четырёхэтапный метод четвёртого порядка точности. Его расчётные формулы для решения задачи Коши, определённой уравнениями (1) и (2), имеют вид:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i; \quad \Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right), \tag{12}$$

где $k_1^{(i)} = h\,f(x_i, y_i)$;

$$k_2^{(i)} = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_3^{(i)} = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_4^{(i)} = h\,f\left(x_i + h,\ y_i + k_3^{(i)}\right), \quad i = 0,1,2,\ldots .$$

Погрешность метода на каждом шаге является величиной порядка h^5.

Геометрический смысл использования метода Рунге-Кутта с вычислительными формулами (12) состоит в следующем (рис. 20).

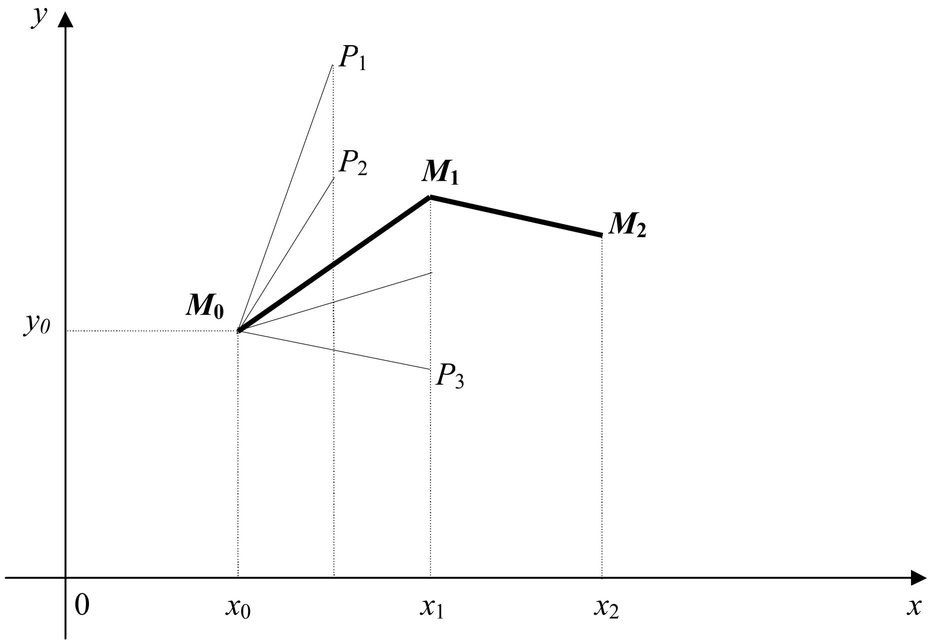


Рис. 20

Из начальной точки $M_0\,(x_0, y_0)$ сдвигаются в направлении, определяемом углом α_1, для которого $\operatorname{tg}\alpha_1 = f(x_0, y_0)$. Идут в этом направлении на полшага, т.е. до вертикальной прямой $x = x_0 + \dfrac{h}{2}$. На этом направлении выбирается точка P_1 с координатами

$$\left(x_0 + \frac{h}{2};\, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right)$$

Затем из точки $M_0\,(x_0,\,y_0)$ сдвигаются в направлении, определяемом углом α_2, для которого $\operatorname{tg}\alpha_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right)$, и на этом направлении выбирается точка P_2 с координатами

$$\left(x_0 + \frac{h}{2};\, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right).$$

Далее из точки $M_0\,(x_0,\,y_0)$ сдвигаются в направлении, определяемом углом α_3, для которого $\operatorname{tg}\alpha_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2};\, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right)$. На этом направлении выбирается точка P_3 с координатами

$(x_0 + h,\ y_0 + k_3^{(0)})$. Этим задаётся ещё одно направление, определяемое углом α_4, для которого $\operatorname{tg}\alpha_4 = = f\,(x_0 + h,\, y_0 + k_3^{(0)})$. Четыре полученных направления усредняются в соответствии с формулой

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}\right).$$

На этом окончательном направлении и выбирается очередная точка M_1 с координатами $(x_1,\, y_1) = (x_0 + h,\, y_0 + \Delta y_0)$.

Теперь, уже исходя из точки M_1, все построения с помощью усреднений направлений повторяют сначала. Идут в новом усреднённом направлении до вертикальной прямой $x = x_2$, получают точку $M_2\,(x_2,\, y_2)$ и т.д.

Эффективная оценка метода Рунге-Кутта затруднительна [2, 4]. Поэтому для определения правильности выбора шага h на практике обычно на каждом этапе из двух шагов применяют двойной пересчёт, а именно: исходя из текущего верного значения $y(x_i)$ вычисляют величину $y(x_i + 2h)$ двумя способами: один раз с шагом h, другой раз — с двойным шагом $2h$.

Если расхождение полученных значений не превышает допустимой погрешности, то шаг h для данного этапа выбран правильно и полученное с его помощью значение можно принять за $y\,(x_i + 2h)$. В противном случае шаг уменьшают в два раза.

На практике при вычислениях по формулам (15) обычно пользуются схемой, приведённой в таблице.

Таблица

i	**x**	**Y**	**k = h f (x, y)**	**Δy**
0	x_0 $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + h$	y_0 $y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$ $y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$ $y_0 + k_3^{(0)}$	$k_1^{(0)}$ $k_2^{(0)}$ $k_3^{(0)}$ $k_4^{(0)}$	$k_1^{(0)}$ $2k_2^{(0)}$ $2k_3^{(0)}$ $k_4^{(0)}$
—	—	—	—	$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$
1	x_1	y_1	. . .	. . .

Пример. Найти методом Рунге-Кутта решение дифференциального уравнения $y' = x^3 + y$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$, на отрезке [0, 1] с шагом $h = 0{,}1$.

Решение. Учитывая, что погрешность метода имеет порядок $h^5 = 0{,}00001$, в промежуточных результатах следует брать пять цифр после запятой, а во всех y_i сохранять только четыре цифры. Результаты вычислений оформим в виде таблицы.

Таблица

i	x	y	$k = 0{,}1(x^3 + y)$	Δy
0	0	1	0,1	0,1
	0,05	1,05	1,10501	0,21003
	0,05	1,0525	1,10526	0,21053
	0,1	1,1053	1,11063	0,11063
				0,1052
1	0,1	1,1052	0,11062	0,11062
	0,15	1,1604	0,11637	0,23278
	0,15	1,1634	0,11668	0,21121
	0,2	1,2219	0,11136	0,11136
				0,10556
2	0,2	1,2218	0,12188	0,12188
	0,25	1,2717	0,12874	0,25747
	0,25	1,2752	0,12908	0,25816
	0,3	1,3399	0,13669	0,13669
				0,12903
3	0,3	1,3520	0,13668	0,13668
	0,35	1,4081	0,1451	0,2902
	0,35	1,4124	0,14552	0,29105
	0,4	1,4853	0,15493	0,15493
				0,14548
4	0,4	1,4988	0,15493	0,15493
	0,45	1,5628	0,16539	0,33078
	0,45	1,568	0,16591	0,33182
	0,5	1,6512	0,17762	0,17762
				0,16586
5	0,5	1,6661	0,17762	0,17762
	0,55	1,74	0,19064	0,38128
	0,55	1,7465	0,19132	0,38258
	0,6	1,8425	0,20585	0,20585
				0,19122
6	0,6	1,8588	0,20584	0,20584
	0,65	1,9618	0,22199	0,44399
	0,65	1,9699	0,2228	0,4456
	0,7	2,0826	0,24082	0,24082
				0,22271
7	0,7	2,0833	0,24081	0,24081
	0,75	2,1855	0,26074	0,52148
	0,75	2,1955	0,26173	0,52347
	0,8	2,3268	0,28388	0,28388
				0,26161
8	0,8	2,3468	0,28589	0,28589
	0,85	2,4898	0,3104	0,62079
	0,85	2,5021	0,31162	0,62324
	0,9	2,6585	0,33875	0,33875
				0,31145
9	0,9	2,6582	0,34129	0,34129
	0,95	2,8545	0,37119	0,74238
	0,95	2,8695	0,37269	0,74537
	1	3,0566	0,40566	0,40566
				0,37245
10	1	3,0280		

Соответствующее решение данного дифференциального уравнения, полученное методом Рунге-Кутта в системе MathCAD, представлено на рис. 21.

Пример решения дифференциального уравнения y ' = y + x^3, y(0)=1 методом Рунге-Кутта в системе MathCad

$f(x,y) := y + x^3$ - задание правой части уравнения;

$x := 0, 0.1 .. 1$ - задание промежутка изменения аргумента;

$i := 0 .. 9$ - задание цикла; $h := 0.1$ - задание шага;

$k1(x,y) := h \cdot f(x,y)$ $\quad k2(x,y) := h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k1(x,y)}{2}\right)$

$k3(x,y) := h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k2(x,y)}{2}\right)$ $\quad k4(x,y) := h \cdot f(x + h, y + k3(x,y))$

$$k(x,y) := \frac{(k1(x,y) + 2 \cdot k2(x,y) + 2 \cdot k3(x,y) + k4(x,y))}{6}$$

$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ - задание начальных условий в векторном виде;

$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_i + h \\ y_i + k(x_i, y_i) \end{bmatrix}$ - вычислительные формулы;

Результаты вычислений:

x =

	0
0	0
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

y =

	0
0	1
1	1.1052
2	1.22182
3	1.35201
4	1.49877
5	1.66605
6	1.85883
7	2.08327
8	2.34678
9	2.65822
10	3.02797

- численное решение $y = y(x)$ на [0,1] с шагом $h = 0.1$;

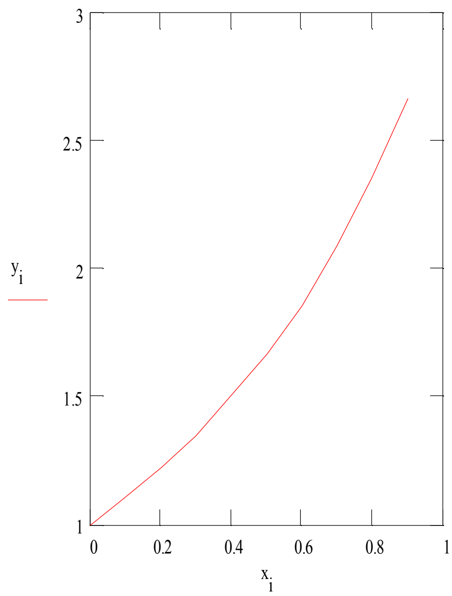


График полученного решения

Рис. 21

Лабораторная работа

«Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений»

Задание 1.

1. Для заданного дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(a) = c$ найти приближённое решение в виде многочлена пятой степени.

2. Найти численное решение данного дифференциального уравнения на отрезке $[a, b]$ с шагом интегрирования h, округляя результат до 0,001.

3. Найти точное решение заданного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и сравнить его с приближённым на отрезке $[a, b]$. Построить графики полученных решений.

Исходные данные для 15-ти вариантов содержатся в таблице.

Вариант	$f(x,y)$	a	b	c	h
1	$\dfrac{tg\,x - y}{\cos^2 x}$	0	1	0	0,1
2	$\arcsin x + x - \dfrac{xy}{1-x^2}$	0	1	1	0,1
3	$x \cdot \cos x + \dfrac{y}{x}$	0	2	0	0,1
4	$\dfrac{1 - \sin x - y}{\cos x}$	π	2π	0	π/10
5	$x^2 y^4 - \dfrac{y}{x}$	1	2	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$	0,1
6	$\dfrac{x \cdot tg\dfrac{y}{x} + y}{x}$	1	3	$\dfrac{\pi}{2}$	0,2
7	$4 + \dfrac{y}{x} + (\dfrac{y}{x})^2$	1	2	2	0,1
8	$\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$	1	2	0	0,2
9	$\dfrac{-e^x}{e^x + 1}$	0	2	0	0,1
10	$\dfrac{y}{\ln y \cdot \cos x}$	0	2	1	0,2
11	$\dfrac{-y}{1+x^2}$	1	2	0	0,2
12	$-\dfrac{3e^x \cdot tg\,y}{(1+e^x)\sec^2 y}$	0	1	π/4	0,1
13	$-\dfrac{y \cdot \ln^3 y}{\sqrt{x+1}}$	$-\dfrac{15}{16}$	$\dfrac{1}{16}$	e	0,1
14	$-\dfrac{x(y^6+1)}{y^2(1+x^4)}$	0	1	1	0,1
15	$-\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin y}}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{4}$	0	0,3

Указания к выполнению задания 1

1. Для того, чтобы получить приближённое решение заданного дифференциального уравнения в виде многочлена пятой степени, используйте формулу (3) при $k = 0, 1, ..., 5$.

2. При выборе метода для вычисления точного решения учитывайте то, что дифференциальные уравнения вариантов 1- 4 являются линейными дифференциальными уравнениями, уравнение 5-го варианта — уравнение Бернулли, уравнения 6-8-х вариантов — однородные дифференциальные уравнения, а уравнения 9-15-х го вариантов — дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

3. Для сравнения точного и приближённого решений заданного дифференциального уравнения сначала составьте таблицы их значений на отрезке $[a, b]$, затем постройте на этом же отрезке графики полученных решений.

Задание 2. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии $y(a) = c$ и шаге интегрирования h:

1) методом Эйлера с шагом $2h$ и с шагом h;
2) модифицированным методом Эйлера (методом Эйлера - Коши или усовершенствованным методом ломаных);
3) методом Рунге-Кутта с шагом $2h$ и с шагом h.

Результаты округлить до 0,0001. Сравнить полученные разными методами решения. Построить графики полученных решений.

Вариант	***f (x,y)***	***a***	***b***	***c***	***h***
1	$2 - \sin(x+y)^2$	2	3	2,3	0,1
2	$\cos(1{,}5x - y^2) - 1{,}3$	– 1	1	0,2	0,2
3	$\cos(1{,}5y + x^2) + 1{,}4$	1	2	0,9	0,1
4	$\cos(0{,}6 + y) + 2{,}5x$	1	3	1,5	0,2
5	$1{,}5 + \sin(x + y)$	1,5	2,5	0,5	0,1
6	$\sqrt{4x^2+1} - 3y^2$	2,6	4,6	1,8	0,2
7	$\sqrt{x^2+0{,}5y^2} + 1$	0	2	2,9	0,2
8	$\dfrac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$	0	2	1	0,2
9	$\dfrac{tg\, x - y}{\cos^2 x}$	0	2	0	0,2
10	$\arcsin x + x - \dfrac{xy}{1-x^2}$	0	1	3	0,1
11	$4{,}1x - y^2 + 0{,}6$	0,6	2,6	3,4	0,2
12	$e^{-(y^2+1)} + 2\,x$	0	0,5	0,3	0,05
13	$\dfrac{1}{1+x^3y} + 2y$	1,5	2	2,1	0,05
14	$\dfrac{2}{2+x} + x + 1$	0,1	0,5	1,25	0,05
15	$\dfrac{2xy}{4+x} - 0{,}4$	3	5	1,7	0,2

Глава 5. ТИПОВОЙ РАСЧЁТ ПО ТЕМЕ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Теоретические вопросы

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений.
Задача Коши дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
Геометрический способ решения дифференциальных уравнений. Изоклины.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к однородным.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли. Метод Лагранжа. Метод Бернулли.
5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
6. Уравнения Клеро и Лагранжа.
7. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
8. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка.
9. Линейные однородные уравнения.
10. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения.
11. Достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.
12. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.
13. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Структура общего решения.
14. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.
15. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.
16. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней характеристического уравнения.
17. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора.
18. Уравнения Эйлера: однородные, неоднородные.
19. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений.
20. Линейные системы дифференциальных уравнений: однородные, неоднородные.
21. Методы решения нормальных систем: метод исключения, метод интегрируемых комбинаций.
22. Метод Эйлера для решения однородных систем дифференциальных уравнений.
23. Методы решений неоднородных систем дифференциальных уравнений: метод Лагранжа, метод подбора.

Теоретические упражнения

1. Какие из следующих уравнений являются дифференциальными:

$$1)\ yy' + 2 = 0; \qquad 2)\ 2y^2 + 3y = 0;\ 3)\ 3^y + y = 3;$$

$$4)\ y^2 + y'' = y; \quad 5)\ \frac{dv}{dt} = 3v; \qquad 6)\ v^3 = 2v + v^2\ ?$$

2. Определить порядок следующих дифференциальных уравнений:

$$1)\ y'' + 2y' = 0; \quad 2)\ y' - ytgx = \frac{1}{\cos x};$$

$$3)\ y'' + y''' = y'; \quad 4)\ xyy' + x^2 - 2y^2 = 0.$$

3. Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого порядка? Третьего порядка?

4. Может ли функция $y = C_1x + C_2$, где C_1 и C_2 и — произвольные постоянные, быть общим решением дифференциального уравнения первого порядка?

5. Проверить, является ли решением дифференциального уравнения $y'ctgx + y = 2$ функция y = cos x + 2.

6. Определить, какие из указанных функций являются общими решениями уравнения $y' = y$

$$\text{a)}\ y = e^{2x};\ \ b)\ y = e^x;\ c)\ y = e^x + C;\ d)\ y = Ce^x.$$

7. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M(3;\ 4)$ и такой, что угловой коэффициент ее касательной равен отношению абциссы к ординате.

8. Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки графиков решений уравнения $y' = f(x, y)$, соответствующие максимумам и минимумам. Как отличить максимум от минимума?

9. Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки перегиба графиков решений уравнения $y' = f(x, y)$.

10. Какие из следующих дифференциальных уравнений являются линейными:

$$a)\ yy'' = x;\ b)\ (t-1) = ss' = 0;\ c)\ y' - \frac{y}{x} = x?$$

11. Определить, какая из указанных функций является общим решением дифференциального уравнения $y'' = 2x$:

$a)\ y = 2x^3 + C_1x + C_2;\ b)\ y = x^3 + C_2;$

$c)\ y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2;\ d)\ y = x^3 + x?$

12. Известно, что $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$ являются решениями уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Можно ли утверждать, что $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ — общее решение этого уравнения?

13. Тело движется со скоростью $v = \dfrac{1}{t+2}$. Найти уравнение движения, если $s = 0$ при $t = 0$.

14. Угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке задан функцией $y = \cos x$. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $O(0,0)$.

15. Ускорение прямолинейного движения материальной точки задано уравнением $a = 6t - 4$. Найти уравнение движения точки, если $S = 5$м, $S' = 6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ при $t = 2$с.

16. Тело, температура которого 25^0C, погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0^0C. Зная, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и окружающей среды, определить, за какое время тело охладится до 10^0C, если за 20 мин оно охлаждается до 20^0C?

17. Линейное дифференциальное уравнение останется линейным при замене независимой переменной $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ произвольная, но дифференцируемая достаточное число раз. Доказать это утверждение для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

18. Доказать, что линейное дифференциальное уравнение остается линейным при преобразовании искомой функции

$$y = \alpha(x)z + \beta(x).$$

Здесь z — новая искомая функция, $\alpha(x), \beta(x)$ – произвольные, но достаточное число раз дифференцируемые функции.

19. Составить общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$, если известно ненулевое частное решение y_1 этого уравнения.

20. Показать, что произвольные, дважды дифференцируемые функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями линейного дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

21. Составить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее решения $y_1 = x,\ y_2 = x^2$. Показать, что функции x и x^2 линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Убедиться в том, что определитель Вронского для этих функций равен нулю в точке $x = 0$. Почему это не противоречит необходимому условию линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения?

22. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если известны три линейно-независимые частные его решения y_1, y_2, y_3.

23. Доказать, что для того, чтобы любое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяло условию $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части.

Расчетные задания

Задания 1—4. Найти общее решение уравнений.
Задания 5—8. Решить задачу Коши.
Задания 9—10. Проинтегрировать уравнения.
Задание 11. Решить систему.

Вариант 1

1. $\left(1+e^{x}\right)\cdot y\cdot y'=e^{x}$.

2. $\left(x^{2}+x\right)\cdot ydx+\left(y^{2}+1\right)dy=0$.

3. $x\cdot y'=y\cdot\cos\ln\frac{y}{x}$.

4. $xy'-2x^{2}\sqrt{y}=4y$.

5. $y\cdot x'+x=4y^{3}+3y^{2};\quad y(2)=1$.

6. $y''=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};\ y(0)=2;\quad y'(0)=3;\quad y(1)=?$

7. $(y'')^{2}=y';\quad y(0)=\frac{2}{3};\quad y'(0)=1$.

8. $y''+2y'-15y=0;\quad y(0)=1;\quad y'(0)=0$.

9. $y''+10y'+25y=4x-5$.

10. $xy''=y'$.

11. $\begin{cases}x'=2x+y,\\ y'=3x+4y.\end{cases}$

Вариант 2

1. $\frac{e^{-x^{2}}dy}{x}+\frac{dx}{\cos^{2}y}=0.$

2. $y'-xy^{2}=2xy.$

3. $xy+y^{2}=(2x^{2}+xy)y'.$

4. $\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{y}-2x\right)dy.$

5. $(x+1)y'+y=x^{3}+x^{2};\quad y(0)=0.$

6. $y''=\sin^{3}x;\, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{7}{9};\, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$
$y(2{,}5\pi)=?$

7. $1+y'^{2}=yy';\quad y(0)=1;\quad y'(0)=0.$

8. $y''-6y'-15y=0;\quad y(0)=1;\quad y'(0)=0.$

9. $y''+2y'+2y=(x+2)e^{x}.$

10. $y''+4y'=2x^{2}.$

11. $\begin{cases}x'=-2x-3y,\\ y'=-x.\end{cases}$

Вариант 3

1. $y'=\frac{e^{2x}}{\ln y}.$

2. $y=x\left(y'-\sqrt[x]{e^{y}}\right).$

3. $xy'=y\ln\left(\frac{y}{x}\right).$

4. $y'=2xy+x.$

5. $(x-2xy)y'=y(y-1);\quad y(0)=1.$

6. $y''=arctgx;\quad y(0)=y'(0)=0;\quad y(1)=?$

7. $y''=\left(\frac{1}{y^{3}}\right);\quad y(0)=1;\quad y'(0)=0.$

8. $y''-4y'+3y=0;\quad y(0)=2;\quad y'(0)=10.$

9. $y''-2y'+2y=e^{x}\cos x.$

10. $y''x+y=-xy^{2}.$

11. $\begin{cases}x'=-x+8y,\\ y'=-x.\end{cases}$

Вариант 4

1. $e^{x+3y}dy = xdx.$

2. $(xy + x^3 y)y' = 1 + y^2.$

3. $y - xy' = x\sec\dfrac{y}{x}.$

4. $y' + y = x\sqrt{y}.$

5. $(x^2+1)y' + 4xy = 3;\quad y(0) = 0.$

6. $y''' = \sin x;\ x_0 = \dfrac{\pi}{2};\ y(0) = 1;\ y'(0) = y''(0) = 0;$
$y(x_0) = ?$

7. $y'' = y'e^{y};\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

8. $y'' + 2y' - 3y = 0;\quad y(0) = 5;\quad y'(0) = 0.$

9. $y'' + 2y' + y = e^{2x}\sin 2x.$

10 . $(1 - x^2)y'' - xy = 2\,.$

11. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$

Вариант 5

1. $\sin x tgy dx - \dfrac{dy}{\sin x} = 0.$

2. $(xy^3 + x)dx + (x^2 y - y^2)dy = 0.$

3. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy.$

4. $xy^2 y' = x^2 + y^3.$

5. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln ydy;\quad y(0) = 1.$

6. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 2x};\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4};\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1;$
$y(\dfrac{5\pi}{4}) = ?$

7. $2yy'' - (y')^2 + 1 = 0;\quad y(0) = 2;\quad y'(0) = 1.$

8. $y'' + 3y' + 2y = 0;\quad y(0) = 2;\quad y'(0) = -6.$

9. $y'' - 7y' + 12y = e^{4x}(x - 5).$

10. $y'' = y' + x.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$

Вариант 6

1. $y' = (2y + 1)tgx$

2. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

3. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2 dx = 0.$

4. $\left(2x^2 y\ln y - x\right)y' = y.$

5. $\cos ydx = (x + 2\cos y)\sin ydy;\quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

6. $y''' = e^{2x};\ y(0) = \dfrac{9}{8};\ y'(0) = \dfrac{1}{4};$
$y''(0) = -\dfrac{1}{2};\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = ?$

7. $y'' = -\dfrac{1}{2y^2};\quad y(0) = \dfrac{1}{2};\quad y'(0) = \sqrt{2}.$

8. $y'' - y' + 4y = 0;\quad y(0) = 2;\quad y'(0) = -2.$

9. $y'' - 5y' = 3xe^{5x}.$

10. $x^2 y'' + xy' = 1.$

11. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$

Вариант 7

1. $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x.$

2. $yx' + x = -yx^2.$

3. $(1+x^3)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0.$

4. $(4x^2+3xy+y^2)dx + (4y^2+3xy+x^2)dy = 0.$

5. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1).$

6. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x};\quad y(1)=0.$

7. $y''' = x\sin x;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=?$

8. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0;\quad y(0)=0;$
$y'(0)=3.$

9. $y'' + 6y' + 13y = 0;\ y(0)=1;\quad y'(0)=8.$

10. $y'' + 2y' + y = e^{2x}\cos x.$

11. $\begin{cases} x' = -x-2y, \\ y' = 3x+4y. \end{cases}$

Вариант 8

1. $1 + (1+y')e^y = 0.$

2. $xy' - y = y^2.$

3. $(x-y)ydx - x^2dy = 0.$

4. $(x+y^2)dy = ydx.$

5. $y' = 2x(x^2+y);\quad y(0)=0.$

6. $y''' + y''tgx = \sec x;\ y(0)=0;\ y'(0)=1;$
$y''(-6)=3;\ y(4)-?$

7. $4(y'')^2 = 1+(y')^2;\ y(0)=1;\quad y'(0)=0.$

8. $y'' - 4y' + 4y = 0;\quad y(0)=3;$
$y'(0)=-9.$

9. $y'' + 5y' - 6y = 2e^{5x}\sin 4x.$

10. $x(x-1)y' + y^3 = xy.$

11. $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$

Вариант 9

1. $(1+e^x)ydy - e^xdx = 0.$

2. $(x+4)dy - xydx = 0.$

3. $(y^2-2xy)dx + x^2dy = 0.$

4. $y' = y^4\cos x + ytgx.$

5. $y' = 2x(x^2+y);\quad y(0)=0.$

6. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2};\ y(0)=0;\ y'(0)=0;\ y(1)=?$

7. $y''tgy = 2(y')^2;\quad y(1)=\dfrac{\pi}{2};\quad y'(1)=2.$

8. $y'' + 2y' + y = 0;\quad y(0)=10;\quad y'(0)=0.$

9. $y'' + y' + y = 4xe^{2x}.$

10. $y''x\ln x = y'.$

11. $\begin{cases} x' = 4x+2y, \\ y' = 4x+6y. \end{cases}$

Вариант 10

1. $ctgx\cos^2 ydx + \sin^2 xtgydy = 0.$

2. $(y^2x + y)dy = xdx.$

3. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$

4. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y.$

5. $(2e^y - x)y' = 1;\quad y(0) = 0.$

6. $y'' = \sin^2 3x;\ y(0) = -\dfrac{\pi^2}{16};\ y'(0) = 0;$ $y\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = ?$

7. $y''(1 + y) = 5(y')^2;\quad y(0) = 0;\quad y'(0) = 1.$

8. $y'' - 4y' + 3y = 0;\quad y(0) = 5;$ $y'(0) = 2.$

9. $y'' + y' + y = xe^{6x}.$

10. $2xy'y'' = (y')^2 + 1.$

11. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

Вариант 11

1. $y' = e^{x^2}x(1 + y^2).$

2. $(x^2 - 1)y' - xy = 0.$

3. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$

4. $y' + xy = x^3y^3.$

5. $(xy' - 1)\ln x = 2y;\quad y(e) = 0.$

6. $y'' = \dfrac{x}{e^{2x}};\ y(0) = \dfrac{1}{4};\ y'(0) = -\dfrac{1}{4};$ $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = ?$

7. $y'' + \dfrac{2}{1 - y}(y')^2 = 0;\quad y(0) = 0;\quad y'(0) = 1.$

8. $y'' - 2y' - 3y = 0;\quad y(2) = 1;\quad y'(2) = 10.$

9. $y'' + 2y' - 3y = 5x^2e^x.$

10. $y'' + 2x(y')^2 = 0.$

11. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 56y. \end{cases}$

Вариант 12

1. $y'\sin x = y\ln y.$

2. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 ydy.$

3. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$

4. $\dfrac{y'}{7^{y-x}} = 3.$

5. $y' + ytgx = \sec x;\quad y(0) = 0.$

6. $y''' = \dfrac{1}{x};\ y(1) = \dfrac{1}{4};\ y'(1) = y''(1) = 0;$ $y(2) = ?$

7. $y'^2 + 2yy'' = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 1.$

8. $y'' + 9y' = 0\quad y(0) = 2;\quad y'(0) = -2.$

9. $y'' + y' - 2y = 4\sin x.$

10. $2xy'y'' = y'^2 - 1.$

11. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

Вариант 13

1. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

2. $y' = \dfrac{y}{3x} - y^2; \quad y(1) = 1.$

3. $3e^x \sin y dx + (1 - e^x) dy = 0.$

4. $\left(1 + y^2\right)dx - \left(y + yx^2\right)dy = 0.$

5. $(x+1)(y' + y^2) = -y.$

6. $y'' = x + \sin x; y(1) = \dfrac{1}{4}; y(0) = -3;$
$y'(0) = 0; y(5) = ?$

7. $y'' = 2 - y; \; y(0) = 2; y'(0) = 2.$

8. $y'' + 6y' - y = 0; \; y(0) = 0;$
$y'(0) = -1.$

9. $y'' - 2y' + 10y = e^x \sin 3x.$

10. $xy'' = y' + x^2.$

11. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

Вариант 14

1. $e^x \sin^2 y dx + tgy dy = 0.$

2. $2x^2 yy' + y^2 = 2.$

3. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0.$

4. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y.$

5. $xy' - 2y + x^2 = 0; \quad y(1) = 0.$

6. $y''' = \sqrt{x} + \sin 2x; y(0) = -\dfrac{1}{8}; y'(0) = \dfrac{1}{8}\cos 2;$
$y''(0) = \dfrac{1}{2}; y(1) = ?$

7. $y'' + y \cdot y'^3 = 0; \; y(0) = 1; \; y'(0) = 2.$

8. $y'' - 6y' + 10y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 0.$

9. $y'' - 6y' + 5y = 3\cos x.$

10 $xy'' - y' = 2x^2 e^x.$

11. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$

Вариант 15

1. $\sec^2 x \cdot tg\, y dy + \sec^2 y \cdot tg\, x dx = 0.$

2. $y - xy' = 1 + x^2 y'.$

3. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$

4. $y' = y^4 \cos x + ytgx.$

5. $xy' - 2y = 2x^4; \quad y(1) = 0.$

6. $y''' = \dfrac{6}{x^3}; \; y(1) = 0; \; y'(1) = 5; \; y''(1) = 1;$
$y(2) = ?$

7. $y'' + 2y \cdot y'^3 = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = \dfrac{1}{3}.$

8. $y'' - y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$

9. $y'' - y' - 12y = xe^x.$

10. $y'' + y' tgx = \sin 2x.$

11. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$

Вариант 16

1. $y' = (2x-1)ctgy.$

2. $y - xy' = 2(1 + x^2 y').$

3. $(x+2y)dx - xdy = 0.$

4. $y' + 2y = y^2 e^x.$

5. $(1-x)(y'+y) = e^{-x};\quad y(0) = 0.$

6. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x};\quad y(0) = 1;\ y'(0) = \dfrac{3}{5};$ $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = ?$

7. $yy'' + y'^2 = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 1.$

8. $y'' + 2y' + 5y = 0;\quad y(0) = -1;\quad y'(0) = 6.$

9. $y'' + 12y' + 36y = 4e^{-6x}.$

10. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$

11. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

Вариант 17

1. $(y^2+3)dx - \dfrac{e^x}{x} ydy = 0.$

2. $y' + y + y^2 = 0.$

3. $y^2 + x^2 y' = xyy'.$

4. $y' \sin x - y \cos x = 1.$

5. $y' - y = e^x;\quad y(0) = 1.$

6. $y'' = 4\cos 2x;\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 3;$ $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$

7. $2yy'' = y'^2;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 1.$

8. $15y'' - 11y' + 2y = 0;\quad y(0) = -3;$ $y'(0) = 0.$

9. $y'' - 8y' + 5y = 2\sin 5x.$

10. $xy'' - y' = x^2 e^x.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

Вариант 18

1. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx.$

2. $y^2 \ln x dx - (y-1)dy = 0.$

3. $xy' - y = xtg\left(\dfrac{y}{x}\right).$

4. $y' x^3 \sin y = xy' - 2y.$

5. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0;\quad y(1) = \dfrac{1}{2e}.$

6. $xy''' = 2;\quad y(1) = \dfrac{1}{2};\ y'(1) = y''(1) = 0;$ $y(2) = ?$

7. $yy'' = y'^2;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 1.$

8. $2y'' + 2y' - 5y = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 0.$

9. $y'' - 4y' + 20y = e^{3x}.$

10. $xy'' \ln x = 2y'.$

11. $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$

Вариант 19

1. $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx.$

2. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0.$

3. $xy' = y(3+\ln y) - y\ln x.$

4. $y' - \dfrac{3y}{x} = -x^3y^2.$

5. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = x;\quad y(0) = 0.$

6. $y''' = \dfrac{1}{x};\quad y(1) = \dfrac{1}{3};\ y'(1) = y''(1) = 2;$ $y(2) = ?$

7. $yy'' - y'^2 = y^3;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 1.$

8. $y'' + 5y' - 6y = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 0.$

9. $y'' - y' + 4y = e^{2x}x.$

10. $x^2y'' + xy' = 1.$

11. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$

Вариант 20

1. $(1+x^2)dy + ydx = 0.$

2. $yy' + xe^y = 0.$

3. $xy' = 2(y - \sqrt{xy}).$

4. $y' - xy + e^{-x^2}y^3 = 0.$

5. $xy' + 2y = (x+3);\quad y(1) = 1.$

6. $x^2y''' = 2;\quad y(1) = 5;\ y'(1) = y''(1) = 1;$ $y(3) = ?$

7. $yy'' - y'^2 = y^3;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 1.$

8. $y'' + 2y' + 5y = 0;\quad y(0) = 2;\quad y'(0) = -8.$

9. $y'' + 12y' + 36y = e^{2x}\cos x.$

10. $2xy'y'' = y'^2 + 1.$

11. $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$

Вариант 21

1. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0.$

2. $3e^x tg\, ydx + (1-e^x)\cos^{-2} ydy = 0.$

3. $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0.$

4. $xy^2y' = x^2 + y^3.$

5. $(xy' - 1)\ln x = 2y;\quad y(e) = 1.$

6. $y''' = x^2e^x;\ y(1) = 3;\ y'(1) = 0;$ $y''(2) = 3;\ y(4) = ?$

7. $\arcsin\dfrac{x}{y'} = y'';\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$

8. $y'' - 6y' + 10y = 0;\ y(0) = -1;\ y'(0) = 0.$

9. $y'' - 2y' + y = xe^{3x}(x^2 + 1).$

10. $y'' + y'tgx = \sin 2x.$

11. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x - 2. \end{cases}$

Вариант 22

1. $\sec^2 x \cdot ctg\, y dx + \sec^2 y \cdot tg\, x dy = 0.$

2. $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0.$

3. $y' + y = e^x \sin x.$

4. $xy' + y = x + 1.$

5. $2x^3 y' = y \cdot (2x^2 - y^2);\ y(1) = 1.$

6. $2y''' = \dfrac{3}{x^2};\ y(0) = 2;\ y''(1) = 1;\ y'(1) = -1;\ y(5) = ?$

7. $y'' = 2y'^2;\ y(0) = 1;\ y'(1) = 9.$

8. $y'' - 2y' + 3y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

9. $49y'' + 2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1).$

10. $4xy''y' - y'^2 = 1.$

11. $\begin{cases} x' = 7x - 6y, \\ y' = -2x + 3y. \end{cases}$

Вариант 23

1. $x\sqrt{1+y^2}dy + y\sqrt{1+x^2}dx = 0.$

2. $xy' + y = \sin x.$

3. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

4. $(\ln y - \dfrac{y}{x})dx + (\dfrac{x}{y} - \ln x)dy = 0.$

5. $xy' + y = 2y^2 \ln x;\ y(1) = 1.$

6. $(x-1)y''' = 1;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = \dfrac{1}{2};\ y(10) = ?$

7. $2yy'' - y' = 0;\ y(0) = -1;\ y'(1) = -2.$

8. $9y'' - 12y' + 4y = 0;\ \ y(0) = y'(0) = 1.$

9. $15y'' - 11y' + 2y = e^x.$

10. $y'' tg\, x = y' + 1.$

11. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -2x + 6y. \end{cases}$

Вариант 24

1. $(2x+1)dy + y^2 dx = 0.$

2. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$

3. $y' \sin x - y\cos x = 1.$

4. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}.$

5. $y' - y\cos x = 2\sin 2x;\ y(0) = 2.$

6. $6x^3 y''' = -1;\ y(0) = 2;\ y''(1) = y'(1) = 1;\ y(7) = ?$

7. $yy'' - y'^2 = 0;\ y'(0) = 1;\ y(1) = -1.$

8. $y'' - 3y' + 3y = 0;\ y(0) = -2;\ y'(0) = 1.$

9. $y'' - 12y' + 26y = (3x-1)e^x.$

10. $xy'y'' = y'^2.$

11. $\begin{cases} x' = 8y - x, \\ y' = x + y. \end{cases}$

Вариант 25

1. $(1+x^3)dy + x^2 y dy = 0.$

2. $xy' = 2(y - \sqrt{yx}).$

3. $xy' + y = y^2 \ln x.$

4. $xy' = y(3 + \ln y).$

5. $(x^2+1)y' + 4xy = 3;\ \ y(0) = 0.$

6. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{2}};\ \ y(0) = 0;$ $y'(0) = 1;\ \ y(4\pi) = ?$

7. $y'' = y' + y'^2;\ \ y(0) = y'(0) = 1.$

8. $y'' - 2y' + y = 0;\ \ y(0) = -2;\ \ y'(0) = 0.$

9. $y'' - 4y' + 5y = -2xe^x.$

10. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$

11. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$

Вариант 26

1. $xy' = y^2 + 1.$

2. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$

3. $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0.$

4. $y' + 3y = e^{2x} y^2.$

5. $(2x + e^{\frac{x}{y}})dx + (1 - \dfrac{x}{y})e^{\frac{x}{y}} dy = 0;\ y(0) = 1.$

6. $y'' = 2\sin x \cos^2 x;\ y(0) = \dfrac{-5}{9};$ $y'(0) = \dfrac{-2}{3};\ y(\dfrac{\pi}{2}) = ?$

7. $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$

8. $y'' - 6y' + 9y = 0;\ \ y(0) = -1;\ \ y'(0) = 1.$

9. $y'' + y' - 2y = 3x\cos 2x.$

10. $y'' \ln x = 2y'$

11. $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases}$

Вариант 27

1. $(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x.$

2. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 9\dfrac{y}{x} + 9.$

3. $y' = (y - 3x^2)/(4y - x).$

4. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$

5. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2;\ \ y(0) = 0.$

6. $y''' = \cos 4x;\ y(0) = 2;\ y'(0) = \dfrac{15}{16};$ $y''(0) = 0;\ y(\pi) = ?$

7. $yy'' + 2yy'^3 = 0;\ \ y(0) = 2;\ \ y'(0) = 1.$

8. $2y'' + y' - y = 0;\ \ y(0) = 1;\ \ y'(0) = -23.$

9. $y'' - 6y' + 5y = 6x - 1.$

10. $4y'' = 1 + y'^2.$

11. $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = -6x - y. \end{cases}$

Вариант 28

1. $y' + y + y^3 = 0.$

2. $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx.$

3. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y.$

4. $y' \sin x = y \ln y.$

5. $xy' + 2y = (x + 6);\quad y(0) = 1.$

6. $y''' = x^2 e^x;\ y(1) = 3;\ y'(1) = 0;$
$y''(-2) = 2;\ y(6) = ?$

7. $yy'' - y'^2 = y^3;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = -1.$

8. $y'' + 3y' + 2y = 0;\quad y(0) = -2;\quad y'(0) = -6.$

9. $y'' - 5y' + y = 3xe^{5x}.$

10. $y'' = y' + x.$

11. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = x + 8y. \end{cases}$

Вариант 29

1. $xy^2 y' = x^2 + y^3.$

2. $y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right).$

3. $(x - y)ydx - x^2 dy = 0.$

4. $(x + y^2)dy = ydx.$

5. $(x - 2xy)y' = y(y - 1);\quad y(0) = 1.$

6. $y'' = arctgx;\quad y(0) = y'(0) = 0;\quad y(1) = ?$

7. $y'' + 2y \cdot y'^3 = 0;\quad y(0) = 2;\quad y'(0) = \dfrac{1}{3}.$

8. $y'' + 6y' + 8y = 0;\ y(0) = 1;\quad y'(0) = 6.$

9. $y'' - 4y' + 12y = e^{3x}.$

10. $y'' = y' + 5x.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$

Вариант 30

1. $y' \sin x - y \cos x = 1.$

2. $(y^2 x + y)dy + \dfrac{1}{3}y^3 dx = 0.$

3. $3e^x \sin ydx + (1 - e^x)dy = 0.$

4. $xy' = y(3 + \ln y).$

5. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y.$

6. $y''' + y'' tgx = \sec x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$
$y''(-6) = 3;\ y(4) - ?$

7. $y'^2 + 2yy'' = 0;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 5.$

8. $y'' - 4y' + 3y = 0;\quad y(0) = 5;\quad y'(0) = 2.$

9. $y'' - 7y' + 12y = e^{4x}(x - 6).$

10. $y'' + 4y' = 2x^2.$

11. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$

Пример выполнения типового расчета

Задание1. Решить дифференциальное уравнение

$$(xy^2+x)dx+(x^2y+y)dy=0.$$

Решение. Вынесем в каждом слагаемом левой части уравнения общий сомножитель за скобку. Тем самым преобразуем данное уравнение к виду

$$x(y^2+1)dx+y(x^2+1)dy=0.$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{-y}{y^2+1}dy\,.$$

Проинтегрируем получившееся равенство: $\int\frac{x}{x^2+1}dx=-\int\frac{y}{y^2+1}dy$,

откуда $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=-\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+\frac{1}{2}\ln|C|$, $(x^2+1)=\frac{\pm C}{y^2+1}$, или

$$y^2+1=\frac{\pm C}{x^2+1}\quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{\frac{\pm C}{x^2+1}-1}.$$

Ответ. $y=\pm\sqrt{\frac{\pm C}{x^2+1}-1}$ – общее решение.

Задание 2. Решить дифференциальное уравнение

$$(x-y)dx+(x+y)dy=0.$$

Решение. Проверим уравнение на однородность, т.е. выясним: можно ли представить исходное уравнение в виде

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\,,$$

где $P(tx,ty)=t^{\alpha}P(x,y),\ Q(tx,ty)=t^{\alpha}Q(x,y).$

$$P(tx,ty)=(tx-ty)=t(x-y),\quad Q(tx,ty)=(tx+ty)=t(x+y)\Rightarrow$$

$P(x,y)=x-y,\ Q(x,y)=x+y$ — однородные функции порядка $\alpha=1$, следовательно, и исходное уравнение является однородным.

Приведем исходное уравнение к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$(x+y)dy=(y-x)dx\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x+y}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части последнего равенства на *x*, окончательно получим:

$$y'=\frac{\frac{y}{x}-1}{1+\frac{y}{x}}.$$

Сделаем замену $t=\frac{y}{x}$, откуда $y=t\cdot x,\ y'=t+x\cdot t'$, уравнение примет вид

$$t+x\cdot t'=\frac{t-1}{t+1}\quad\Rightarrow$$

$$x\cdot t'=\frac{t-1}{t+1}-t;\quad x\cdot t'=\frac{t-1-t^2-t}{t+1};\ x\frac{dt}{dx}=-\frac{t^2+1}{t+1}\,.$$

Последнее уравнение – уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{(t+1)dt}{t^2+1},$$

затем проинтегрируем:

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{(t+1)dt}{t^2+1},\qquad \int\frac{dx}{x}=-\int\frac{tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1},$$

$$\ln|x|=-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-arctg\,t+\ln|C|,\ \ \ln|x|=\ln\frac{|C|}{\sqrt{t^2+1}}-arctg\,t,\text{ откуда}$$

$$arctgt=\ln\frac{|C|}{\sqrt{t^2+1}}-\ln|x|,\ arctgt=\ln\frac{|C|}{|x|\sqrt{t^2+1}}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\ln\frac{|C|}{|x|\sqrt{\frac{y}{x^2}^2+1}}=arctg\frac{y}{x}\ \Rightarrow\ \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}=arctg\frac{y}{x},\quad\text{или}$$

$$arctg\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}=\ln|C|.$$

Ответ. Общий интеграл данного уравнения равен

$$arctg\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}=\ln|C|.$$

Задание 3. Решить дифференциальное уравнение

$$x\cdot y'-2y=2\cdot x^4.$$

Решение. Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка, так как его можно привести к виду $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$, разделив обе части равенства на x:

$$y'-\frac{2}{x}\cdot y=2\cdot x^3,\ P(x)=-\frac{2}{x},\ Q(x)=2x^3.$$

Решим уравнение методом Бернулли. Сделаем замену $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, откуда исходное уравнение примет вид

$$u'v+uv'-\frac{2}{x}uv=2x^3.$$

Так как функции $u=u(x),v=v(x)$ выбраны произвольно, то среди них найдутся такие, что обратят в нуль выражение $u'+u/x$.

Составим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций u и v:

$$\begin{cases}u'-\dfrac{2}{x}u=0,\\ uv'=2x^3.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем функцию u:

$$\frac{du}{dx}=\frac{2u}{x},\quad \frac{du}{u}=\frac{2dx}{x},\quad \ln|u|=2\ln|x|,\quad u=x^2.$$

Из второго уравнения системы найдем функцию v:

$$x^2v'=2x^3,\quad \frac{dv}{dx}=2x,\ \int dv=2\int xdx,\quad v=x^2+C.$$

Общее решение исходного уравнения примет вид

$$y=uv=x^2(x^2+C)=x^4+x^2C.$$

Ответ. $y=x^2(x^2+C)$ – общее решение.

Задание 4. Решить дифференциальное уравнение

$$2(xy'+y)=xy^2.$$

Решение. Разделим обе части исходного равенства на $2x$, тем самым приведем уравнение к виду

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{2}.$$

Это уравнение Бернулли $y'+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^n$, где $P(x)=\frac{1}{x},\quad Q(x)=\frac{1}{2},\quad n=2$.

Решим уравнение методом Бернулли. Пусть $y=uv$,

$y'=u'v+uv'$, откуда исходное уравнение примет вид

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{u^2v^2}{2}\quad\Rightarrow\quad v(u'+\frac{u}{x})+uv'=\frac{u^2v^2}{2}.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases}1)u'+\dfrac{u}{x}=0,\\ 2)uv'=\dfrac{u^2v^2}{2}.\end{cases}\Leftrightarrow 1)\frac{du}{dx}=\frac{-u}{x},\ \frac{du}{u}=\frac{-dx}{x},\int\frac{du}{u}=-\int\frac{dx}{x},\ \ln|u|=-\ln|x|,$$

$$u=\frac{1}{x};\qquad 2)\frac{1}{x}\cdot v'=\frac{v^2}{2x^2},\qquad \frac{dv}{v^2}=\frac{dx}{2x},\qquad \int\frac{dv}{v^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{2}{v}=\ln|x|+C,\qquad v=-\frac{2}{(\ln|x|+C)}.$$

Общее решение: $\quad y=uv=-\dfrac{2}{x\ln(|x|+C))}.$

Ответ. Общее решение уравнения имеет вид $y=-\dfrac{2}{x\ln(|x|+C))}.$

Задание 5. Решить задачу Коши

$$y'+ytgx=\frac{1}{\cos x},\ y(\pi)=1.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x),$$

где $P(x)=tgx,\ Q(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

Решим уравнение методом Лагранжа. Сначала найдем решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $y'+ytgx=0$.

$$\frac{dy}{dx}=-ytgx,\ \frac{dy}{y}=-tgxdx.$$

Проинтегрировав последнее равенство, получим

$$\int\frac{dy}{y}=-\int tgxdx+\ln C,\ \ln|y|=\ln|\cos x|+\ln|C|,\ y=\pm C\cdot\cos x.$$

Итак, решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'+ytgx=0$ имеет вид

$$y=\pm C\cdot\cos x.$$

Теперь найдем решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$y = C(x) \cdot \cos x.$$

Найдем функцию $C(x)$. Для этого продифференцируем y: $y' = C'(x) \cdot \cos x - C(x)\sin x$; подставим полученную производную y' и функцию y в исходное уравнение:

$$C'(x) \cdot \cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x tgx = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dC(x)}{dx} \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}, \qquad dC(x) = \frac{dx}{\cos^2 x}, \qquad \int dC(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Отсюда $C(x) = tgx + C$. Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (tgx + C)\cos x.$$

Найдем частное решение при заданных условиях.

$$y(\pi) = 1 \Leftrightarrow (tg\pi + C)\cos\pi = 1 \Rightarrow C = -1.$$

$y = (tgx - 1)\cos x = \sin x - \cos x$ — частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi) = 1$. Его график приведен на рис. 22.

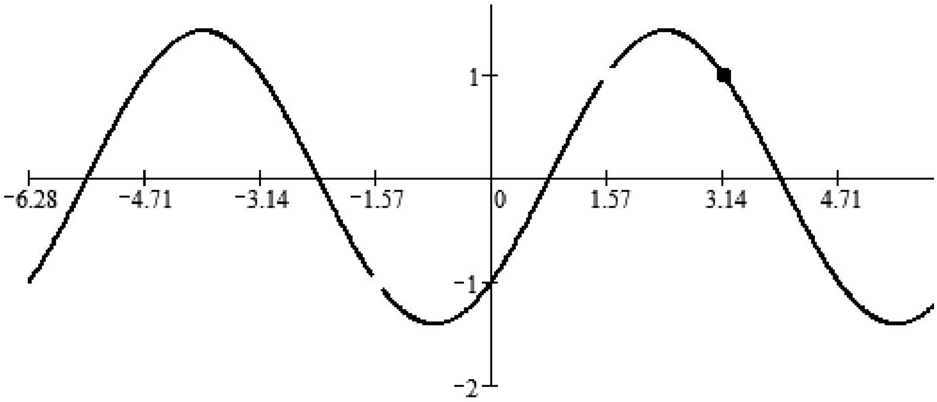


Рис. 22

Ответ. Частное решение уравнения имеет вид $y = (tgx - 1)\cos x$.

Задание 6. Решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями

$$y''(x+2)^5 = 1, \; y(-1) = \frac{1}{12}, \; y'(-1) = -\frac{1}{4}.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение 2-го порядка, допускающее понижение порядка. Преобразуем его к виду

$$y'' = \frac{1}{(x+2)^5}.$$

Проинтегрируем уравнение последовательно два раза:

$$y' = \int \frac{1}{(x+2)^5} d(x+2) = -\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1,$$

$$y = -\int \frac{d(x+2)}{4(x+2)^4} + C_1 \int dx = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1 x + C_2.$$

Найдем значения произвольных постоянных C_1, C_2 используя начальные условия:

$$y(-1) = \frac{1}{12}, \; C_1(-1) + C_2 + \frac{1}{12(1)^3} = \frac{1}{12}, \; -C_1 + C_2 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}, \; C_2 - C_1 = 0$$

$$y'(-1) = -\frac{1}{4}, \; -\frac{1}{4} + C_1 = -\frac{1}{4}, \; C_1 = 0, \; C_2 = 0.$$

Частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y=\frac{1}{12(x+2)^3}.$$

Ответ. Частное решение $y=\dfrac{1}{12(x+2)^3}$.

Задание 7. Решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями

$$y^3y''=-1,\ y(1)=1,\ y'(1)=0.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее явно переменной x, допускающее понижения порядка.

Понизим порядок уравнения, используя подстановку $y'=p \quad \Rightarrow \ y''=p\cdot p'$, где $p=p(y)$. Имеем

$$y^3 p\cdot p'=-1 \quad \Rightarrow \ y^3\frac{pdp}{dy}=-1 \Rightarrow \ pdp=-y^{-3}dy,$$

$$\int pdp=-\int\frac{dy}{y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+C_1;$$

$$p^2=\frac{1}{y^2}+2C_1 \Rightarrow \ p=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1} \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1},$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{1+2C_1y^2}{y^2}} \ \Rightarrow \int dx=\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}},$$

$$x=\pm\frac{1}{4C_1}\int(1+2C_1y^2)^{\frac{-1}{2}}d(1+2C_1y^2)=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1y^2}+C_2.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$x=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1y^2}+C_2,\ \text{или}\ (x-C_2)^2-\frac{y^2}{2C_1}=\frac{1}{4C_1^2}.$$

Найдем частное решение, используя начальные условия. При $x=1$ $y=1$, откуда получим первое уравнение относительно неизвестных C_1, C_2:

$$\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1}+C_2=1.$$

При $x=1$, $y=1$ $y'=0$. Подставим эти значения в производную $y'=p$, получим второе уравнение относительно неизвестных C_1, C_2:

$$\pm\sqrt{\frac{1}{1^2}+2C_1}=0.$$

Решая эти уравнения совместно, получим

$$C_1=-\frac{1}{2},\ C_2=1.$$

Частное решение: $(x-1)^2+y^2=1$.

Ответ: Частное решение: $(x-1)^2+y^2=1$.

Задание 8. Решить задачу Коши

$$y^{IY} - y = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = 3, y''(0) = y'''(0) = 0.$$

Решение. Задано линейное однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0,\ k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_{3,4} = \pm i.$$

$$k^4 - 1 = 0,$$

Характеристическое уравнение имеет два действительных различных и два мнимых корня, поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x .$$

Продифференцируем найденное решение три раза:

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x,$$

$$y'' = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x,$$

$$y''' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x .$$

Используя начальные условия, составим систему и найдем константы C_1, C_2, C_3, C_4.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 5, \\ -C_1 + C_2 + C_4 = 3, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ -C_1 + C_2 - C_4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 5, \\ -2C_1 + 2C_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = 2, C_3 = \frac{5}{2}, C_4 = \frac{3}{2}.$ Частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} + 2e^{x} + \frac{5}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x .$$

Ответ. Частное решение $y = \frac{1}{2} e^{-x} + 2e^{x} + \frac{5}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$.

Задание 9. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x},\ y(0) = -1,\ y'(0) = 5.$$

Решение. Задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения находится в виде: $y = y_0 + y^*$,

где y_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения,

y^* — частное решение исходного неоднородного уравнения.

Составим соответствующее однородное уравнение и найдем корни характеристического уравнения:

$$y'' + 16y = 0, \quad \lambda^2 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 4i.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x,$$

а частное решение имеет вид

$$y^* = (Ax + B)e^{-x},$$

т.к. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}, P_n(x) -$ многочлен первой степени, $\alpha = -1$ не совпадает с корнями характеристического уравнения.

Найдем производные частного решения 1-го и 2-го порядка:

$$y^{*'} = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x}, \quad y^{*''} = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}.$$

Подставим выражения $y^{*'}$, $y^{*''}$ в исходное уравнение и из полученного тождества $-2A + Ax + B + 16Ax + 16B \equiv 34x + 13$ найдем коэффициенты A и B методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} x^1 &\mid A + 16A = 34, \\ x^0 &\mid -2A + B + 16B = 13. \end{aligned} \Rightarrow A = 2, B = 1$$

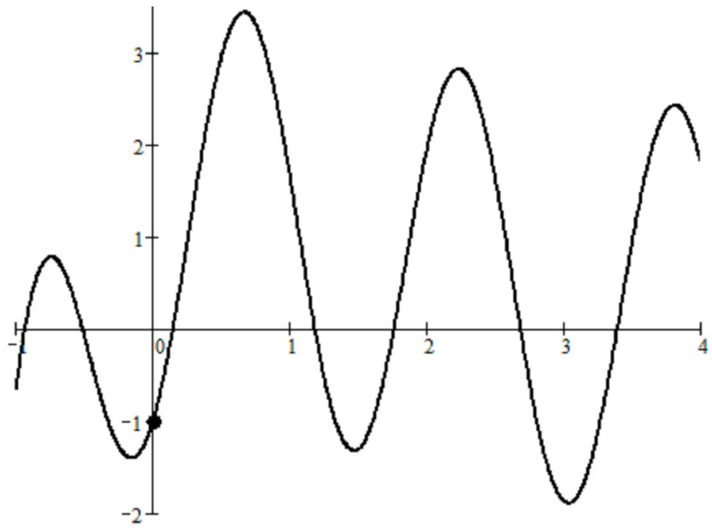


Рис. 23

Тогда $y^* = (2x+1)e^{-x}$ и общее решение исходного уравнения примет вид

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (2x+1)e^{-x}.$$

Используя начальные условия $y(0) = -1,\ y'(0) = 5$, составим систему для вычисления постоянных C_1, C_2:

$$y(0) = -1, \Rightarrow C_1 + 1 = -1,$$

$$y'(0) = 5 \Rightarrow 4C_2 + 2 - 1 = 5$$

Откуда $C_1 = -2$, $C_2 = 1$. Подставим эти значения в общее решение, найдем частное решение (рис. 23) исходного уравнения:

$$y = -2\cos 4x + \sin 4x + (2x+1)e^{-x}.$$

Ответ. $y = -2\cos 4x + \sin 4x + (2x+1)e^{-x}$ — частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$.

Задание 10. Решить дифференциальное уравнение

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее явно y. Понизим порядок уравнения, положив $z = y'$. Тогда $y'' = z'$,исходное уравнение превращается в однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$x \cdot z' = z \cdot \ln\left(\frac{z}{x}\right).$$

Решаем его с помощью подстановки $z = u \cdot x$, откуда $z' = u + x \cdot u'$ и исходное уравнение примет вид

$$u + xu' = u \ln u.$$

Разделяя переменные и интегрируя, последовательно находим:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln x + \ln|C_1|,$$

$$\ln u - 1 = \pm C_1 x, \quad u = e^{1 \pm C_1 x} \quad \Rightarrow \quad z = xe^{1 \pm C_1 x}.$$

Так как $z = y'$, то последнее уравнение приводится к дифференциальному уравнению первого порядка, которое решается интегрированием по частям:

$$y' = xe^{1 \pm C_1 x}$$

$$y = \int xe^{1 \pm C_1 x} dx = \left| u = x, du = dx, dv = e^{1 \pm C_1 x}, v = \pm \frac{1}{C_1} e^{1 \pm C_1 x} \right| = \pm \frac{x \cdot e^{1 \pm C_1 x}}{C_1} - \frac{e^{1 \pm C_1 x}}{C_1{}^2} + C_2.$$

Ответ. Общее решение $y = \pm \dfrac{x \cdot e^{1 \pm C_1 x}}{C_1} - \dfrac{e^{1 \pm C_1 x}}{C_1{}^2} + C_2.$

Задание 11. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение данной системы, получим $x'' = -7x' + y'$. Заменим в получившемся уравнении y' выражением из второго уравнения данной системы:

$$x'' = -7x' - 2x - 5y.$$

В последнем уравнении y заменим выражением $y = x' + 7x$, найденным из первого уравнения системы. В итоге приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$

$$x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x),$$

$$x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим для него характеристическое уравнение и найдем корни:

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 37} = -6 \pm i,$$

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Отсюда находим производную

$$x' = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

Подставляя полученные выражения для x и x' и в уравнение $y = x' + 7x$ получим:

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Ответ. $\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)). \end{cases}$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.2

1. Ответ: $y^2 = \dfrac{1}{-2x - C}$.

2. Ответ: $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}y+2}{\sqrt{3}y-2}\right| - y\right) = \dfrac{1}{x^2} + 2C.$

3. Ответ: $5^x + 5^{-y} + C \cdot \ln 5 = 0$.

4. Ответ: $y = \left(\dfrac{x^2 + C}{3}\right)^3$.

5. Ответ: $x = e^C \cdot \ln|\cos y|$.

6. Ответ: $y = 2 \pm C\cos x$..

7. Ответ: $y = \dfrac{C}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}$.

8. Ответ: $y^2 = \ln(e^x + 2)^2 + 2C$.

9. Ответ: $C - \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + y^2}$.

10. Ответ: $(1 + y)^3 = 24x^2 + 3C$.

11. Ответ: $y = 3 \cdot \sin\left(C + \arcsin\dfrac{x}{3}\right)$.

12. Ответ: $C + \sqrt{2}\sin x = -2\sqrt{1 - \sin y}$.

13. Ответ: $\ln\left|\dfrac{\left(1 + \sqrt{1 - y^2}\right)\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)}{xy}\right| = C$.

14. Ответ: $\ln\left|\dfrac{y^2}{x}\right| = C + x + y.$

15. Ответ: $e^{(x-1)^2} - 1 = \ln\sin^2 y.$

16. Ответ: $6arctg\, x^2 + 4arctg\, y^3 = \pi.$

17. Ответ: $tg\, x \cdot tg\, y = 1$.

18. Ответ: $y = -4 \cdot e^{3x}$.

19. Ответ: $y = \dfrac{8}{x + C}$.

20. Ответ: $A = A_0\, e^{-kt}$.

21. Ответ: 60 мин.

22. Ответ: $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0\left(1 + \dfrac{a}{100}\right)^t$.

23. Ответ: $x^3 p = e^C$.

24. Ответ: $y(t) = \dfrac{\pm 2e^{2t}}{3 \pm e^{2t}}$.

1.4

1. Ответ: $\ln\dfrac{y^2}{|x|} = C - \dfrac{y}{x}.$

2. Ответ: $\ln\left|\dfrac{x}{C}\right| = \cos\left(\dfrac{y}{x}\right).$

3. Ответ: $\ln|x| = \dfrac{1}{2}arctg\dfrac{y}{2x} + C$.

4. Ответ: $\ln|x| = \dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{x^2} + C$.

5. Ответ: $tg\dfrac{y}{2x} = \pm\mathrm{C}x$.

6. Ответ: $x = \pm C\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|$.

7. Ответ: $x = \pm C\left(\dfrac{y}{x} + \sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1}\right)$.

8. Ответ: $\ln|x| = -\dfrac{3}{\dfrac{y}{x} + 3} + C$.

9. Ответ: $\dfrac{y}{x} + \sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1} = \pm C x^2$.

10. Ответ: $x = \pm e^{\frac{y^2}{2x^2} + C}$.

11. Ответ: $\ln|x| == -e^{-\frac{y}{x}} + C$.

12. Ответ: $\dfrac{x}{y} - \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = \pm C x$.

13. Ответ: $\ln|x| = \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{y}{x}}$.

14. Ответ: $\left(\frac{x-1}{y-x}\right)^2 = \pm C(x-1)$.

15. Ответ: $\frac{y-1}{(x-y)^2} = \pm C$.

16. Ответ: $3ln|y - x - 2| + ln|x + y| = 2ln|C|$

17. Ответ: $\ln\left|C\sqrt{y^2 + x^2}\right| = arctg\,\frac{y}{x}$.

18. Ответ: $\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2} = \pm C x^4$.

19. Ответ: $2arctg\,\frac{y}{x} = \ln\left|Cx\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right)^3\right|$.

20. Ответ: $\ln\left|\frac{x+1}{C}\right| = -3\left(\frac{y-1}{x+1}\right)$.

21. Ответ: $\ln|x| = \arcsin\frac{y}{x}$.

22. Ответ: $\ln|y - x| = C + 8\cdot\frac{x-1}{x-y}$.

23. Ответ: $y = \ln|x + 2y + 2|$.

24. Ответ: $\frac{y+2x}{y+5x} = \pm C x$.

1.5.2

1. Ответ: $y = \frac{1}{2}tg\,\frac{x}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x + C)$.

2. Ответ: $y = (\frac{x^2}{2} + C)\cdot\ln|x|$.

3. Ответ: $y = x^{-2}\cdot\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + C\right)$.

4. Ответ: $-\ln|1 - y| = e^x + C$.

5. Ответ: $y = C x - 1$.

6. Ответ: $y = (C - e^{-x})\cdot e^{2x}$.

7. Ответ: $y = \frac{3x + C}{x^2 + 1}$.

8. Ответ: $y = e^{-x}\cdot(C - \ln|1 - x|)$.

9. Ответ: $y = x^2\left(e^x\cdot(x-3) + C\right)$.

10. Ответ: $y = \frac{1}{2\cos x}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x + 2C\right)$.

11. Ответ: $y = \frac{2e^x}{5}\left(\sin x - \frac{\cos x}{2}\right) + Ce^{-x}$.

12. Ответ: $y = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$.

13. Ответ: $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$.

14. Ответ: $y = \frac{e^{-x}}{x}\cdot\left(\frac{3x^2}{2} + C\right)$.

15. Ответ: $y = x(1 - x)$.

16. Ответ: $y = \frac{1}{\cos x}\cdot tg\,x$.

17. Ответ: $y = 1$.

1.6

1. Ответ: $y = \frac{\pm 2}{\sqrt{2 + 4x^2 - 8Ce^{2x^2}}}$.

2. Ответ: $y = \frac{1}{ln|x| + 1 - Cx}$.

3. Ответ: $y = \frac{1}{(x - C)\cos x}$.

4. Ответ: $y = \frac{x^3 + 3x + C}{(x^2 + 1)^2}$.

5. Ответ: $y = \pm\frac{e^{2tgx + C}}{x^2}$.

6. Ответ: $y = \frac{2}{\cos x + \sin x + 2e^{-x}C}$.

7. Ответ: $y=\dfrac{-10}{e^{3x}+10e^{-7x}C}$.

8. Ответ: $y=\dfrac{\left(e^{\frac{x}{2}}(x-2)+C\right)^2}{e^x}$.

9. Ответ: $y=\dfrac{\left(2e^{\frac{x}{2}}(x-2)+C\right)^2}{e^x}$.

10. Ответ: $y=x^4\cdot\left(\ln|x|+\dfrac{C}{2}\right)^2$.

11. Ответ: $2x\cos y=2C-\cos 2y$.

12. Ответ: $y=\dfrac{6x^3}{x^6+6C}$.

13. Ответ: $y=(x^2+1)\cdot\left(2acrtgx+\dfrac{C}{2}\right)^2$.

14. Ответ: $y=\dfrac{1}{2(\ln|x|+1)-Cx}$.

15. Ответ: $y=\sqrt{x^2-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{3/4}+\dfrac{C}{2}\right)^2$.

16. Ответ: $y=\dfrac{1}{x^2(\frac{3}{x}-\ln|x|-C)}$.

17. Ответ: $y=\dfrac{-1}{x(x+C)}$.

18. Ответ: $y=\dfrac{1}{C(x-2)-1}$.

19. Ответ: $y=\dfrac{-1}{(x^3+1)(x+C)}$.

20. Ответ: $y=\dfrac{(e^x+C)^2}{4e^x}$.

21. Ответ: $\ln|y|=-\dfrac{1}{4}\left(3\ln|x|+e^x(x-1)\right)+C\cdot$

22. Ответ: $y=x^{-2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(x^2+C)^2$.

23. Ответ: $x=\dfrac{1}{y}\cdot\left(e^{\frac{y^3}{3}}+C\right)$.

24. Ответ: $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}(x-tgx+C)$.

25. Ответ: $y=\dfrac{\sqrt{2(e^{\sin x}+C)}}{e^{\frac{1}{2}\sin x}}$.

26. Ответ: $y=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}-C}$.

27. Ответ: $y=\dfrac{-1}{x\ln C\sqrt{x}}$.

28. Ответ: $y=e^{\frac{-4x^3}{3}}\cdot\dfrac{1}{e^{-4x-\frac{4}{3}x^3}+C}$.

29. Ответ: $y=\dfrac{x}{x\ln x+x+C}$.

30. Ответ: $\dfrac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\dfrac{1}{2}$.

31. Ответ: $y=\dfrac{-1}{e^{x^4}(e^{4x-x^4}-2)}$.

32. Ответ: $y=\sqrt[3]{-x^2(e^{-2x}-2)}$.

33. Ответ: $y=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{4}{x^3}-\frac{20}{x}+18}}$.

34. Ответ: $y=\cos^{\frac{-1}{3}}x$.

35. Ответ: $y=2\sqrt{e^{2x}}$

36. Ответ: $y=x^2(\frac{x^3}{3}+1)$.

1.7

1. Ответ : $y = e^x + yx + x\sin y = C.$

2. Ответ : $x^2 + y\cdot e^{\frac{x}{y}} = C.$

3. Ответ : $\dfrac{x^2}{2} + ye^x + e^x + \dfrac{y^2}{2} = C.$

4. Ответ : $x^2\cos^2 y + \dfrac{3}{2}y^{\frac{4}{3}} = C.$

5. Ответ : $e^{-y}\cdot x + y = C.$

6. Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + arctg\dfrac{x}{y} + \dfrac{y^2}{2} = C.$

7. Ответ : $x^2\ln y + y\cdot tgx + e^y = C.$

8. Ответ : $x^3y - \cos x - \sin y = C.$

9. Ответ: $x\cdot\sin(x+y) = C.$

10. Ответ : $x^3y^3 + 7x = C.$

11. Ответ : $xe^y + ye^x + 3x - 2y = C.$

12. Ответ : $x^2 + e^{xy} + y = C.$

13. Ответ : $\dfrac{1}{2}x^2y^2 + \dfrac{1}{2}y^2 = C.$

14. Ответ : $x^2\cos^2 y + y^2 = C.$

15. Ответ : $x + \dfrac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{y^2}{2} + C = 0.$

16. Ответ : $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2}y^2 = C,\ \mu(x) = x.$

17. Ответ : $x^2 + \dfrac{2x}{y} = C, \mu(y).$

18 . Ответ : $(x^2+y^2)e^x = C, \mu(x) = e^x.$

19. Ответ : $x^2y - y^3 = C.$

20. Ответ : $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{\ln x}{y} = C.$

21. Ответ : $x - \dfrac{y}{x} = C, \mu(x) = \dfrac{1}{x^2}.$

1.8

1. Ответ : $y = Cx - e^C,\ y = x(\ln x - 1).$

2. Ответ : $y = Cx - \dfrac{1}{C},\ y = \pm 2\sqrt{-x}.$

3. Ответ : $y = Cx - 3C^3,\quad y = \pm\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{9}.$

4. Ответ : $y = Cx + C - C^2,\ y = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}.$

5. Ответ : $y = Cx + \dfrac{1}{C},\ y = \pm 2\sqrt{x}.$

6. Ответ : $y = \dfrac{(1 + x \pm \sqrt{(1+x)(C+1)})^2}{x+1},\ y = 0.$

7. Ответ : $y = 1 + Cx + C,\quad y = 1.$

8. Ответ : $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}.$

9. Ответ : $y = Cx - \ln C,\ y = 1 - \ln\dfrac{1}{x}.$

10. Ответ : $y = Cx + \dfrac{1}{2C^2},\quad y = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}.$

11. Ответ : $y = Cx - \dfrac{1}{3}C^3,\quad y = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}.$

12. Ответ : $y = Cx + C^2,\quad x^2 + 4y = 0.$

13. Ответ : $y = Cx - C - C^2$, $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

14. Ответ : $y = Cx + \sin C$, $y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1 - x^2}$.

15. Ответ : $y = Cx - \ln C$, $y = 1 + \ln x$.

16. Ответ : $y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$, $y = 0$.

17. Ответ : $y = \pm\sqrt{C^2 - 2Cx}$, $y = \pm\sqrt{C^2 + 2Cx}$, $y = 0$.

18. Ответ : $y = Cx - C^4$, $y = 3\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$.

19. Ответ : $x = Ce^{-p} + 2(1 - p)$, $y = x(1 + p) + p^2$.

20. Ответ : $y = Cx - e^C$, $y = x(\ln x - 1)$.

21. Ответ : $y = Cx + C + \sqrt{C}$, $y = -\frac{1}{4(x+1)}$.

22. Ответ : $y = Cx - 3C^2$, $y = \frac{(x)^2}{12}$.

23. Ответ : $y = \frac{x}{\sqrt{\frac{(x-C)^2}{C^2} - \frac{(x-C)^2}{C^2}}}$, $y = 4x$.

24. Ответ : $y = \pm 2\sqrt{e^x}$.

25. Ответ : $y = \frac{C}{x-1}$.

26. Ответ : $2y - x^2 = 0$.

27. Ответ : $y = Cx + C + C^2$, $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2$.

28. Ответ : $y = C(2x - 1)$.

29. Ответ : $y = \pm 2x$, $y = (\frac{x^2}{2C^2} + 2)C$.

30. Ответ: $y = C$, $y = -x^2 + x + C$.

2.1.3.

1. Ответ : $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 C_1 + C_2 x + C_3$.

2. Ответ : $y = \frac{1}{24}x^4 + \cos x + \frac{1}{2}x^2 C_1 + C_2 x + C_3$.

3. Ответ : $y = \frac{1}{840}x^7 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{6}x^3 C_1 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

4. Ответ : $y = -\frac{1}{3e^x}x - \frac{3}{4e^x} + \frac{1}{2}x^2 C_1 + C_2 x + C_3$.

5. Ответ : $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 C_1 + C_2$.

6. Ответ : $y = C_1 + (x \ln x - x)C_2$.

7. Ответ : $y = C_1(-\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) - 2x + C_2$.

8. Ответ : $y = \pm\frac{4}{15}\frac{(9 + C_1x)^{\frac{5}{2}}}{C_1^{\,2}} + C_2x + C_3$.

9. Ответ : $y = -1,\ y = \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{e^{C_1x + C_2\cdot C_1}} - 1 - C_1\right)$.

10. Ответ : $y = e^{-\frac{1}{2}C_1e^x + \frac{1}{2}e^{-x}C_2}$.

11. Ответ: $y = x + C_1;\ y = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2C_1 + x - \frac{1}{4}xC_1^{\,2} + C_2$.

12. Ответ: $y = \pm x + C_1;\ y = -\frac{1}{2}\cos(2x + 2C_1) + C_2$.

13. Ответ: $y = C_1 + (e^{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{x}})C_2$.

14. Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3x^3$.

15. Ответ: $y = 0;\ y = \pm\sqrt{2C_1x + 2C_2}$.

16. Ответ : $y = \frac{3x}{x^3 - 3C}$.

17. Ответ: $y = -\frac{1}{2}\sin 2x - x + C_1\sin x + C_2$.

18. Ответ : $y = \frac{1}{C_1}tg\left(\frac{x + C_2}{C_1}\right)$.

19. Ответ: $y = \ln\left|\frac{C_1}{e^{C_1x + C_2C_1} - 1}\right| + C_1x + C_2C_1$.

20. Ответ : $y = -C_1 arth\,(C_1x) + C_2$.

21. Ответ : $y = -arctg\,\frac{1}{C_1x + C_2}$.

22. Ответ : $y = C_1(x\ln x - x) + C_2$.

23. Ответ : $y = \pm\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1(1 + C_1^{\,2}x^2 + 2C_1^{\,2}xC_2 + C_2^{\,2}C_1^{\,2})}$.

24. Ответ : $y = C_1 + \ln xC_2$.

25. Ответ: $y = 0;\ y = C_1x + C_2;\ \ y = \frac{1}{8}(x - C_1)^2$.

26 Ответ: $y = C_1 + \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}\,\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)C_2}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$.

27. Ответ: $y = 0;\ \ y = \frac{1}{4}C_1^{\,2}x^2 + \frac{1}{2}C_1xC_2 + \frac{1}{4}C_2^{\,2}$.

28. Ответ: $y = C_1x^2 - x + C_2$.

29. Ответ : $y = 1;\ y = \frac{C_1x + C_2 - 1}{C_1x + C_2}$.

30. Ответ : $y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1\ln x + C_2$.

31. Ответ : $y = C_1\sin x + C_2\cos x + 2$.

32. Ответ: $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$.

33. Ответ: $y=-x+C_1$; $y=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}C_1x^2-x+\frac{1}{4}C_1{}^2x+C_2$.

34. Ответ: $y=\pm\left(\frac{1}{4}(2x+C_1)\sqrt{x^2+C_1x}-\frac{1}{8}C_1{}^2\ln\left|\frac{1}{2}C_1+x+\sqrt{x^2+C_1x}\right|+C_2\right)$.

35. Ответ: $y=\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}C_1+C_2\right)$.

36. Ответ: $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+C_2$.

37. Ответ: $y=-e^{-x}C_1-2x+C_2$.

38. Ответ: $y=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2-C_1x+C_2$.

39. Ответ: $y=-\frac{3}{2}$; $y=\frac{1}{2}e^{(C_1x)^2}C_2-\frac{3}{2}$.

40. Ответ: $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$.

41. Ответ: $\mathrm{y}=0$; $y=\frac{1}{4}C_1{}^2x^2+\frac{1}{2}C_1xC_2+\frac{1}{4}C_2{}^2$.

42. Ответ: $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$.

43. Ответ: $y=\frac{1}{C_1}\ln\left|-\frac{1}{C_1(x+C_2)}\right|$.

44. Ответ: $y=C_1+C_2x^2$.

45. Ответ: $y=\frac{1}{4C_1}(4+C_1{}^2x^2+2C_1{}^2xC_2+C_2{}^2C_1{}^2)$.

46. Ответ: $y=-C_1\cos x-x+C_2$.

47. Ответ: $y=1$; $y=\frac{C_1x-1+C_2}{C_1x+C_2}$.

48. Ответ: $y=-\frac{1}{4}x^2+C\ln|x|+C_2$.

49. Ответ: $y=C_1+C_2\ln|x|$.

50. Ответ: $x=y-y\ln y-C_1y-C_2$.

51. Ответ: $y=0$; $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-C_1x-C_2=0$.

52. Ответ: $y=C_1+C_2x^2$.

53. Ответ: $y=-\frac{3}{2}$; $y=\frac{1}{2}e^{(C_1x)^2}C_2-\frac{3}{2}$.

54. Ответ: $y=\pm(\frac{1}{10}(2x+C_1)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{6}C_1(2x+C_1)^{\frac{3}{2}}+C_2)$.

55. Ответ: $y=\frac{1}{4C_1}(4+C_1{}^2x^2+2C_1{}^2xC_2+C_2{}^2C_1{}^2)$.

56. Ответ: $y = C_1 + (x - e^{-x})C_2$.

57. Ответ: $y = C_1 + (\frac{1}{3}x^3 + x)C_2$.

58. Ответ: $y = e^{\frac{1}{2}\left(C_1 \cdot e^{-x} - C_2 \cdot e^{x}\right)}$.

59. Ответ: $y = C_1 + (x\ln x - x)C_2$.

60. Ответ: $y = -\ln\left|C_1 \sin x - C_2 \cos x\right|$.

61. Ответ: $y = xe^x - 2e^x + x + 2$.

62. $y = \frac{1}{4}\left(2x - \frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x} - \frac{1}{32}\ln\left|x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x}\right| + \frac{1}{80}\sqrt{2} - \frac{1}{32}\ln 2 + \frac{1}{32}\ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$.

63. Ответ: $y = \left(\pm e^{\sqrt{2x}}\sqrt{2x}\right) - e^{\sqrt{2x}} + 1$.

64. Ответ: $y = -\frac{7}{6} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}(x-1)^3$.

2.3.

1. Ответ: общее решение $y = e^{\left(1+\sqrt{5}\right)x}C_1 + C_2 e^{\left(1-\sqrt{5}\right)x}$.

2. Ответ: общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x}x$.

3. Ответ: общее решение $y = e^{3x}(C_2 \cos 3x + C_1 \sin 3x)$.

4. Ответ: общее решение $y = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} + C_2 e^{2x}$.

5. Ответ: общее решение $y = e^{3x}(C_2 \cos 2x + C_1 \sin 2x)$.

6. Ответ: общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}x$.

7. Ответ: общее решение $y = C_2 \cos 5x + C_1 \sin 5x$.

8. Ответ: общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x}x$.

9. Ответ: общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$.

10. Ответ: общее решение $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{5x}x$.

11. Ответ: общее решение $y = e^x C_1 \sin 3x + C_2 e^x \cos 3x$.

12. Ответ: общее решение $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

13. Ответ: общее решение $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$.

14. Ответ: общее решение $y = e^{-3x}C_1 + C_2 e^{6x}$.

15. Ответ: общее решение $y = e^{-3x}C_1 + C_2 e^{5x}$.

16. Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{\sqrt{3}x}{3}} + C_4$.

17. Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{x}$.

18. Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-3x}$.

19. Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{2x}$.

20. Ответ: общее решение $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{x}x + C_3 \sin x + C_4 \cos x$.

21. Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-0{,}52x} - C_4 e^{-2{,}24x}\sin(1{,}63)x + C_5 e^{-2{,}24x}\cos(1{,}63)x$.

22. Ответ: Частное решение $y = 5 - 6e^{x} + e^{6x}$.

23. Ответ : Частное решение $y = 1 + x - e^{x}$.

24. Ответ : Частное решение $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{2x}$.

25. Ответ : Частное решение $y = 1 - \cos x$.

26. Ответ : Частное решение $y = \frac{133}{12} + \frac{133}{132}e^{12x} - \frac{133}{11}$.

27. Ответ : Частное решение $y = \frac{133}{2}e^{x} - \frac{133}{2}\sin x - \frac{133}{2}\cos x$.

28. Ответ : Частное решение $y = 1 + e^{-2x} - 2e^{-x}$.

29. Ответ : Частное решение $y = e^{\frac{-1}{2}x}\left(\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

30. Ответ : Частное решение $y = -2e^{x} + \sin 2x + \cos 2x$.

31. Ответ : Частное решение $y = -4 + 3e^{x} + e^{-x}$.

32. Ответ : Частное решение $y = 8e^{x} - 7e^{2x} + 5xe^{2x}$.

33. Ответ : Частное решение $y = -\cos x$.

34. Ответ : Частное решение $y = \frac{-45}{26}e^{2x} + \frac{15}{13}\sin 3x - \frac{10}{13}\cos 3x$.

35. Ответ : Частное решение $y = -2 + 3\sin 3x + 2\cos 3x$.

36. Ответ : Частное решение $y = 2e^{x}x$

37. Ответ : Частное решение $y = 1 - e^{-x} + e^{x}x$

38. Ответ : Частное решение $y = -5e^{\sqrt{2}x} + 2e^{3\sqrt{2}x}$

39. Ответ : Частное решение $y = \sin 2x + \cos 2x$.

2.4.

1. Ответ : общее решение $y = x^{2} - e^{-x}C_1 - 3x + C_2$.

2. Ответ : общее решение $y = e^{x}(C_2\sin 2x + C_1\cos 2x) + \frac{1}{2}e^{-x}(-2\sin 2x + \cos 2x)$.

3. Ответ : общее решение $y = e^{4x}C_2 + e^{5x}C_1 + 3e^{-2x}$.

4. Ответ: общее решениеу $= C_1\cos 6x + C_2\sin 2x + 1 + 2x - x^{3}$.

5. Ответ: общее решениеу $= e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - 3\sin 2x + 4\cos 2x$.

6. Ответ : общее решение $y = e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) + \frac{65}{17}\sin 3x + \frac{39}{17}\cos 3x$.

7. Ответ : общее решение $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + x\sin 4x$.

8. Ответ: общее решениеу $= C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x^{4} - 3$.

9. Ответ : общее решение $y = e^{6x}(C_2\sin 2x + C_1\cos 2x) + \frac{1}{2}e^{6x}$.

10. Ответ : общее решение $y = -3x^{2} + \frac{1}{2}e^{2x}C_1 - 6x + C_2$.

11. Ответ : общее решение $y = e^{\frac{x}{2}}C_1 + C_2e^{\frac{-x}{3}} + \frac{1}{7}e^{2x}$.

12. Ответ : общее решение $y = e^{-3x}C_1 + C_2e^{\frac{-x}{2}} - \frac{3108}{221}\cos 2x - \frac{1110}{221}\sin 2x$.

13. Ответ : общее решение $y = e^{3x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + \frac{38}{109}\cos 5x - \frac{54}{109}\sin 5x.$

14. Ответ : общее решение $y = 2e^x \sin 2x - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2.$

15. Ответ : общее решение $y = e^{-6x}C_1 + C_2e^{4x} + \sin 3x.$

16. Ответ : общее решение $y = C_1 e^{\frac{(\sqrt{5}-1)x}{2}} + C_2 e^{\frac{(\sqrt{5}+1)}{-2}x} + C_3 - \frac{1}{5}\sin x + \frac{7}{5}\cos x.$

17. Ответ : частное решение $y = e^{3x}(\frac{2}{25}\sin 2x - \frac{8}{75}\cos 2x) + \frac{2}{25}\sin 2x + \frac{8}{75}\cos 2x.$

18. Ответ : частное решение $y = -\frac{4}{13}\sin x - \frac{7}{13}\cos x - \frac{4}{65}e^{-5x} + \frac{8}{5}.$

19. Ответ : частное решение $y = -5e^{-2x} - 2e^{-2x}x + (5 - 3x + x^2)e^{-x}.$

20. Ответ : частное решение $y = \frac{14635}{14641}e^{11x} - \frac{14639}{1331}e^{11x}x + \frac{6}{14641} + \frac{4}{14641}x + \frac{x^2}{121}.$

21. Ответ : частное решение $y = \frac{58}{25}\sin x - \frac{6}{25}\cos x + \frac{1}{25}(6 + 5x)e^{2x}.$

22. Ответ : частное решение $y = \frac{22}{3}e^x e^{-1} + \frac{11}{12}e^{-2x}e^2 - \frac{19}{4} - \frac{1}{2}x - 2x^2.$

23. Ответ : частное решение $y = e^x(1.326 \sin x + 0.0228 \cos x) - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3.$

24. Ответ : частное решение $y = \frac{3}{16}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}x + \frac{1}{16}(4x - 3)e^{3x}.$

25. Ответ : частное решение $y = \frac{\sqrt{5}}{10}e^{(-2+\sqrt{5})x} - \frac{\sqrt{5}}{10}e^{(-2-\sqrt{5})x} - x.$

2.5.

1. Ответ : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|.$

2. Ответ : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|.$

3. Ответ : $y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4}x.$

4. Ответ : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \ln|\cos x| \cos x.$

5. Ответ : $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \frac{1}{e}.$

6. Ответ : $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x|.$

7. Ответ: $y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|\right).$

8. Ответ : $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}x + \frac{1}{4}(-1 + x)e^x.$

9. Ответ: $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}(9-\sqrt{77})x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}(9+\sqrt{77})x} + \frac{160}{3} - 6x + \frac{1}{3}x^2.$

10. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1 + \sin x \cdot \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|.$

11. Ответ: $y = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|\right)$.

12. Ответ: $y = e^{x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) - e^{x}\left(1 + \cos x \cdot \ln\left|\dfrac{\sin x}{\cos x + 1}\right|\right)$.

13. Ответ: $y = \dfrac{C_1 + C_2 e^{2x}}{1+x}$.

14. Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x \cdot \ln\left|\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + 1}\right|$.

15. Ответ: $y = e^{x}\left(C_1 + C_2 x + x(\ln|x| - 1)\right)$.

16. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\sin x + \ln|\cos x|\cos x$.

17. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \ln|\sin x|\sin x$.

18. Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} x + \dfrac{1}{2x} e^{-2x}$.

19. Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}(3x+1)$.

20. Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x + \dfrac{1}{2x} e^{2x}$.

21. Ответ: $y = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{80}\sin 2x + \dfrac{1}{40}x - \dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{2}C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

22. Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - \dfrac{1}{20}\cos^2 x - \dfrac{1}{4}x^2 + C_3 x + C_4$.

23.

$$y = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\cdot\left(C_1 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\cdot\left(C_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + C_4 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right) + \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{2}xe^{x} - 3e^{x}.$$

24. Ответ: $y = \dfrac{1}{10}x^3 + \dfrac{1}{4}e^{-x} + \dfrac{1}{25}e^{-5x}C_1 - \dfrac{3}{50}x^2 + C_2 x + C_3$.

25. Ответ: $y = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

26. Ответ: $y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{65}\sin 2x - \dfrac{1}{130}\cos 2x + C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{\frac{-1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

27. Ответ: $y = -\dfrac{1}{2}\left(C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)\right) + \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{4}x^2 + C_3 x + C_4$.

28. Ответ: $y = 3C_2\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 3C_1\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 3\sin x + \dfrac{1}{2}x\cos x + \dfrac{1}{2}C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

29. Ответ: $y = -\dfrac{1}{5}C_2 \sin\sqrt{5}x - \dfrac{1}{5}C_1 \cos\sqrt{5}x + \dfrac{1}{3}xe^{x} - \dfrac{7}{9}e^{x} - \dfrac{1}{2}x^2 + C_3 x + C_4$.

30. Ответ: $y = -\dfrac{49}{4624}\sin 4x + \dfrac{x}{68}\cos 4x - \dfrac{33}{9248}\cos 4x - \dfrac{x}{272}\sin 4x + C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3$.

31. Ответ: $y = -1 + \dfrac{1}{4}e^{x} + C_1 \sin x + C_2 \cos x + +C_3 e^{-x}$.

32. Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{4}\left(2\,arcth\, e^{x} + \ln\left|\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right|\right)\cdot\left(e^{2x} - 1\right)e^{-x}$.

3.5.

1. Ответ: $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$; $y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

2. Ответ: $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$; $y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$.

3. Ответ: $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$; $y = \frac{1}{2}C_1e^{3t} - \frac{1}{4}C_2e^{-3t}$.

4. Ответ: $x = 3C_1e^{-3t} - C_2e^t$; $y = C_1e^{-3t} + C_2e^t$.

5. Ответ: $x = e^t(C_1 \sin t + C_2 \cos t)$; $y = -e^t(C_1 \cos t - C_2 \sin t)$.

6. Ответ: $x = e^t(C_1 + C_2(t+1))$; $y = e^t(C_1 + C_2t)$.

7. Ответ: $x = C_1 + C_2e^{5t}$; $y = C_1 - 4C_2e^{5t}$.

8. Ответ: $x = C_1e^{5t} + C_2e^{3t}$; $y = C_1e^{5t} + 3C_2e^{3t}$.

9. Ответ: $x = C_2e^{2t}$; $y = C_1e^{4t} - \frac{1}{2}C_2e^{2t}$.

10. Ответ: $x = C_1 + C_2e^{2t}$; $y = C_1 - C_2e^{2t}$.

11.Ответ: $x = C_1e^{4t} + C_2e^{7t}$; $y = -\frac{1}{2}C_1e^{4t} - 2C_2e^{7t}$.

12. Ответ: $x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$; $y = -\frac{1}{2}C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$.

13. Ответ: $x = C_1e^{4t} + C_2e^{8t}$; $y = -C_1e^{4t} + \frac{1}{3}C_2e^{8t}$.

14. Ответ: $x = C_1e^{5t} + C_2e^{3t}$; $y = -C_1e^{5t} + C_2e^{3t}$.

15. Ответ: $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}$; $y = -C_1e^{3t} - \frac{8}{3}C_2e^{-2t}$.

16. Ответ: $x = -\frac{1}{10}e^{3t} + \frac{12}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}\sin t - \frac{3}{10}\cos t$; $y = \frac{1}{10}e^{3t} - \frac{6}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}(\cos t + \sin t)$.

17. Ответ: $x = e^{-t}$; $y = -e^{-t}$; $z = 0$.

18. Ответ: $x = 2e^{-t} + 2e^{2t} - \cos t + 3\sin t$; $y = -2e^{-t} + e^{2t} - \sin t + 2\cos t$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2004. – 636 с.
2. Березин, И.С. Методы вычислений. В 2 ч. [Текст] / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – Ч.II. – 639 с.
3. Босов, А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учебное пособие для втузов / А.В. Босов, А.С. Якимова, А.В. Пантелеев. – М.: Издательство «Высшая школа», 2001. – 376 с.
4. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 608 с.
5. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 4-е изд. – Ростов н/Д: изд-во «Феникс», 2006. – 512 с.
6. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АПП «Джангар», ООО «Большая медведица», 2001. – 863 с.
7. Гутер, Р.С. Дифференциальные уравнения [Текст] / Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. – М.: Издательство «Высшая школа», 1976. – 248 с.
8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: Оникс; Мир и Образование, 2007. – Ч.II. – 416 с.
9. Демидович, Б.П. Численные методы анализа [Текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
10. Демидович, Б.П. Моденов, В.П. Дифференциальные уравнения / [Текст] / Б.П. Демидович, В. П. Моденов. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 288 с.
11. Дьяконов, В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. [Текст] / В.П. Дьяконов – М.: Нолидж, 2001. – 1296 с.,ил.
12. Жарова, Н.Р. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Н.Р. Жарова, А.М. Завьялов, Л.Г. Кузнецова. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2002. – 164 с.
13. Калиткин, Н.П. Численные методы. [Текст] / Н.П. Калиткин. – М.: Наука, 1978.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 576 с.
15. Краснов, М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями [Текст] / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. – Изд-во ЛКИ, 2008. – 256 с.
16. Кузнецова, Л.Г. Прикладная математика [Текст]: учеб. пособие / Л.Г. Кузнецова. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2000. – 144 с.
17. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике [Текст]: учеб. пособие для втузов / Л.А. Кузнецов. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 175 с.
18. Лапчик, М.П. Численные методы [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 030100 «Информатика» / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – М.: Академия, 2004. – 384 с.
19. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Н.М. Матвеев. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 432 с.
20. Плис, А.И. MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров [Текст] / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.
21. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л.С. Понтрягин. – М.: Физматгиз, 1965. – 331 с.
22. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: учеб. пособие / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Рутуть, под общ. ред. А.П. Рябушко. – 3-е изд., испр.: – Минск: Выш. шк., 2007. – 396 с.
23. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А.Ф. Филиппов. – Изд-во ЛКИ, 2008. – 240 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальное уравнение —
уравнение, связывающее независимые переменные, неизвестную функцию, зависящую от этих переменных, и производные (или дифференциалы) этой функции:

$$F(x_1, x_2, ..., x_k, f, f'_{x_1}, f''_{x_2}, ..., f_{x_k}^{(n)}) = 0.$$

при $k = 1$:

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$F(x, f, f', f'', ..., f^{(n)}) = 0$$

при $k \geq 2$:

Уравнение в частных производных

$$F(x_1, x_2, ..., x_k, f, f'_{x_1}, f''_{x_2}, ..., f_{x_k}^{(n)}) = 0$$

при $n = 1$:

ОДУ первого порядка
Уравнение с разделяющимися переменными $y' = f(x) \cdot g(y)$
Однородное дифференциальное уравнение $y' = f(\frac{y}{x})$
Линейное дифференциальное уравнение $y' + p(x) \cdot y = f(x)$
Уравнение Бернулли $y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^m, m \neq 0, 1$
Уравнение в полных дифференциалах – уравнение вида $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, если $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
Уравнение Лагранжа $P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$
Уравнение Клеро $y = xy' + \varphi(y')$

при $n \geq 2$:

ОДУ высших порядков
ОДУ, допускающие понижения порядка
Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка $y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)\,y = f(x)$

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для дифференциальных уравнений высших порядков наряду с задачей Коши представляют большой интерес краевые (или граничные) задачи, в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной точке, а на концах некоторого отрезка $[a, b]$ и ищется решение внутри этого отрезка. Эти условия называют *краевыми условиями*. Они состоят в том, что на обоих концах отрезка $[a, b]$ задаются значения искомого решения или значения производных от искомого решения или (в общем случае) линейная комбинация ординат и производных решения.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным краевым условиям, называется *краевой задачей*.

Краевые задачи возможны для дифференциальных уравнений второго и высших порядков.

Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

формулируется так: найти функцию $y\,(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (1) и принимающую при $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ заданные значения $y\,(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, т.е. необходимо найти такую интегральную кривую данного дифференциального уравнения, которая проходит через точки $M_1\,(a, y_a)$, $M_2\,(b, y_b)$.

Общая краевая задача может иметь решение (одно, несколько или бесконечное множество), а может и вовсе не иметь решения. Так, например, краевая задача

$$y'' = 0; \qquad y(0) - y(\mathrm{p}) = 1; \qquad y'(0) + y'(\mathrm{p}) = 0$$

не имеет решений.

Пример 1. Решить краевую задачу:

$$y'' - y = 0; \qquad y(1) = 1; \qquad y'(0) = 0.$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение $y'' - y = 0$ является линейным однородным второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим для него характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$ — простые действительные числа, поэтому общее решение данного линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (п. 2.3.1)

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$\Rightarrow$ $y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$.

Полагая в последнем равенстве $x = 0$ и $x = 1$, учитывая краевые условия, получим для нахождения значений постоянных C_1 и C_2 неоднородную линейную систему:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0; \\ C_1 e + C_2 e^{-1} = 1. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e & e^{-1} \end{vmatrix} = e^{-1} + e \neq 0,$$

следовательно, она имеет единственное решение:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{e^{-1}+e}; \\ C_2 = \dfrac{1}{e^{-1}+e}. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получим решение заданной краевой задачи:

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e + e^{-1}}.$$

Пример 2. *Задача о критических скоростях.*

Найти критические скорости тонкого вращающегося вала длиной l. Радиус поперечного сечения вала a, сила тяжести P, модуль упругости материала E.

Решение. При увеличении угловой скорости вращающегося вала от $щ_0 = 0$ до некоторого предельного значения $щ = щ_1$ ($щ_1$ — критическая угловая скорость) вал сохраняет свою прямолинейную ось.

В момент достижения критической скорости $щ_1$ вал искривляется и начинает «бить», при дальнейшем увеличении $щ$ биение прекращается, а затем вновь возникает при достижении второй критической скорости $щ_2$, и так периодически.

При вращении изогнутого вала на каждый его элемент действует центробежная сила, которую можно считать непрерывно распределённой нагрузкой.

На элемент вала $dо$ (рис. 1) действует центробежная сила

$$F = m\,щ^2 з,$$

где m — масса элемента $dо$; $щ$ — угловая скорость вращения; $з$ — прогиб, равный радиусу вращения элемента $dо$.

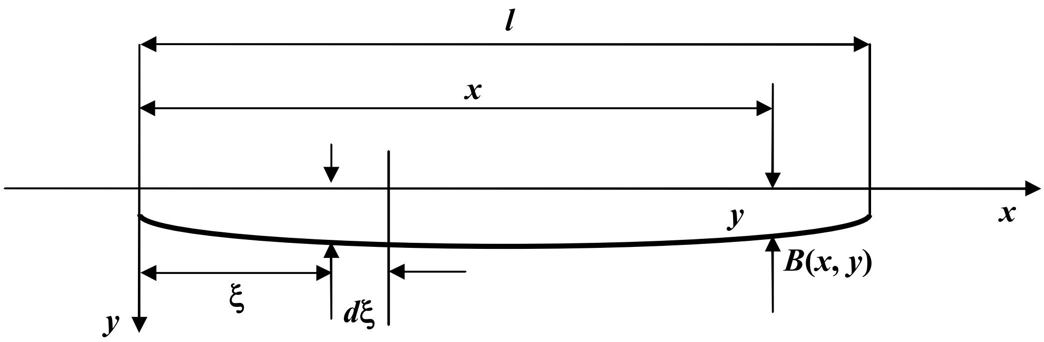


Рис. 1

Сила тяжести элемента $dо$ равна $\dfrac{P}{l}dо$, масса: $m = \dfrac{P}{g\,l}dо$, элементарная центробежная сила: $d\,F = \dfrac{P}{g\,l}\,щ^2\,з\,dо$.

Прогиб $з$ является функцией координаты о, определяемой уравнением упругой линии

$$f(о) = \frac{P}{g\,l}\,щ^2\,з$$

Тогда элементарная центробежная сила равна:

$$d\,F = f(о)\,d\,о = \frac{P}{g\,l}\,щ^2\,з\,dо. \qquad (1)$$

Момент силы (1) относительно произвольного сечения $B(x, y)$

$$d\,F\,(x - о) = (x - о)\,f(о)\,dо.$$

Изгибающий момент

$$M = \int_0^x (x-\xi) f(\xi) d\xi \tag{2}$$

Дифференцируем выражение (2) дважды по параметру x:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x f(\xi)d\xi - \int_0^x \xi f(\xi)d\xi \right) = \int_0^x f(\xi)d\xi + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi\,;$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(\xi)d\xi\right) = f(x).$$

Таким образом, получили

$$\frac{d^2M}{dx^2} = f(x)\,. \tag{3}$$

На основании равенства (1) имеем

$$f(x) = \frac{P}{g\,l}\ щ^2 y. \tag{4}$$

Поэтому из (3) и (4) получим:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{P}{g\,l}\omega^2 y\,;$$

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P}{g\,l}\omega^2 y\,.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{P}{EJ\,g\,l}\omega^2 y = 0\,, \tag{5}$$

где J — момент инерции площади сечения вала.

Обозначим

$$q^4 = \frac{P}{EJ\,g\,l}\omega^2\,.$$

Дифференциальное уравнение (5) примет вид

$$\frac{d^4y}{dx^4} - q^4 y = 0\,. \tag{6}$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение четвёртого порядка. Решим его. Составим характеристическое уравнение

$$k^4 - q^4 = 0;$$
$$(k^2 - q^2)\,(k^2 + q^2) = 0;$$
$$(k - q)\,(k + q)\,(k^2 + q^2) = 0.$$

Его корни $k_{1,2} = \pm q$, $k_{3,4} = \pm i\,q$.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (6) примет вид:

$$y = C_1e^{qx} + C_2e^{-qx} + C_3\cos qx + C_4\sin qx\,. \tag{7}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 введём краевые условия. На опертых концах вала прогиб и кривизна оси вала равны нулю.

Получим следующие краевые условия:

при $x = 0$ $\quad y = 0;$

при $x = 0$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0\,;$

при $x = l$ $\quad y = 0;$

при $x = l$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Дифференцируем общее решение (7) дважды по параметру x:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 q e^{qx} - C_2 q e^{-qx} - C_3 q \sin qx + C_4 q \cos qx\,;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 q^2 e^{qx} + C_2 q^2 e^{-qx} - C_3 q^2 \cos qx - C_4 q^2 \sin qx\,.$$

Учитывая краевые условия, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + C_3 \cos 0 + C_4 \sin 0; \\ 0 = C_1 q^2 + C_2 q^2 - C_3 q^2 \cos 0 - C_4 q^2 \sin 0; \\ 0 = C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \cos ql + C_4 \sin ql; \\ 0 = C_1 q^2 e^{ql} + C_2 q^2 e^{-ql} - C_3 q^2 \cos ql - C_4 q^2 \sin ql. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0; \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0; \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \cos ql + C_4 \sin ql = 0; \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} - C_3 \cos ql - C_4 \sin ql = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Складывая и вычитая два первых уравнения последней системы (8), получим:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2; \\ C_3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Аналогично, складывая и вычитая два последних уравнения системы (8), получим:

$$\begin{cases} C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} = 0; \\ C_3 \cos ql + C_4 \sin ql = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Подставим значения (9) в равенство (10):

$$\begin{cases} C_1 e^{ql} - C_1 e^{-ql} = 0; \\ C_4 \sin ql = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 (e^{ql} - e^{-ql}) = 0; \\ C_4 \sin ql = 0. \end{cases}$$

Так как $l \neq 0$, $q \neq 0$, то $e^{ql} - e^{-ql} \neq 0$. Поэтому

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 0; \\ C_3 = 0; \\ C_4 \sin ql = 0. \end{cases}$$

Если $C_4 = 0$, то уравнение упругой линии вала

$$y = 0,$$

т.е. упругая линия совпадает с осью OX и вал не искривлён. При искривлении вала необходимо, чтобы $C_4 \neq 0$, но также необходимо, чтобы

$$\sin ql = 0.$$

Отсюда $ql = k$p, т.е.

$$q = \frac{k\pi}{l}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Если $k = 0$, то $q = 0$ и уравнение упругой линии вала имеет вид $y = C_1 + C_2 + C_3 = 0$, т.е. вал прямой.

При остальных значениях q вал искривляется. В этих случаях (при $q = q_1 =$ p/l, $q = q_2 = 2\dfrac{\pi}{l}$, ...) уравнение упругой линии вала имеет вид

$$y = C_4 \sin qx.$$

Упругая линия будет синусоидальной:

$$\begin{cases} y = C_4 \sin\dfrac{\pi}{l}x; \\ y = C_4 \sin\dfrac{2\pi}{l}x; \\ y = C_4 \sin\dfrac{3\pi}{l}x; \\ \quad\quad .... \end{cases}$$

содержащей по длине вала одну, две, три и т.д. полуволн.

Таким образом, при критическом значении $q_{\text{кр}} = \dfrac{k\pi}{l}$ найдём критические скорости.

Если $q = q_{\text{кр}}$, $\omega = \omega_{\text{кр}}$, то

$$q_{\kappa р}{}^4 = \frac{P}{EJ\ g\ l}\omega_{\kappa р}{}^2$$

(т.к. $q^4 = \dfrac{P}{EJ\ g\ l}\omega^2$) $\Rightarrow$ $\dfrac{k^4\pi^4}{l^4} = \dfrac{P}{EJ\ g\ l}\omega_{\kappa р}{}^2$ $\Rightarrow \omega_{\kappa р}{}^2 = \dfrac{EJ\ k^4\pi^4 g}{m\,l^3}$ $\Rightarrow$ $\omega_{\kappa р} = \dfrac{k^2\pi^2}{l}\sqrt{\dfrac{EJ\ g}{m\,l}}$.

Минимальная критическая скорость при $k = 1$ равна:

$$\omega_{\kappa р_1} = \frac{\pi^2}{l}\sqrt{\frac{EJ\ g}{m\,l}}.$$

РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ НА КОМПЬЮТЕРЕ

В качестве примера использования дифференциальных уравнений в практической деятельности рассмотрим решение одной из основных задач теоретической механики — ***исследование движения материальной точки***.

Теоретическая механика являе тся одной из первых общетехнических дисциплин, в которой студенты самостоятельно составляют математические модели механических систем и проводят их исследования. При исследовании движения материальной точки необходимо составить дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки и найти его общее решение. Решение задания при помощи компьютера дает возможность упростить вычисления и оценить правильность проведенного расчета.

Постановка задачи

Тело A движется поступательно параллельно вертикальной плоскости $y_1O_1Z_1$. Шарик M, рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу тела A. Нужно найти уравнение относительного движения этого шарика $x = f(t)$, приняв за начало отсчета точку O. Найти также координату x при заданном значении $t = t_1$.

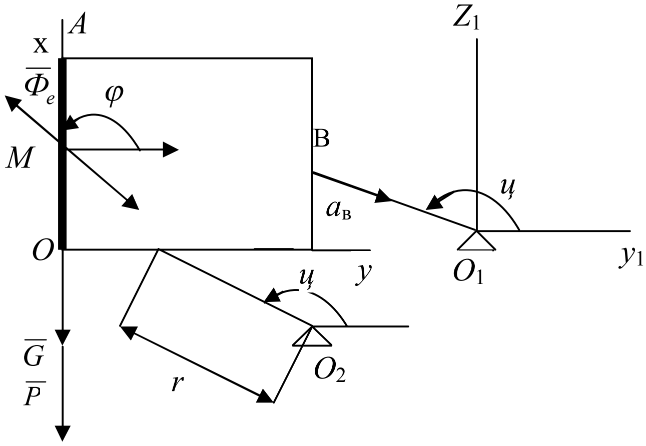


Рис. 2

Введем следующие обозначения:

m — масса шарика; ω — постоянная угловая скорость кривошипов;

c — коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик;

l_0 — длина недеформированной пружины;

f — коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала;

x_0 и x'_0 и — начальная координата и проекция начальной скорости на ось X.

В таблице приведены исходные данные задачи.

Исходные данные

Таблица

M, кг	ω, рад/с	Начальные данные x_0, м	x'_0, м/с	t_1, с	*C*, Н/м	l_0, м	*r*, м
0.05	4р	0.2	– 0.5	0.2	20	0.4	0.1

Решение задачи

Свяжем с телом А подвижную систему ОХУ, направив вдоль канала. Поступательное движение тела А является переносным движением для шарика М.

Движение шарика вдоль трубки является его относительным движением. Для случая поступательного движения относительное движение точки определяется уравнением

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{P}_i + \overline{\Phi}_e.$$

К шарику М приложены силы: сила тяжести, реакция пружины $\overline{P}$ и нормальная реакция стенки трубки $\overline{N}$.

Поскольку движение механической системы происходит в плоскости $y_1O_1Z_1$, реакция $\overline{N}$ лежит в этой плоскости. Переносная сила инерции $\overline{\Phi}_e$ направлена противоположно переносному ускорению шарика $\overline{a}_e$. Переносное движение является поступательным, а при поступательном движении тела ускорения всех его точек равны по величине. Следовательно, для определения переносного ускорения $\overline{a}_e$ точки М достаточно определить ускорение любой точки тела А.

Рассмотрим точку В, принадлежащую телу А и кривошипу O_1В. При постоянной угловой скорости щ ускорение точки В равно центростремительному ускорению $\overline{a}_b = \overline{a}_B{}^{\omega}$.

Величина этого ускорения $\overline{a}_B{}^{\omega} = \omega^2 \cdot r$. Переносное ускорение точки М $a_e = \overline{a}_B{}^{\omega} = \omega^2 \cdot r$. Модуль переносной силы инерции $\Phi_e = m \cdot a_e$. Основное уравнение относительного движения точки М будет иметь вид

$$m \cdot_r \overline{a}_e = \overline{G} + \overline{P} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e.$$

Запишем это уравнение в проекции на ось X:

$$m \cdot x'' = -G - P + \Phi_e \sin\varphi.$$

С учетом того, что $\varphi = \omega \cdot t,\ G = mg$, имеем

$$m \cdot x'' = m\omega^2 r \sin(\omega t) - mg - c(x - l_0).$$

Или, окончательно, получим

$$x'' = \omega^2 r \sin(\omega t) - g - \frac{c}{m}(x - l_0). \quad (1)$$

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Приведем его к виду

$$x'' + \frac{cx}{m} = \omega^2 r \sin(\omega t) - g + \frac{cl_0}{m}. \quad (2)$$

Решение уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов.

Общее решение уравнения (2) будем искать в виде:

$$x = x_0 + x_1{}^* + x_2{}^*, \quad (3)$$

где x_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения;

x_1^*, x_2^* — частные решения неоднородного уравнения.

Составив характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0,$$

найдем $\lambda_1 = 20i, \ \lambda_2 = -20i.$ Тогда, $x_0 = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t.$

Частные решения x_1^* и x_2^* найдем в виде:

$$x_1^* = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad x_2^* = C.$$

Вычисляя производные $x_1^{*\prime}, x_1^{*\prime\prime}, \ x_2^{*\prime}, x_2^{*\prime\prime}$ методом неопределенных коэффициентов, найдем

$$A = \frac{\pi^2}{10(25-\pi^2)} = -\frac{\pi^2}{10(\pi^2-25)} = -\frac{\pi^2}{10(\pi^2-25)} = 0{,}06521, \ B = 0.3755 = \frac{751}{2000}.$$

Общее решение уравнения (2) примет такой вид:

$$x = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t - \frac{\pi^2 \sin 4\pi t}{10(\pi^2-25)} + \frac{751}{2000}. \tag{4}$$

Нахождение коэффициентов C_1, C_2 производится с использованием начальных условий уравнения

$$x(0) = 0.2, \ x'(0) = -0.5,$$

где $x(0) = x_0$, а $x'(0) = x_0'$ (см. табл.) и дает такие результаты:

$$C_1 = -0{,}1755, \ C_2 = -0{,}0659.$$

Тогда частное решение уравнения (4) примет вид:

$$x = -0{,}1755 \cos 20t - 0{,}0659 \sin 20t + 0{,}06521 \sin 4\pi t + 0{,}3755. \tag{5}$$

Как видим, процесс нахождения решения дифференциального уравнения (1) связан с громоздкими вычислениями, поэтому для ускорения процесса вычисления, используем математические системы *Maple и MathCAD.*

Заметим, что, для *аналитических* вычислений предпочтительнее использовать *Maple. Численное и графическое* решения удобнее находить, применяя математический пакет *MathCAD.*

Аналитическое решение уравнения (1) в системе Maple.

Сначала зададим исходные данные задачи таблицы следующим образом:

m:=0.05; - масса шарика;

$m := .05$

w:=4*Pi; - угловая скорость;

$w := 4\pi$

> **c:=20;** - коэффициент жесткости**;**

$c := 20$

> **lo:=0.4;** - длина пружины;

$lo := .4$

> **R:=0.1;**

$R := .1$

> **g:=9.8;** - ускорение свободного падения;

$g := 9.8$

Решение дифференциальных уравнений самых различных типов — одно из достоинств этой математической системы. Среди прочих функций, содержащихся в инструментальном пакете *Maple* ***Detools,*** рассмотрим функцию ***dsolve(dens,vars,options).***

Функция ***dsolve(dens,vars,options)*** применяется в *Maple* для решения дифференциальных уравнений. Параметр ***dens*** включает одно уравнение или систему уравнений, начальные условия (если они заданы), а при решении краевых задач — краевые условия; ***vars*** содержит переменные, входящие в состав уравнения; ***options*** задает один из методов решения:

- аналитическое решение (принято по умолчанию);
- решение в явном виде;
- решение через преобразование Лапласа;
- решение в виде ряда;
- решение в численном виде (опция ***numeric***).

В частности, решение уравнения (1) с применением этой функции имеет вид:

>**dsolve(diff(x(t),t$2)=w^2*R*sin(w*t)-g-(c/m)*(x(t)-lo),x(t));**

$$x(t) = \_C1\ \sin(20\ t) + \_C2\ \cos(20\ t) - \frac{1}{10}\frac{\pi^2 \sin(4\ \pi\ t)}{\pi^2 - 25} + \frac{751}{2000}$$

Последняя строка содержит найденное при помощи *Maple* общее решение уравнения (1).

Нахождение значений постоянных интегрирования C1 и C2 в пакете Maple выглядит следующим образом:

> **xo1:=x(0)=0.2;**

> **xo2:=D(x)(0)=-0.5;**

➢ **dsolve({diff(x(t),t$2)=w^2*R*sin(w*t)-g-(c/m)*(x(t)-**

–lo),xo1,xo2},x(t));

$$x(t) = \frac{1}{200}\frac{(4\ \pi^3 - 5\ \pi^2 + 125\ )\sin(20\ t)}{\pi^2 - 25} - \frac{351}{2000}\cos(20\ t) - \frac{1}{10}\frac{\pi^2 \sin(4\ \pi\ t)}{\pi^2 - 25} + \frac{751}{2000}$$

— частное решение данного дифференциального уравнения, вычисленное в *Maple,*

$$\text{где}\ \_C1 = C_2 = \frac{(4\pi^3 - 5\pi^2 + 125)}{200(\pi^2 - 25)} = -0.0659\,,\ \_C2 = C_1 = -\frac{351}{2000} = -0{,}1755,$$

$$A = -\frac{\pi^2}{10(\pi^2 - 25)} = 0{,}06521,\ B = 0{,}3765 = \frac{751}{2000}.$$

К сожалению, построить график полученного *аналитического* решения с использованием *Maple*, без задания опции ***numeric*** не представляется возможным. Для построения графика решения дифференциального уравнения необходимо решить его численным методом. Опция ***numeric,*** введенная в функцию ***dsolve,*** позволяет найти *численное* решение этого дифференциального уравнения.

Ниже рассмотрим численные решения дифференциального уравнения (1) в разных математических системах: *Maple* и *MathCAD.*

Решение уравнения (1) методом Рунге-Кутта в системе Maple

При использовании опции ***numeric*** решение возвращается в виде специальной процедуры ***rkf45***, реализующей по умолчанию метод решения дифференциальных уравнений Рунге-Кутта порядка 4 и 5.

В список параметров функции ***dsolve*** можно явным образом включить указание метода решения.

Например, опция *method=dverk* задает решение методом Рунге-Кутта порядка 7 и 8.

С помощью опции ***'abserr'=aerr*** можно задать величину абсолютной погрешности измерения.

Таким образом, в математической системе *Maple* численное решение уравнения (1) с выводом графика полученного решения может иметь следующий вид:

```
> F:=dsolve({diff(x(t),t$2)=4*Pi^2*0.1*sin(4*Pi*t)-
– 9.8-(20/0.05)*(x(t)-0.4),x(0)=0.2,D(x)(0)=-0.5},x(t),numeric);
 F := proc (rkf45_x ) ... end proc
> F(0);
```

-вывод заданных начальных условий

$$\left[t = 0,\ \mathrm{x}(t) = .2,\ \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t) = -.5 \right]$$

```
> plots[odeplot](F,[t,x(t)],0..0.2,labels=[t,x]);
```

График полученного решения представлен на рис. 3.

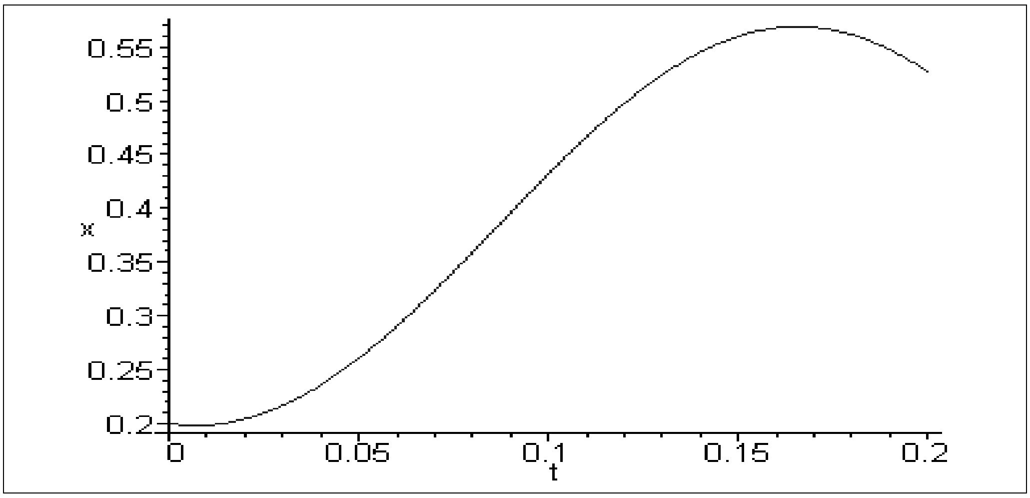


Рис. 3

Решение уравнения (1) методом Рунге-Кутта в системе MathCAD

На рис. 4 и 5 представлен документ, реализующий в математической системе *MathCAD* метод Рунге-Кутта для решения уравнения (1), предварительно приведенного к виду (2).

Начало документа представлено на рис. 4, конец документа — на рис. 5.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения вида

x"(t)+Ax'(t)+Bx(t)=C(t) методом Рунге-Кутта

Задание табличных данных

$m := 0.05$ $w := 4\cdot\pi$ $c := 20$ $lo := 0.4$ $R := 0.1$ $g := 9.8$

$A := 0$ $B := \frac{c}{m}$ $C(t) := \left(w^2\cdot R\cdot \sin(w\cdot t) - g\right) + \frac{c\cdot lo}{m}$

Задание параметров A, B и C(t)

$n := 50$

$startt := 0$ $endt := 0.2$ Заданы пределы t и число точек решения n

$initx := 0.2$ $initx' := -0.5$ Заданы начальные значения x и x'

$h := \frac{endt - startt}{n}$ $h = 4\cdot 10^{-3}$ шаг интегрирования

$x1(t) := -0.1755\cos(20t)$ $x2(t) := -0.0659\sin(20t)$

$x3(t) := 0.06521\sin(4\cdot\pi\cdot t)$ $x4 := \frac{751}{2000}$

Задание точного решения уравнения, полученного с помощью Maple:

$x5(t) := x1(t) + x2(t) + x3(t) + x4$

Рис. 4

Анализируя график (рис. 3), можно сделать вывод о характере движения точки, описываемой дифференциальным уравнением $x''(t) + Ax'(t) + Bx(t) = C(t)$. Сравнивая аналитическое и численное решения уравнения, убедимся в их почти полном совпадении.

Реализация приближенного решения методом Рунге-Кутта

$G(t,x,z) := (C(t) - B\cdot x - A\cdot z)$

$K1(t,x,z,h) := G(t,x,z)$

$k1(t,x,z,h) := z \qquad k2(t,x,z,h) := z + .5\cdot h\cdot K1(t,x,z,h)$

$K2(t,x,z,h) := G(t + .5\cdot h, x + .5\cdot h\cdot k1(t,x,z,h), z + .5\cdot h\cdot K1(t,x,z,h))$

$k3(t,x,z,h) := (z + .5\cdot h\cdot K2(t,x,z,h))$

$K3(t,x,z,h) := G(t + .5\cdot h, x + .5\cdot h\cdot k2(t,x,z,h), z + .5\cdot h\cdot K2(t,x,z,h))$

$k4(t,x,z,h) := z + h\cdot K3(t,x,z,h)$

$K4(t,x,z,h) := G(t + h, x + h\cdot k3(t,x,z,h), z + h\cdot K3(t,x,z,h))$

Формулы решения методом Рунге - Кутта

$$rk(t,x,z,h) := \frac{h}{6}\cdot(k1(t,x,z,h) + 2\cdot k2(t,x,z,h) + 2\cdot k3(t,x,z,h) + k4(t,x,z,h))$$

$$rK(t,x,z,h) := \frac{h}{6}\cdot(K1(t,x,z,h) + 2\cdot K2(t,x,z,h) + 2\cdot K3(t,x,z,h) + K4(t,x,z,h))$$

$t_0 :=$ startt $\qquad j := 0 .. n-1 \qquad t_{j+1} := t_j + h$

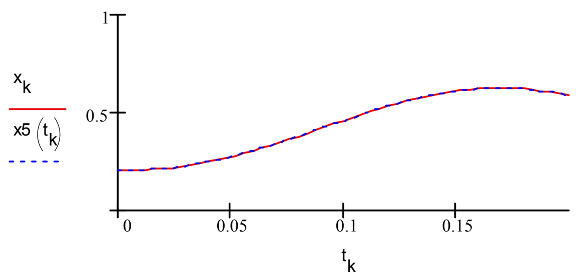
$$\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \text{initx} \\ \text{initx'} \end{bmatrix}$$ Вектор начальных условий

$$\begin{bmatrix} x_{j+1} \\ z_{j+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_j + rk(t_j, x_j, z_j, h) \\ z_j + rK(t_j, x_j, z_j, h) \end{bmatrix}$$ Рекуррентные формулы Рунге-Кутта в векторной форме

$k := 0 .. n$

$L := \text{floor}(\min(x) - .5) \qquad U := \text{ceil}(\max(x) + .5)$

Графики точного и приближенного решений уравнения (Графики координаты относительного движения точки от времени)



$U = 2$

$L = -1$

U=2 - Значение верхнего предела зависимости x(t)

L=-1 - Значение нижнего предела зависимости x(t)

Рис. 5

Если невозможно найти точное решение дифференциального уравнения (т.е. в аналитическом виде), то с заданной точностью можно отыскать его приближенное (численное) решение, в том числе при помощи какого-нибудь математического пакета, например, Maple или MathCAD.

Изд. лиц. ЛР № 020742. Подписано в печать 26.09.2012. Формат 60×84/8
Бумага для множительных аппаратов. Гарнитура Times
Усл. печ. листов 18,5. Тираж 300 экз. Заказ 1336

Отпечатано в Издательстве
Нижневартовского государственного гуманитарного университета
628615, Тюменская область, г.Нижневартовск, ул.Дзержинского, 11
Тел./факс: (3466) 43-75-73, E-mail: izdatelstvo@nggu.ru